Géométrie Différentielle, TD 8 du 11 avril 2014

1. Base holonome de champs de vecteurs

Dans cet exercice, on montre que k champs de vecteurs $X_1, \ldots, X_k$, formant en tout point une base du tangent d'une variété M, s'écrivent localement $\varphi_*\partial_1, \ldots, \varphi_*\partial_k$ pour un difféomorphisme $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ si, et seulement si, les X_i commutent deux à deux.

1– Montrer que la condition est nécessaire.

2– On montre le cas $k = 1$ (la condition est donc vide). On se place sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et on suppose, sans perte de généralité, que $X_1(0) = e_1$. Notons φ_t le flot local de X_1. Montrer que l'application $F(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_{x_1}(0, x_2, \ldots, x_n)$ est un difféomorphisme local au voisinage de l'origine.

3– Soit G un inverse local de F au voisinage de l'origine. Calculer G_*X_1 et en déduire le cas $k = 1$.

4– On procède maintenant par récurrence et on se place sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$. Supposons le résultat établi en degré $\leqslant k-1$. Montrer qu'on peut supposer $X_i = \partial_i$ pour $i \leqslant k-1$ et

$$X_k = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_k, \ldots, x_n)\partial_i.$$

5– Montrer qu'on peut supposer de plus

$$X_k = \sum_{i=1}^{k-1} f_i(x_k, \ldots, x_n)\partial_i + \partial_k.$$

6– Faire un changement de variables de la forme $y_i = x_i + g_i(x_k, \ldots, x_n)$, pour $i \leqslant k-1$ et $y_i = x_i$ pour $i \geqslant k$ et conclure.

Solution :

1– Le tiré en avant respect le crochet de Lie.

2– On calcule sa différentielle en l'origine : c'est l'identité. Elle est donc inversible, et le théorème d'inversion locale assure que F est un difféomorphisme local.

3– Calculons $F_*\partial_1$. On a $d_{(x_1,\ldots,x_n)}F(\partial_1) = X(F(x_1, \ldots, x_n))$, de sorte que $F_*\partial_1 = X$. Comme G est un inverse local de F, $G_*X = \partial_1$. Comme le problème est local, on peut supposer que M est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et que x en est l'origine. Comme $X(x)$ est non nul, on peut, quitte à faire un changement de coordonnées linéaire, supposer que $X(x) = e_1$. Quitte à restreindre notre ouvert, l'application $\psi = G$ considérée à la seconde question est bien définie et convient.

4– Par récurrence sur k, on peut trouver une carte telle que $X_1 = \partial_1, \dots, X_{k-1} = \partial_{k-1}$. On écrit alors $X_k = \sum_{i=1}^n f_i \partial_i$ en coordonnées. La condition $[X_k, X_i] = 0$ implique, par calcul direct, que les fonctions f_i ne dépendent que de $x_k, \dots, x_n$.

Par translation, on peut supposer que x est l'origine de la carte.

5– Considérons le champ de vecteurs $\sum_{i=k}^n f_i(x_k, \dots, x_n)\partial_i$ comme un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^{n-k+1}$. Il est non nul en x car $X_1, \dots, X_k$ sont indépendants en x. On peut donc appliquer le théorème de redressement des champs de vecteurs, et changer de coordonnées locales pour que ce champ de vecteurs devienne égal à ∂_k.

Appliquant ce changement de coordonnées aux $n-k+1$ dernières coordonnées dans $\mathbb{R}^n$, on obtient une nouvelle carte, qui convient.

6– Soit $\varphi : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (y_1, \dots y_n)$. Sa forme triangulaire montre que la différentielle de φ a déterminant 1, de sorte que c'est un difféomorphisme local. On se restreint à des petits ouverts en lesquels c'est un difféomorphisme.

On calcule aisément, si $1 \leqslant i \leqslant k-1$: $\varphi_*\partial_i(\varphi(y)) = d_y\varphi(\partial_i) = \partial_i$, de sorte que $\varphi_* X_i = \partial_i$. De plus $\varphi_* X_k(\varphi(y)) = d_y\varphi(X_k) = \partial_k + \sum_{i=1}^{k-1}(f_i + \frac{\partial g_i}{\partial x_k})$. Il suffit donc de choisir g_i telle que $g_i(0) = 0$ et $\frac{\partial g_i}{\partial x_k} = -f_i$.

2. Transitivité des difféomorphismes

1– Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ tels que $||x||, ||y|| < r$. Montrer qu'il existe un difféomorphisme φ de $\mathbb{R}^n$ tel que $\varphi(x) = y$ et $\varphi(z) = z$ si $||z|| > r$. On pourra utiliser le flot d'un champ de vecteurs adéquat.

