Géométrie Différentielle, TD 8 du 13 avril 2015

1. Théorème de Cartan

Le but de cet exercice est de montrer que, si G est un sous-groupe fermé de $GL(n,\mathbb{R})$, alors G est une sous-variété de $GL(n,\mathbb{R})$. Soit G un tel sous-groupe fermé. On définit :

$$\mathfrak{g} := \{X \in M(n,\mathbb{R}) \mid \exp(tX) \in G, \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

On note Log l'inverse de exp, défini sur un petit voisinage de l'identité.

1– Montrer la formule $\exp(X+Y) = \lim_{n\to\infty}(\exp(X/n).\exp(Y/n))^n$, où X et Y sont dans $M(n,\mathbb{R})$. En déduire que $\mathfrak{g}$ est un sous-espace vectoriel de $M(n,\mathbb{R})$.

2– Si g_n est une suite d'éléments de G tendant vers l'identité et distincts de l'identité, montrer que toute valeur d'adhérence de la suite $\frac{\operatorname{Log} g_n}{||\operatorname{Log} g_n||}$ est dans $\mathfrak{g}$.

3– En déduire que, si $\mathfrak{g}'$ est un supplémentaire de $\mathfrak{g}$ dans $M(n,\mathbb{R})$, il existe un voisinage V' de 0 dans $\mathfrak{g}'$ tel que $\exp(V') \cap G$ est réduit à l'identité.

4– Conclure, en considérant l'application $\theta : \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}' \to GL(n,\mathbb{R}), (X,Y) \mapsto \exp(X).\exp(Y)$.

Solution :

1– Pour n grand, $\exp(X/n)$, $\exp(Y/n)$ et leur produit sont dans un voisinage de l'identité sur lequel Log est l'inverse de exp. On a $n\operatorname{Log}(\exp(X/n).\exp(Y/n)) = n\operatorname{Log}(I + X/n + Y/n + o(1/n)) = X + Y + o(1)$. Donc, $n\operatorname{Log}(\exp(X/n).\exp(Y/n))$ tend vers $X+Y$. On passe alors à l'exponentielle. On en déduit immédiatement que $\mathfrak{g}$ est un sous-espace vectoriel.

2– Soit X une valeur d'adhérence de $\frac{\operatorname{Log} g_n}{||\operatorname{Log} g_n||}$. Soit t dans $\mathbb{R}$. On considère $\exp(tX)$. On écrit t comme $k_n||\operatorname{Log} g_n|| + t'_n$ où k_n est dans $\mathbb{Z}$ et $0 \leqslant t'_n < ||\operatorname{Log} g_n||$. Alors,

$$\exp(t\frac{\operatorname{Log} g_n}{||\operatorname{Log} g_n||}) = \exp(k_n \operatorname{Log} g_n + u_n \operatorname{Log} g_n) = g_n^{k_n}.\exp(u_n \operatorname{Log} g_n),$$

avec $0 \leqslant u_n < 1$. Le deuxième terme du produit tend vers l'identité, le premier est tout le temps dans G. Donc, comme G est fermé, toute valeur d'adhérence de $\exp(t\frac{\operatorname{Log} g_n}{||\operatorname{Log} g_n||})$ est dans G, en particulier $\exp(tX)$, ce qui conclut.

3– Considérons $\mathfrak{g}'$ un supplémentaire de $\mathfrak{g}$ dans $M(n,\mathbb{R})$. Par l'absurde, supposons qu'il existe X_n non-nul dans $\mathfrak{g}'$ tendant vers 0 tel que $\exp(X_n) = g_n$ appartient à G. Par la question précédente, toute valeur d'adhérence de $\frac{X_n}{||X_n||}$ est alors dans $\mathfrak{g}$. Par compacité, une telle valeur d'adhérence existe et doit appartenir à $\mathfrak{g}\cap\mathfrak{g}'$, tout en étant de norme 1. C'est absurde.

4– La différentielle de θ en 0 est l'identité, *via* l'identification $\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}' = M(n,\mathbb{R}) = T_I GL(n,\mathbb{R})$. Donc, θ est un difféomorphisme local d'un ouvert $U_{\mathfrak{g}} \times U_{\mathfrak{g}'}$ vers un ouvert

W. Quitte à rétrécir les ouverts, on peut supposer que $U_{\mathfrak{g}'}$ est contenu dans V', obtenu à la question précédente.

