Géométrie Différentielle, TD 8 du 13 avril 2015

1. Théorème de Cartan

Le but de cet exercice est de montrer que, si G est un sous-groupe fermé de $GL(n,\mathbb{R})$, alors G est une sous-variété de $GL(n,\mathbb{R})$. Soit G un tel sous-groupe fermé. On définit :

$$\mathfrak{g} := \{X \in M(n,\mathbb{R}) \mid \exp(tX) \in G, \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

On note Log l'inverse de exp, défini sur un petit voisinage de l'identité.

1– Montrer la formule $\exp(X+Y) = \lim_{n\to\infty}(\exp(X/n).\exp(Y/n))^n$, où X et Y sont dans $M(n,\mathbb{R})$. En déduire que $\mathfrak{g}$ est un sous-espace vectoriel de $M(n,\mathbb{R})$.

2– Si g_n est une suite d'éléments de G tendant vers l'identité et distincts de l'identité, montrer que toute valeur d'adhérence de la suite $\frac{\operatorname{Log} g_n}{||\operatorname{Log} g_n||}$ est dans $\mathfrak{g}$.

3– En déduire que, si $\mathfrak{g}'$ est un supplémentaire de $\mathfrak{g}$ dans $M(n,\mathbb{R})$, il existe un voisinage V' de 0 dans $\mathfrak{g}'$ tel que $\exp(V') \cap G$ est réduit à l'identité.

4– Conclure, en considérant l'application $\theta : \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}' \to GL(n,\mathbb{R}), (X,Y) \mapsto \exp(X).\exp(Y)$.

2. Vilaines orbites

Donner un exemple d'une action lisse d'un groupe G sur un espace X tel que les orbites de G ne soient pas toutes des sous-variétés de X.

3. La Grassmannienne comme variété quotient

On considère deux entiers $k < n$. On note $L_k(\mathbb{R}^k,\mathbb{R}^n)$ (resp. $L_{n-k}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^{n-k})$) les applications linéaires de rang maximal de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}^n$ (resp. de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^{n-k}$). On note par ailleurs P le sous-groupe de $GL(n,\mathbb{R})$ des éléments stabilisant le sous-espace $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ dans $\mathbb{R}^n$.

1– Donner un sens aux égalités

$$G(k,n) = L_k(\mathbb{R}^k,\mathbb{R}^n)/GL(k,\mathbb{R})$$

et

$$G(k,n) = L_{n-k}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^{n-k})/GL(n-k,\mathbb{R})$$

et les justifier.

2– Même question pour $G(k,n) = GL(n,\mathbb{R})/P$ et $G(k,n) = O(n,\mathbb{R})/(O(k,\mathbb{R}) \times O(n-k,\mathbb{R})$.

4. Orbites dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

On considère l'espace projectif $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. On note q la forme quadratique $q(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ dans $\mathbb{R}^3$ et $O(q) \cong O(1, 2)$ le groupe orthogonal associé. On fait agir $GL(3, \mathbb{R})$ et son sous-groupe $O(q)$ sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

1– Identifier les orbites de l'action de $O(q)$ sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. A quels espaces sont-elles difféomorphes ?

2– Calculer les stabilisateurs des orbites. En déduire des représentations homogènes des orbites.

3– En faisant agir $SL(2, \mathbb{R})$ par conjugaison sur les matrices carrées de taille 2 et de trace nulle, construire un morphisme de groupes $SL(2, \mathbb{R}) \to O(1, 2)$. Montrer qu'il induit un isomorphisme de groupes $SL(2, \mathbb{R})/\pm Id \to O(1, 2)^o$, où $O(1, 2)^o$ est la composante connexe de l'identité de $O(1, 2)$.

4– En utilisant cet isomorphisme, réinterpréter l'action de $O(q)$ sur l'unique orbite fermée dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

5. Sous-variétés immergées

Soit $f : M \to N$ une immersion injective entre variétés. Son image $S = f(M)$ est une *sous-variété immergée* de N. Pour éviter les confusions, on appelle *sous-variété plongée* une sous-variété au sens usuel, dans cet exercice seulement.

1– Montrer qu'il existe une unique topologie et une structure de variété différentielle sur S telle que $f : M \to S$ soit un difféomorphisme.

2– On considère une action d'un groupe G par difféomorphismes sur une variété M. Montrer que les orbites de G sont des sous-variétés immergées.

3– Montrer que les orbites sont des sous-variétés (plongées) si et seulement si elles sont localement fermées.