2– Soit M une variété C^∞ et $x \in M$. Montrer qu'il existe un voisinage V de x tel que, si $y \in V$, il existe un difféomorphisme φ de M tel que $\varphi(x) = y$.

3– Soit M une variété C^∞ connexe. Montrer que le groupe des difféomorphismes de M agit transitivement sur M.

4– Soit M une variété C^∞ connexe de dimension $\geqslant 2$, et soit $k \geqslant 1$. Montrer que le groupe des difféomorphismes de M agit k-transitivement sur M : si $x_1, \dots, x_k \in M$ sont distincts et si $y_1, \dots, y_k \in M$ sont distincts, il existe un difféomorphisme φ de M tel que $\varphi(x_i) = y_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant k$.

Solution :

1– Considérons le champ de vecteurs X constant égal à $y - x$. Soit ρ tel que $||x||, ||y|| < \rho < r$ et notons $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction plateau égale à 1 sur $B(0, \rho)$ et égale à 0 hors de $B(0, r)$. Posons $Y = fX$. Le flot de Y est défini pour tout temps, par le théorème des bouts. En effet, hors de $B(0, r)$, il est constant, de sorte qu'il ne peut sortir de tout compact.

Notons φ le flot de Y au temps 1. Il vérifie les propriétés voulues.

2– On choisit un voisinage U de x difféomorphe à $\mathbb{R}^n$; on l'identifie à $\mathbb{R}^n$ de sorte que x en soit l'origine. On pose V la boule unité ouverte dans U. Montrons que V convient.

Soit $y \in V$. Par la question précédente, on trouve un difféomorphisme φ de U envoyant x sur y, et qui peut se prolonger en un difféomorphisme de M en posant $\varphi(z) = z$ pour $z \notin U$.

3– La question précédente montre que les orbites de l'action du groupe des difféomorphismes sont ouvertes. Comme M est connexe, et partitionnée en orbites, il ne peut y avoir qu'une orbite, égale à M tout entier.

4– On raisonne par récurrence sur k. Pour $k = 1$, c'est le résultat ci-dessus. Si c'est vrai pour $k-1$, on considère un difféomorphisme ψ envoyant x_i sur y_i pour $1 \leqslant i \leqslant k-1$. Posons $x = \psi(x_k)$. On va construire un difféomorphisme ψ' tel que $\psi'(y_i) = y_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant k-1$ et $\psi'(x) = y_k$. On pourra alors poser $\varphi = \psi' \circ \psi$.

On considère pour cela l'action sur M du groupe des difféomorphismes fixant $y_1, \ldots, y_{k-1}$. En raisonnant comme dans les questions précédentes (et en particulier en exploitant la connexité de $M \setminus \{y_1, \ldots, y_{k-1}\}$, vraie car $\dim(M) \geqslant 2$), on montre qu'il agit transitivement sur $M \setminus \{y_1, \ldots, y_{k-1}\}$, ce qui conclut.

3. Classification des variétés de dimension 1

Soit M une variété connexe C^∞ de dimension 1. On va montrer que M est difféomorphe à $\mathbb{R}$ ou à $\mathbb{S}^1$.

1– Supposons dans un premier temps que M est orientable. Montrer qu'il existe sur M un champ de vecteurs ξ ne s'annulant pas.

2– Soit $x_0 \in M$ et notons φ_t le flot de ξ. On note $f : t \mapsto \varphi_t(x_0)$ définie sur un intervalle ouvert maximal I. Montrer que f est une immersion surjective.

3– Si f est injective, montrer que f est un difféomorphisme entre I et M.

4– Si f n'est pas injective, montrer que $I = \mathbb{R}$ et que $f^{-1}(x_0)$ est de la forme $r\mathbb{Z}$ pour un certain $r > 0$. En déduire que f induit un difféomorphisme entre $\mathbb{R}/r\mathbb{Z}$ et M.

5– Supposons à présent que M n'est pas orientable. Montrer que M est le quotient par une action sans point fixe de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ d'une variété $\widetilde{M}$ connexe et orientable.

6– Obtenir une contradiction.

Solution :

1– Fixons une orientation de M. Écrivons M comme réunion localement finie d'ouverts de cartes connexes U_i : ce sont des intervalles. Soit (φ_i) une partition de l'unité adaptée aux U_i et ξ_i un champ de vecteurs sur U_i proportionnel à l'orientation et ne s'annulant pas. Alors $\xi = \sum_i \varphi_i \xi_i$ convient.