En fait, θ réalise une bijection entre $U_{\mathfrak{g}}$ et $G \cap W$. En effet, θ envoie $U_{\mathfrak{g}}$ sur $G \cap W$ par définition. Réciproquement, si g est dans $G \cap W$, soit (X, Y) dans $U_{\mathfrak{g}} \times U_{\mathfrak{g}'}$ tel que $\theta(X, Y) = g$. Alors, $\exp(Y) = g \exp(-X)$ est dans G, ce qui implique $Y = 0$, par la question précédente.

On a donc construit un redressement local de G au voisinage de l'identité. Donc, G est une sous-variété au voisinage de l'identité, et en fait partout en utilisant les translations par des éléments de G.

2. Vilaines orbites

Donner un exemple d'une action lisse d'un groupe G sur un espace X tel que les orbites de G ne soient pas toutes des sous-variétés de X.

Solution :

On peut par exemple considérer l'action libre de $\mathbb{R}$ sur le tore $S^1 \times S^1$ donnée, par $(x, y) \mapsto (x + t, y + t\alpha)$, où α est un nombre irrationnel (ici S^1 est vu comme le quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$). On montre sans difficulté que toutes les orbites sont denses.

3. La Grassmannienne comme variété quotient

On considère deux entiers $k < n$. On note $L_k(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$ (resp. $L_{n-k}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n-k})$) les applications linéaires de rang maximal de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}^n$ (resp. de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^{n-k}$). On note par ailleurs P le sous-groupe de $GL(n, \mathbb{R})$ des éléments stabilisant le sous-espace $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ dans $\mathbb{R}^n$.

1– Donner un sens aux égalités
$$G(k, n) = L_k(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)/GL(k, \mathbb{R})$$
et
$$G(k, n) = L_{n-k}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n-k})/GL(n - k, \mathbb{R})$$
et les justifier.

2– Même question pour $G(k, n) = GL(n, \mathbb{R})/P$ et $G(k, n) = O(n, \mathbb{R})/(O(k, \mathbb{R}) \times O(n - k, \mathbb{R})$.

Solution :

1– Le groupe $GL(k, \mathbb{R})$ agit sur $L_k(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$ par multiplication à droite. L'hypothèse sur le rang implique que cette action est libre. L'action est par ailleurs propre. Soit en effet M dans $L_k(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$. La quantité $\frac{||My||}{||y||}$, pour y dans $\mathbb{R}^k - \{0\}$ (ou y normé, par homogénéité), appartient à un segment $[c_M, C_M]$ de $]0, +\infty[$ puisque cette quantité ne s'annule pas. De plus, si M est forcé à vivre dans un compact K de $L_k(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$, les constantes peuvent être prises indépendantes de M (mais dépendantes de K) ; on les écrit alors c_K et C_K. Si M et N sont dans un tel compact K et qu'on a l'égalité $Mg = N$, on peut alors estimer la norme d'opérateur de g. En effet, soit x dans $\mathbb{R}^k - \{0\}$; alors $||gx|| = \frac{||gx||}{||Mgx||}||Mgx|| \leqslant c_K||Nx|| \leqslant \frac{C_K}{c_K}||x||$. On a ainsi une estimée sur la norme triple de g ; donc l'ensemble des g tels que $gK \cap K \neq \emptyset$ est relativement compact dans $GL(k, \mathbb{R})$.

On a donc une structure de variété sur l'ensemble quotient $L_k(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)/GL(k, \mathbb{R})$. Par ailleurs, on a une application de $L_k(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$ dans $G(k, n)$ qui à une matrice associe son image. D'après le cours, c'est une submersion. Deux matrices sont dans la même orbite sous $GL(k, \mathbb{R})$ ssi elles ont la même image (lemme d'algèbre linéaire), donc on en déduit l'existence d'une bijection $L_k(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)/GL(k, \mathbb{R}) \to G(k, n)$. Pour conclure, il suffit de remarquer que comme les applications $L_k(k, n) \to G(k, n)$ et $L_k(k, n) \to L_k(k, n)/GL(k, \mathbb{R})$ sont toutes les deux des submersions, la bijection obtenue est lisse dans les deux directions, donc un difféomorphisme.

