Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$8

Corrigé

Exercice 1

1.

$$\begin{aligned}\mathrm{Op}(a_t)J_\epsilon(u)(x) &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} a_t(x,\xi)\widehat{J_\epsilon u}(\xi)e^{ix.\xi}d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} a_t(x,\xi)\chi(\epsilon\xi)\hat{u}(\xi)e^{ix.\xi}d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} a_t^\epsilon(x,\xi)\hat{u}(\xi)e^{ix.\xi}d\xi\end{aligned}$$

si on pose $a_t^\epsilon(x,\xi) = a_t(x,\xi)\chi(\epsilon\xi)$.

2. Définisson $F : [0;T]\times H^s \to H^s$ par :

$$F(t,v) = f(t) - \mathrm{Op}(a_t^\epsilon)v$$

Cette application est continue. En effet, f est continue par hypothèse. De plus, $t \to a_t$ est une application continue de $[0;T]$ vers S^1. Comme χ est à support compact, l'application $t \to a_t^\epsilon$ est donc continue de $[0;T]$ vers S^r, pour tout $r\in\mathbb{R}$. Elle est en particulier continue de $[0;T]$ vers S^0, ce qui fait que $t\to \mathrm{Op}(a_t^\epsilon)$ est continue de $[0;T]$ vers $\mathcal{L}_c(H^s,H^s)$ et entraîne le résultat.
La fonction F est de plus lipschitzienne en v (uniformément en t), de constante de Lipschitz au plus $\sup_{t\in[0;T]} ||\,\mathrm{Op}(a_t^\epsilon)||_{H^s\to H^s}$. On peut donc appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz, qui garantit que l'équation suivante a une et une seule solution maximale :

$$\left\{\begin{array}{ll}\partial_t u &= F(t,u)\\ u(0) &= u_0\end{array}\right. \tag{1}$$

Montrons que la solution maximale est définie sur tout $[0;T]$.
La fonction F vérifie une majoration de la forme :

$$\forall t\in[0;T] \qquad ||F(t,v)|| \le C + D||v||$$

La norme de u, solution maximale de (1), est donc bornée sur son intervalle de définition (par le lemme de Gronwall). D'après le théorème de sortie des compacts, cela entraîne que u est définie sur $[0;T]$ tout entier.
Donc le problème (1), qui est équivalent à celui qu'on cherchait à résoudre, a bien une et une seule solution $u\in\mathcal{C}^1([0;T],H^s)$.

3. L'application $B_\epsilon : b(x,\xi) \in S^0 \to b(x,\xi)\chi(\epsilon\xi) \in S^0$ est continue. De plus, la continuité est uniforme en ϵ : pour toute semi-norme N sur S^0, il existe une semi-norme N' indépendante de ϵ, telles que :

$$\forall b \in S^0, \qquad N(B_\epsilon(b)) \leq C_N N'(b)$$

En effet, on peut se contenter de traiter le cas où :

$$N(b) = \sup_{x,\xi} |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta b(x,\xi)|(1+||\xi||)^{|\beta|}$$

pour certains multi-indices α, β.
Supposons qu'on est dans un tel cas. D'après la formule de Leibniz, $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta [B_\epsilon(b)]$ est une combinaison linéaire de termes de la forme :

$$\epsilon^{|\beta|-|\gamma|} \partial_x^\alpha \partial_\xi^\gamma b(x,\xi) \partial_\xi^{\beta-\gamma} \chi(\epsilon\xi)$$

avec $\gamma \leq \beta$.
Pour $\gamma = \beta$, on a :

$$\sup_{x,\xi} (1+||\xi||)^{|\beta|} \epsilon^{|\beta|-|\gamma|} |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\gamma b(x,\xi)||\partial_\xi^{\beta-\gamma}\chi(\epsilon\xi)| \leq ||\chi||_\infty \sup_{x,\xi} (1+||\xi||)^{|\beta|} |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta b(x,\xi)| \qquad (2)$$

ce qui est une semi-norme de b dans S^0, indépendante de ϵ.
Pour $\gamma \neq \beta$, on remarque que $\partial_\xi^{\beta-\gamma}\chi(\epsilon\xi)$ n'est non-nulle que sur $B(0, 2/\epsilon)$, ce qui entraîne :