2– La différentielle de f est donnée par $T_t f(\frac{\partial}{\partial t}) = X(f(t)) \neq 0$. Ainsi, f est immersive, donc un difféomorphisme local, et son image est ouverte. Montrons qu'elle est également fermée. Soit $y \in \overline{f(I)}$. L'application $g : t \mapsto \varphi_t(y)$ est définie sur un voisinage $]-\varepsilon;\varepsilon[$ de 0 dans $\mathbb{R}$. Son image $g(]-\varepsilon;\varepsilon[)$ est donc un voisinage de y et rencontre ainsi $f(I)$. Il existe alors $s \in]-\varepsilon;\varepsilon[$ et $t \in I$ tels que $\varphi_s(y) = \varphi_t(x_0)$. Alors $y = \varphi_{t-s}(x_0)$ appartient à I.

Par connexité de M, f est donc surjective.

3– Si f est injective, c'est un difféomorphisme local bijectif, donc un difféomorphisme entre I et M.

4– Supposons qu'il existe deux points t et $t+s$ dans I avec $s > 0$ tels que $f(t) = f(t+s)$. Alors les propriétés de transitivité du flot montrent que $I = I + s$, ce qui implique $I = \mathbb{R}$. De plus $\{s \in \mathbb{R} | \varphi_s(x_0) = x_0\}$ est un sous-groupe fermé de $\mathbb{R}$ non nul et non égal à $\mathbb{R}$ (car f est un difféomorphisme local en x_0). Par conséquent, il est de la forme $r\mathbb{Z}$ avec $r > 0$. Pour $t \in \mathbb{R}$, $f(t+r) = f(t)$, de sorte que f induit $\widetilde{f} : \mathbb{R}/r\mathbb{Z} \to M$. Comme f est une immersion, $\widetilde{f}$ est une immersion. Par définition de r, elle est injective. Comme elle est également surjective, $\widetilde{f}$ est un difféomorphisme.

5– Soit $\widetilde{M}$ l'ensemble des couples (x, o) où $x \in M$ et o est une orientation de $T_x M$. On vérifie aisément que $\widetilde{M}$ est munie d'une structure naturelle de variété C^∞, et que M est le quotient de $\widetilde{M}$ par l'actionde $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ donnée par $(x, o) \mapsto (x, -o)$. La variété $\widetilde{M}$ est orientable : son espace tangent en (x, o) s'identifie naturellement à $T_x M$ et peut être muni de l'orientation o.

6– La variété $\widetilde{M}$ est connexe orientable de dimension 1, donc isomorphe, par les questions précédentes à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{S}^1$. De plus, l'action de $1 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est une involution sans point fixe de $\widetilde{M}$ qui renverse l'orientation. Or le théorème des valeurs intermédiaires montre que ni $\mathbb{R}$ ni $\mathbb{S}^1$ ne possèdent un tel automorphisme. C'est absurde.

4. Théorème de fibration d'Ehresmann

Soit $f : M \to N$ une submersion surjective entre variétés C^∞ de dimensions respectives m et n.

1– Montrer que pour tout champ de vecteurs C^∞ Y sur N, il existe un champ de vecteurs C^∞ X sur M tel que

$$\forall x \in M, T_x f(X(x)) = Y(f(x)).$$

Notons $\varphi_{X,t}$ et $\varphi_{Y,t}$ les flots locaux de X et Y. En déduire que pour tout $x_0 \in X$, si (x, t) est assez proche de $(x_0, 0)$,

$$f \circ \varphi_{X,t}(x) = \varphi_{Y,t} \circ f(x).$$

2– Soit $y_0 \in N$ et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de $T_{y_0} N$. Montrer qu'il existe des champs de vecteurs C^∞ $Y_1, \ldots, Y_n$ sur N tels que $Y_i(y_0) = e_i$. Si $\varphi_{Y_i,t}$ est le flot local de Y_i,

montrer que l'application
$$(t_1, \ldots, t_n) \mapsto \varphi_{Y_1,t_1} \circ \ldots \circ \varphi_{Y_n,t_n}(y_0)$$
est un C^∞-difféomorphisme d'un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$ sur un voisinage de y_0 dans N.

3– Supposons f propre. Soit $y_0 \in N$ et notons $F = f^{-1}(y_0)$. Montrer qu'il existe un voisinage U de y_0 dans N et un C^∞-difféomorphisme $\psi : U \times F \to f^{-1}(U)$ tel que $f \circ \psi(y, x) = y$ pour $(y, x) \in U \times F$.

On dit alors que f est une *fibration*.

Solution :

Voir la correction de l'exercice 88 dans le polycopié de F. Paulin.