La deuxième égalité s'obtient de même en considérant des noyaux d'applications plutôt que des images.

2– Le point de vue ici est un peu différent. Le groupe $GL(n, \mathbb{R})$ agit sur la Grassmannienne $G(k, n)$. L'action est transitive (on envoie base du plan sur base du plan et base d'un supplémentaire sur base d'un supplémentaire) et son stabilisateur en le plan $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ de $\mathbb{R}^n$ est P, par définition. Donc, au moins en tant qu'ensembles, on a l'égalité $G(k, n) = GL(n, \mathbb{R})/P$. C'est en fait un difféomorphisme, par la proposition suivante.

Proposition 1. *Soit $H \subset G$ des sous-groupes fermés de $GL(n, \mathbb{R})$, qui sont aussi des sous-variétés. Soit X une variété munie d'une action transitive lisse de G, de stabilisateur H en un point x. Alors, la bijection naturelle $G/H \to X$ est un difféomorphisme pour la structure canonique de variété quotient sur G/H.*

*Démonstration.*Comme l'application $G \to G/H$ est une submersion, la bijection $G/H \to X$ est lisse. Dans l'autre direction, on considère l'application orbitale $a : G \to X$, donnée par $a(g) = g.x$. On montre que cette application est de rang constant (c'est une généralisation du cas du morphisme de groupes dans le TD 6). Comme elle est surjective, c'est nécessairement une submersion (théorème de Sard). Donc, l'application $X \to G/H$ est également lisse. □

Le raisonnement est le même dans le cas du groupe orthogonal : l'action est toujours transitive (on prend comme supplémentaire l'orthogonal et on travaille avec des bases orthonormées) et la bijection obtenue est un difféomorphisme. Il faut juste justifier que le stabilisateur de $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ est isomorphe à $O(k) \times O(n-k)$; mais une application orthogonale qui envoie $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ sur lui-même, stabilise aussi son orthogonal $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-k}$ et la restriction de l'application à ces deux plans est une application orthogonale (et réciproquement, on construit un élément du stabilisateur en choisant une application orthogonale dans chacun des deux plans).

4. Orbites dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

On considère l'espace projectif $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. On note q la forme quadratique $q(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ dans $\mathbb{R}^3$ et $O(q) \cong O(1, 2)$ le groupe orthogonal associé. On fait agir $GL(3, \mathbb{R})$ et son sous-groupe $O(q)$ sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

1– Identifier les orbites de l'action de $O(q)$ sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. A quels espaces sont-elles difféomorphes ?

2– Calculer les stabilisateurs des orbites. En déduire des représentations homogènes des orbites.

3– En faisant agir $SL(2, \mathbb{R})$ par conjugaison sur les matrices carrées de taille 2 et de trace nulle, construire un morphisme de groupes $SL(2, \mathbb{R}) \to O(1, 2)$. Montrer qu'il induit un isomorphisme de groupes $SL(2, \mathbb{R})/\pm Id \to O(1, 2)^o$, où $O(1, 2)^o$ est la composante connexe de l'identité de $O(1, 2)$.

4– En utilisant cet isomorphisme, réinterpréter l'action de $O(q)$ sur l'unique orbite fermée dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

Solution :

1– Il s'agit de comprendre l'action du groupe orthogonal de signature $(1, 2)$ sur les droites de $\mathbb{R}^3$. Sur une droite, la forme quadratique est soit positive, soit négative, soit nulle. Par ailleurs, deux droites *de même signe* sont dans la même orbite sous l'action du groupe orthogonal (c'est un cas particulier du théorème de Witt : si deux droites sont de même signe, il existe une isométrie entre elles et cette isométrie se prolonge à une isométrie de l'espace ; on peut aussi le redémontrer directement). On a donc trois orbites ; géométriquement, le lieu d'annulation de q est un cône dans $\mathbb{R}^3$ et définit trois zones : l'intérieur du cône, le cône et l'extérieur du cône. Les trois orbites sont les images de ces trois zones dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ (elles sont bien sûr stables par homothéties).