$$|\partial_\xi^{\beta-\gamma}\chi(\epsilon\xi)| \leq ||\partial_\xi^{\beta-\gamma}\chi||_\infty \left(\frac{1+2/\epsilon}{1+||\xi||}\right)^{|\beta|-|\gamma|}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
&\sup_{x,\xi} (1+||\xi||)^{|\beta|} \epsilon^{|\beta|-|\gamma|} |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\gamma b(x,\xi)||\partial_\xi^{\beta-\gamma}\chi(\epsilon\xi)| \\
&\leq ||\partial_\xi^{\beta-\gamma}\chi||_\infty \sup_{x,\xi} (1+||\xi||)^{|\gamma|} (\epsilon+2)^{|\beta|-|\gamma|} |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\gamma b(x,\xi)| \\
&\leq ||\partial_\xi^{\beta-\gamma}\chi||_\infty \sup_{x,\xi} (1+||\xi||)^{|\gamma|} 3^{|\beta|-|\gamma|} |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\gamma b(x,\xi)| \qquad (3)
\end{aligned}$$

ce qui est à nouveau une semi-norme de b dans S^0, indépendante de ϵ.
En combinant (2) et (3), on obtient bien que, pour tout b, $N[B_\epsilon(b)]$ est majoré par une semi-norme de b indépendante de ϵ.

La même démonstration permet aussi de montrer que B_ϵ est continue de S^1 vers S^1, uniformément en ϵ.

Puisque $2\,\mathrm{Re}(a_t^\epsilon) = B_\epsilon[2\,\mathrm{Re}(a_t)]$ et puisque $(2\,\mathrm{Re}(a_t))_{t\in[0;T]}$ est bornée dans S^0, on a que $2\,\mathrm{Re}(a_t^\epsilon)$ est bornée dans S^0, uniformément en t et en ϵ.
On admet d'autre part que l'application $c \in S^1 \to c^* - \overline{c} \in S^0$ est continue. Puisque $a_t^\epsilon = B_\epsilon[a_t]$ est uniformément bornée dans S^1 en t et ϵ, $(a_t^\epsilon)^* - \overline{a_t^\epsilon}$ est uniformément bornée dans S^0.

4. C'est un résultat du cours (lemme 5.5). La constante C ne dépend que des semi-normes de $(a_t^\epsilon)^* - \overline{a_t^\epsilon} + 2\,\mathrm{Re}(a_t^\epsilon)$ dans S^0 ; elle est donc indépendante de ϵ.

On applique cette inégalité à u_ϵ :

$$\forall t \in [0;T] \qquad ||u_\epsilon(t)||_{H^s} \leq C||u_0||_{H^s} + C\int_0^T ||f(\tau)||_{H^s} d\tau$$

Donc, pour tout ϵ :

$$||u_\epsilon||_\infty \leq C||u_0||_{H^s} + C\int_0^T ||f(\tau)||_{H^s} d\tau$$

5. Soient ϵ_1, ϵ_2 tels que $\epsilon_1 < \epsilon_2$. On a :

$$\begin{gathered}\partial_t(u_{\epsilon_1} - u_{\epsilon_2}) + \mathrm{Op}(a_t^{\epsilon_1})(u_{\epsilon_1} - u_{\epsilon_2}) = \mathrm{Op}(a_t^{\epsilon_2} - a_t^{\epsilon_1})(u_{\epsilon_2}) \\ (u_{\epsilon_1} - u_{\epsilon_2})(0) = 0\end{gathered}$$

Lemme 1.1. *Pour tout $\eta > 0$, l'opérateur $a_t^\epsilon - a_t$ tend vers 0 uniformément en t dans $S^{1+\eta}$ lorsque $\epsilon \to 0$.*

On ne détaille pas la démonstration du lemme : elle est assez similaire à la démonstration vue à la question 3.
En remplaçant s par $s-2$ dans l'inégalité de la question 4 :

$$\begin{aligned}||u_{\epsilon_1} - u_{\epsilon_2}||_{H^{s-2}} &\leq C\int_0^T ||\,\mathrm{Op}(a_t^{\epsilon_2} - a_t^{\epsilon_1})(u_{\epsilon_2}(t))||_{H^{s-2}} dt \\ &\leq C||\,\mathrm{Op}(a_t^{\epsilon_2} - a_t^{\epsilon_1})||_{H^s \to H^{s-2}} \int_0^T ||u_{\epsilon_2}(t)||_{H^{s-2}} dt \\ &\to 0 \text{ quand } \epsilon_1, \epsilon_2 \to 0\end{aligned}$$

