Géométrie Différentielle, TD 8 du 11 avril 2014

1. Base holonome de champs de vecteurs

Dans cet exercice, on montre que k champs de vecteurs $X_1, \ldots, X_k$, formant en tout point une base du tangent d'une variété M, s'écrivent localement $\varphi_*\partial_1, \ldots, \varphi_*\partial_k$ pour un difféomorphisme $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ si, et seulement si, les X_i commutent deux à deux.

1– Montrer que la condition est nécessaire.

2– On montre le cas $k = 1$ (la condition est donc vide). On se place sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et on suppose, sans perte de généralité, que $X_1(0) = e_1$. Notons φ_t le flot local de X_1. Montrer que l'application $F(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_{x_1}(0, x_2, \ldots, x_n)$ est un difféomorphisme local au voisinage de l'origine.

3– Soit G un inverse local de F au voisinage de l'origine. Calculer G_*X_1 et en déduire le cas $k = 1$.

4– On procède maintenant par récurrence et on se place sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$. Supposons le résultat établi en degré $\leqslant k-1$. Montrer qu'on peut supposer $X_i = \partial_i$ pour $i \leqslant k-1$ et

$$X_k = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_k, \ldots, x_n)\partial_i.$$

5– Montrer qu'on peut supposer de plus

$$X_k = \sum_{i=1}^{k-1} f_i(x_k, \ldots, x_n)\partial_i + \partial_k.$$

6– Faire un changement de variables de la forme $y_i = x_i + g_i(x_k, \ldots, x_n)$, pour $i \leqslant k-1$ et $y_i = x_i$ pour $i \geqslant k$ et conclure.

2. Transitivité des difféomorphismes

1– Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ tels que $||x||, ||y|| < r$. Montrer qu'il existe un difféomorphisme φ de $\mathbb{R}^n$ tel que $\varphi(x) = y$ et $\varphi(z) = z$ si $||z|| > r$. On pourra utiliser le flot d'un champ de vecteurs adéquat.

2– Soit M une variété C^∞ et $x \in M$. Montrer qu'il existe un voisinage V de x tel que, si $y \in V$, il existe un difféomorphisme φ de M tel que $\varphi(x) = y$.

3– Soit M une variété C^∞ connexe. Montrer que le groupe des difféomorphismes de M agit transitivement sur M.

4– Soit M une variété C^∞ connexe de dimension $\geqslant 2$, et soit $k \geqslant 1$. Montrer que le groupe des difféomorphismes de M agit k-transitivement sur M : si $x_1, \ldots, x_k \in M$

sont distincts et si $y_1, \dots, y_k \in M$ sont distincts, il existe un difféomorphisme φ de M tel que $\varphi(x_i) = y_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant k$.

3. Classification des variétés de dimension 1

Soit M une variété connexe C^∞ de dimension 1. On va montrer que M est difféomorphe à $\mathbb{R}$ ou à $\mathbb{S}^1$.

1– Supposons dans un premier temps que M est orientable. Montrer qu'il existe sur M un champ de vecteurs ξ ne s'annulant pas.

2– Soit $x_0 \in M$ et notons φ_t le flot de ξ. On note $f : t \mapsto \varphi_t(x_0)$ définie sur un intervalle ouvert maximal I. Montrer que f est une immersion surjective.

3– Si f est injective, montrer que f est un difféomorphisme entre I et M.

4– Si f n'est pas injective, montrer que $I = \mathbb{R}$ et que $f^{-1}(x_0)$ est de la forme $r\mathbb{Z}$ pour un certain $r > 0$. En déduire que f induit un difféomorphisme entre $\mathbb{R}/r\mathbb{Z}$ et M.

5– Supposons à présent que M n'est pas orientable. Montrer que M est le quotient par une action sans point fixe de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ d'une variété $\widetilde{M}$ connexe et orientable.

6– Obtenir une contradiction.

4. Théorème de fibration d'Ehresmann

Soit $f : M \to N$ une submersion surjective entre variétés C^∞ de dimensions respectives m et n.

1– Montrer que pour tout champ de vecteurs C^∞ Y sur N, il existe un champ de vecteurs C^∞ X sur M tel que

$$\forall x \in M, T_x f(X(x)) = Y(f(x)).$$

Notons $\varphi_{X,t}$ et $\varphi_{Y,t}$ les flots locaux de X et Y. En déduire que pour tout $x_0 \in X$, si (x, t) est assez proche de $(x_0, 0)$,

$$f \circ \varphi_{X,t}(x) = \varphi_{Y,t} \circ f(x).$$

2– Soit $y_0 \in N$ et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de $T_{y_0}N$. Montrer qu'il existe des champs de vecteurs C^∞ $Y_1, \dots, Y_n$ sur N tels que $Y_i(y_0) = e_i$. Si $\varphi_{Y_i,t}$ est le flot local de Y_i, montrer que l'application

$$(t_1, \dots, t_n) \mapsto \varphi_{Y_1,t_1} \circ \dots \circ \varphi_{Y_n,t_n}(y_0)$$

est un C^∞-difféomorphisme d'un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$ sur un voisinage de y_0 dans N.

3– Supposons f propre. Soit $y_0 \in N$ et notons $F = f^{-1}(y_0)$. Montrer qu'il existe un voisinage U de y_0 dans N et un C^∞-difféomorphisme $\psi : U \times F \to f^{-1}(U)$ tel que $f \circ \psi(y, x) = y$ pour $(y, x) \in U \times F$.

On dit alors que f est une *fibration*.