La première orbite correspond à l'intérieur du cône : ce sont les droites de coordonnées homogènes $[x : y : z]$ avec $x^2 + y^2 - z^2 < 0$ (bien défini). En particulier, z est non-nul et on peut supposer $z = 1$. Alors l'orbite est difféomorphe à l'ensemble des points dans le plan de coordonnées affines (x, y) satisfaisant $x^2 + y^2 < 1$; c'est donc un disque ouvert. La deuxième orbite correspond au cône. On peut de nouveau supposer $z = 1$ car $z = 0$ implique $x = y = 0$ et qu'on ne considère pas l'origine. On trouve alors l'équation $x^2 + y^2 = 1$ dans le plan : c'est un cercle. La troisième orbite correspond à l'extérieur du cône ; cette fois, z peut être nul mais $x^2 + y^2 > 0$. On peut supposer $x^2 + y^2 = 1$ (attention, cela laisse une indétermination sur le signe de x et de y). Alors, la troisième orbite est difféomorphe à l'ensemble des points (x, y, z) tels que

$x^2+y^2=1$ et $z^2<1$, quotienté par l'antipodie $(x,y,z)\mapsto(-x,-y,-z)$. On quotiente donc un cylindre $S^1\times]-1,1[$ par l'antipodie : on obtient un ruban de Möbius.

Bilan : on a deux orbites ouvertes et une orbite fermée et on a décomposé $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ en l'union disjointe d'un cercle, d'un disque et d'un ruban de Möbius. Tâchez de vous représenter cette décomposition au niveau de la sphère $\mathbb{S}^2\subset\mathbb{R}^3$.

2– Si une application orthogonale stabilise une droite non isotrope, elle doit aussi stabiliser son plan orthogonal. La droite $[0:0:1]$ (intérieur du cône) est négative pour q, son plan orthogonal est positif pour q. Un élément du stabilisateur est alors le produit d'un élément du groupe $O(1)\cong\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et du groupe $O(2)$ Donc, la première orbite est donc l'espace homogène $O(1,2)/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times O(2))$. Petite vérification au niveau des dimensions : $O(1,2)$ a la même dimension que $O(3)$ qui est 3 et $O(2)$ a dimension 1. On a donc bien un quotient de dimension 2. Le même raisonnement avec la droite $[1:0:0]$ (extérieur du cône) donne une représentation homogène suivante de la troisième orbite : $O(1,2)/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times O(1,1))$. Pour la deuxième orbite (le cône), c'est un peu plus compliqué (un chocolat pour une jolie solution géométrique) : si un élément de $O(1,2)$ stabilise une droite du cône, il stabilise aussi le plan orthogonal à la droite (qui contient la droite). Sur ce plan, la forme quadratique est dégénérée mais non-nulle. On vérifie vite que le groupe orthogonal d'une forme quadratique de ce type est de dimension 2. Appelons H ce groupe, S le stabilisateur recherché. On a donc un morphisme de restriction de S vers H ; c'est sans doute un isomorphisme (?)

3– On considère la forme quadratique non-dégénérée $q(X,Y)=\mathrm{Tr}(XY)$ sur l'espace V des matrices $(2,2)$ de trace nulle. Par les propriétés d'invariance de la trace, $SL(2,\mathbb{R})$ préserve cette forme quadratique dans son action par conjugaison. On vérifie que, pour ce produit scalaire, les matrices antisymétriques sont orthogonales aux matrices symétriques et que la restriction de q aux matrices symétriques (resp. anti-symétriques) est définie positive (resp. négative). La forme quadratique est donc de signature $(1,2)$, d'où le morphisme $SL(2,\mathbb{R})\to O(1,2)$. Son noyau est $\pm Id$ d'où un morphisme injectif $SL(2,\mathbb{R})/\pm Id\to O(1,2)^o$, puisque $SL(2,\mathbb{R})$ est connexe. Comme un morphisme de groupes est de rang constant, il ne peut être injectif que si c'est une immersion. Comme les deux groupes ont même dimension, c'est un difféomorphisme local donc une application ouverte. L'image est un sous-groupe ouvert de $O(1,2)^o$, donc c'est aussi un sous-groupe fermé et est donc égal à $O(1,2)^o$. Finalement, on a bien un isomorphisme de groupes $SL(2,\mathbb{R})/\pm Id\to O(1,2)^o$.