Cela démontre le résultat voulu.
6. Soit fixé un tel σ. Pour tout t :

$$||u_{\epsilon_1}(t) - u_{\epsilon_2}(t)||_{H^\sigma} \leq C(s-2, s)||u_{\epsilon_1}(t) - u_{\epsilon_2}(t)||_{H^{s-2}}^\alpha ||u_{\epsilon_1}(t) - u_{\epsilon_2}(t)||_{H^s}^{1-\alpha}$$

ce qui converge vers 0 uniformément en t lorsque $\epsilon_1, \epsilon_2 \to 0$, d'après les questions 4. et 5.
Puisque $\mathcal{C}^0([0;T], H^\sigma)$ est de Cauchy, on a donc convergence de u_ϵ vers une limite $u \in \mathcal{C}^0([0;T], H^\sigma)$.
De plus, pour tout ϵ :

$$\partial_t u_\epsilon = f - \mathrm{Op}(a_t^\epsilon) u_\epsilon$$

Pour tout $\eta > 0$, a_t^ϵ converge (uniformément en t) vers a_t dans $S^{1+\eta}$ lorsque ϵ tend vers 0. Donc la suite $\mathrm{Op}(a_t^\epsilon)u_\epsilon = \mathrm{Op}(a_t^\epsilon - a_t)u_\epsilon + \mathrm{Op}(a_t)(u_\epsilon - u) + \mathrm{Op}(a_t)u$ est de Cauchy dans $\mathcal{C}^0([0;T], H^{\sigma-1-\eta})$.
On peut donc passer à la limite : $u \in \mathcal{C}^1([0;T], H^{\sigma-1-\eta})$.
En prenant η assez petit et en appliquant ce résultat à $\sigma + \eta$ au lieu de σ, cela montre qu'on a $u \in \mathcal{C}^1([0;T], H^{\sigma-1})$.
7. Comme on l'a dit à la question précédente, $\mathrm{Op}(a_t^\epsilon)$ converge vers $\mathrm{Op}(a_t)$ dans $S^{1+\eta}$, uniformément en t, lorsque ϵ tend vers 0, pour tout $\eta > 0$.
Donc $\mathrm{Op}(a_t^\epsilon)u_\epsilon - \mathrm{Op}(a_t)u = \mathrm{Op}(a_t^\epsilon - a_t)u_\epsilon + \mathrm{Op}(a_t)(u_\epsilon - u)$ tend vers 0 dans $\mathcal{C}^0([0;T], H^{\sigma-1-\eta})$.
De plus, $\partial_t u_\epsilon$ tend vers $\partial_t u$ dans $H^{\sigma-1-\eta}$.

Comme $\partial_t u_\epsilon + \mathrm{Op}(a_t^\epsilon)u_\epsilon = f$, on peut passer cette expression à la limite et on obtient l'égalité suivante :

$$\partial_t u + \mathrm{Op}(a_t)u = f$$

Il reste à montrer que u appartient en fait à $\mathcal{C}^0([0;T], H^s) \cap \mathcal{C}^1([0;T], H^{s-1})$. C'est la même méthode que dans le cours.
On fixe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{C}^0([0;T], H^{s'})$ (pour un certain $s' > s$) qui converge vers f dans $\mathcal{C}^0([0;T], H^s)$. On fixe de même $(u_{0,n})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $H^{s'}$ convergeant vers u_0 dans H^s. Pour tout n, on note u_n la solution de l'équation hyperbolique associée. D'après le résultat qu'on vient de voir, elle est bien définie et appartient à $\mathcal{C}^0([0;T], H^s) \cap \mathcal{C}^1([0;T], H^{s-1})$.
D'après l'estimation d'énergie qu'on a déjà utilisée à la question 4., la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathcal{C}^0([0;T], H^s)$. Elle converge donc dans cet espace ; sa limite est égale à u. Donc $u \in \mathcal{C}^0([0;T], H^s)$.
Puisque $\partial_t u = f - \mathrm{Op}(a_t)u \in \mathcal{C}^0([0;T], H^{s-1})$, on a aussi $u \in \mathcal{C}^1([0;T], H^{s-1})$.

Exercice 2

1. Commençons par démontrer la première inégalité donnée en indication.
Pour tous ξ, η, $||\xi - \eta|| \geq ||\xi||/2$ ou $||\eta|| \geq ||\xi||/2$, à cause de l'inégalité triangulaire.
Dans le premier cas :

$$\begin{aligned}
(1 + ||\xi||^2)^{s/2} &\leq (1 + 4||\xi - \eta||^2)^{s/2} \\
&\leq (4 + 4||\xi - \eta||^2)^{s/2} \\
&= 2^s(1 + ||\xi - \eta||^2)^s \\
&\leq 2^s((1 + ||\xi - \eta||^2)^{s/2} + (1 + ||\eta||^2)^{s/2})
\end{aligned}$$

De même dans le deuxième cas.

Pour l'inégalité de Young, on utilise l'inégalité de Jensen :

$$\begin{aligned}
||u \star v||_{L^p}^p &= \int |u \star v|^p(x) dx \\
&= \int \left| \int u(t)v(x-t)dt \right|^p dx \\
&\leq \int \left(\int |u(t)|\,|v(x-t)|dt \right)^p dx \\
&\leq ||u||_{L^1}^p \int \left(\int \frac{|u(t)|}{||u||_{L^1}} |v(x-t)|dt \right)^p dx \\
&\leq ||u||_{L^1}^p \int \frac{|u(t)|}{||u||_{L^1}} |v(x-t)|^p dt dx \\
&= ||u||_{L^1}^p ||v||_{L^p}^p
\end{aligned}$$

On démontre maintenant l'inégalité demandée.
Pour tout ξ :

$$(1 + ||\xi||^2)^{s/2} |\hat{u} \star \hat{v}|(\xi) \leq \int_{\mathbb{R}^n} (1 + ||\xi||^2)^{s/2} |\hat{u}(\eta)|\,|\hat{v}(\xi - \eta)| d\eta$$

$$
\begin{aligned}
&\leq 2^s \int_{\mathbb{R}^n} (1+||\eta||^2)^{s/2} |\hat{u}(\eta)|\, |\hat{v}(\xi-\eta)| d\eta \\
&\quad + 2^s \int_{\mathbb{R}^n} (1+||\xi-\eta||^2)^{s/2} |\hat{u}(\eta)|\, |\hat{v}(\xi-\eta)| d\eta \\
&= 2^s \left(U \star \hat{v} + \hat{u} \star v \right)
\end{aligned}
$$

où l'on note $U(\xi) = (1+||\xi||^2)^{s/2}\hat{u}(\xi)$ et $V(\xi) = (1+||\xi||^2)^{s/2}\hat{v}(\xi)$.
Donc :

$$
\begin{aligned}
||uv||_{H^s} &= ||(1+||\xi||^2)^{s/2}\widehat{uv}(\xi)||_{L^2} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} ||(1+||\xi||^2)^{s/2} \hat{u} \star \hat{v}(\xi)||_{L^2} \\
&\leq \frac{2^s}{(2\pi)^n} \left(||U \star \hat{v}||_{L^2} + ||\hat{u} \star V||_{L^2} \right) \\
&\leq \frac{2^s}{(2\pi)^n} \left(||U||_{L^2} ||\hat{v}||_{L^1} + ||V||_{L^2} ||\hat{u}||_{L^1} \right) \\
&= \frac{2^s}{(2\pi)^n} \left(||u||_{H^s} ||\hat{v}||_{L^1} + ||v||_{H^s} ||\hat{u}||_{L^1} \right) \\
&\leq \frac{2^s}{(2\pi)^n} \Big(||u||_{H^s} ||(1+||\xi||^2)^{s/2}\hat{v}||_{L^2} ||(1+||\xi||^2)^{-s/2}||_{L^2} \\
&\qquad + ||v||_{H^s} ||(1+||\xi||^2)^{s/2}\hat{u}||_{L^2} ||(1+||\xi||^2)^{-s/2}||_{L^2} \Big) \\
&= \frac{2^{s+1} ||(1+||\xi||^2)^{-s/2}||_{L^2}}{(2\pi)^n} ||u||_{H^s} ||v||_{H^s}
\end{aligned}
$$