4– Idée : en utilisant cet isomorphisme, l'action de $O(1,2)$ sur les droites du cône devient une action de $SL(2,\mathbb{R})/\pm Id$ sur le cercle (cf. première question). Mais l'espace projectif $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ est aussi un cercle et $SL(2,\mathbb{R})/\pm Id$ agit naturellement dessus. Montrer que ces actions sont les mêmes et en déduire une autre représentation du stabilisateur.

5. Sous-variétés immergées

Soit $f : M \to N$ une immersion injective entre variétés. Son image $S = f(M)$ est une *sous-variété immergée* de N. Pour éviter les confusions, on appelle *sous-variété plongée* une sous-variété au sens usuel, dans cet exercice seulement.

1– Montrer qu'il existe une unique topologie et une structure de variété différentielle sur S telle que $f : M \to S$ soit un difféomorphisme.

2– On considère une action d'un groupe G par difféomorphismes sur une variété M. Montrer que les orbites de G sont des sous-variétés immergées.

3– Montrer que les orbites sont des sous-variétés (plongées) si et seulement si elles sont localement fermées.

Solution :

1– C'est une tautologie : il suffit de transporter la structure topologique et de variété différentielle de M par la bijection $f : M \to S$. Attention, la topologie de S ne coïncide *a priori* pas avec sa topologie comme sous-espace de N.

2– Soit x dans M. Notons a_x l'application orbitale de G dans M définie par $a_x(g) = g.x$. Si G_x est le stabilisateur du point x, cette application passe au quotient en une application lisse $\theta_x : G/G_x \to M$. Cette application est injective ; c'est aussi une immersion. Pour montrer cela, notons L_g la translation par g dans G/G_x et m_g le difféomorphisme de M donné par $x \mapsto g.x$. Alors, on a l'identité $m_g \circ \theta_x \circ L_{g^{-1}} = \theta_x$, pour tout g dans G. Comme m_g et $L_{g^{-1}}$ sont des difféomorphismes, les différentielles de θ_x en deux points quelconques de G/G_x sont égales à des isomorphismes linéaires près (on rappelle que G agit transitivement sur G/G_x). Donc, il suffit de montrer que θ_x est une immersion en $G_x \in G/G_x$. On rappelle que a_x est une application de rang constant. Le sous-groupe G_x s'identifie à l'image inverse du point x par a_x. Il suffit alors de démontrer le résultat général, qui affirme que la préimage d'un point par une application de rang constant est une sous-variété, dont l'espace tangent en un point s'identifie au noyau de la différentielle de l'application de rang constant en ce point (le démontrer !).

3– On sait qu'une sous-variété est localement fermée. Réciproquement, on considère l'orbite $G.x$ d'un point et on suppose cette orbite localement fermée. L'orbite est alors localement compacte. On fixe U un voisinage ouvert de e dans G. Soit V un voisinage compact de e dans G tel que $V^{-1}V \subset U$. Considérons une suite $(g_i)_{i \in \mathbb{N}}$ dans G telle que G est recouvert par les g_iV (par séparabilité). Alors, $G.x = \cup_{i \in \mathbb{N}} g_iV.x$. Comme V est compact, les $g_iV.x$ sont compacts, donc fermés dans $G.x$. Par le lemme de Baire (valable dans des espaces localement compacts), au moins un est d'intérieur non vide. En utilisant une translation par un g_i^{-1}, cela prouve que $V.x$ est d'intérieur non vide.

Soit g dans V tel que $g.x$ est dans l'intérieur de $V.x$. Alors, $g^{-1}V.x$ est un voisinage de x et $g^{-1}V$ est contenu dans U. *Bilan* : si U voisinage ouvert de e dans G, $U.x$ est un voisinage de x dans $G.x$.

Soit finalement U un ouvert quelconque de G. Pour tout g dans U, on choisit un tel voisinage ouvert W_g de e tel que gW_g soit inclus dans U. Alors, $U.x$ contient $gW_g.x$ qui est un voisinage ouvert de $g.x$ dans $G.x$. Donc, $U.x$ est voisinage de chacun de ses points ; c'est donc un ouvert. On a montré que l'application orbitale était ouverte ; on en déduit que θ_x est aussi ouverte, donc un homéomorphisme sur son image, donc un plongement, ce qui conclut.