2. On utilise le lemme 5.5 du cours (celui de la question 4. de l'exercice 1), combiné avec le résultat de la question 1. (en notant la constante D' plutôt que C) :

$$
\begin{aligned}
\forall t \leq T \qquad ||u_{n+1}(t)||_{H^s} &\leq D||u_0||_{H^s} + D\int_0^t ||u_n^2(\tau)||_{H^s} d\tau \\
&\leq D||u_0||_{H^s} + DD' \int_0^t ||u_n(\tau)||_{H^s}^2 d\tau
\end{aligned}
$$

On en déduit :

$$
\sup_{t\in[0;T]} ||u_{n+1}(t)||_{H^s} \leq D||u_0||_{H^s} + DD'T \left(\sup_{t\in[0;T]} ||u_n(t)||_{H^s} \right)^2 \tag{4}
$$

Dans les égalités précédentes, D est une constante, qu'on peut supposer plus grande que 1. Si $1 - 4D^2D'T||u_0||_{H^s} > 0$, l'équation suivante a deux solutions sur $\mathbb{R}^+$:

$$
x = D||u_0||_{H^s} + DD'Tx^2
$$

Notons x_0 la plus petite des solutions. Alors, par récurrence sur n, $\sup_{t\in[0;T]} ||u_n(t)||_{H^s} \leq x_0$. En effet, c'est vrai pour $n = 0$ car $||u_0||_{H^s} \leq D||u_0||_{H^s} \leq x_0$.

Ensuite, si c'est vrai pour n, c'est vrai pour $n+1$: d'après l'équation (4),

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in[0;T]} ||u_{n+1}(t)||_{H^s} &\leq D||u_0||_{H^s} + DD'T\left(\sup_{t\in[0;T]} ||u_n(t)||_{H^s}\right)^2 \\
&\leq D||u_0||_{H^s} + DD'Tx_0^2 \\
&= x_0
\end{aligned}$$

On a donc démontré que, si $T < \frac{1}{4D^2D'||u_0||_{H^s}}$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathcal{C}^0([0;T], H^s)$. Montrons maintenant que, sous cette condition, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi de Cauchy dans $\mathcal{C}^0([0;T], H^s)$. On utilise :

$$\begin{gathered}
\partial_t(u_{n+1}-u_n) + \mathrm{Op}(a_t)(u_{n+1}-u_n) = u_n^2 - u_{n-1}^2 = (u_n - u_{n-1})(u_n + u_{n-1}) \\
(u_{n+1}-u_n)(0) = 0
\end{gathered}$$

Toujours avec le lemme 5.5, on obtient :

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in[0;T]} ||u_{n+1}(t) - u_n(t)|| &\leq DT \sup_{t\in[0;T]} ||(u_n - u_{n-1})(u_n + u_{n-1})(t)||_{H^s} \\
&\leq DD'T\left(\sup_{t\in[0;T]} ||u_n(t) - u_{n-1}(t)||_{H^s}\right)\left(\sup_{t\in[0;T]} ||u_n(t) + u_{n-1}(t)||_{H^s}\right) \\
&\leq 2x_0DD'T\left(\sup_{t\in[0;T]} ||u_n(t) - u_{n-1}(t)||_{H^s}\right)
\end{aligned}$$

Or $x_0 < \frac{1}{2DD'T}$. Cela se vérifie à partir de l'équation qui définit x_0, en écrivant les solutions. Donc $2x_0DD'T < 1$ et la suite $\left(\sup_{t\in[0;T]} ||u_{n+1}(t) - u_n(t)||\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométriquement décroissante. Cela entraîne que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathcal{C}^0([0;T], H^s)$.
Le fait que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à la fois bornée et de Cauchy entraîne le même résultat pour u_n^2. On a alors que $\partial_t u_n = u_{n-1}^2 - \mathrm{Op}(a_t)u_n$ forme aussi une suite de Cauchy, dans $\mathcal{C}^0([0;T], H^{s-1})$.
Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathcal{C}^0([0;T], H^s) \cap \mathcal{C}^1([0;T], H^{s-1})$.
3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $u \in \mathcal{C}^0([0;T], H^s) \cap \mathcal{C}^1([0;T], H^{s-1})$.
On passe l'équation définissant u_{n+1} à la limite dans $\mathcal{C}^0([0;T], H^{s-1})$:

$$\partial_t u + \mathrm{Op}(a_t)u = u^2$$

On a aussi $u(0) = u_0$ puisque $u_n(0) = u_0$ pour tout n.
Donc u est une solution au problème voulu.