École Normale Supérieure Traitement du signal
9 avril 2015

TD n^{o}8

Corrigé

1. a) $\hat{R}_{x_a} = \hat{R}_X.\hat{g}_a = 1.1_{[-a;a]} = 1_{[-a;a]}$
b) On fait l'hypothèse que N est suffisamment grand pour que la somme finie de l'égalité suivante soit à peu près égale à une somme infinie :

$$\begin{aligned}
\hat{g}_a^f[k] &= \sum_{n=-[N/2]+1}^{[N/2]} g_a[n] e^{-2\pi i \frac{kn}{N}} \\
&\approx \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_a[n] e^{-2\pi i \frac{kn}{N}} \\
&= \hat{g}_a(2\pi k/N) \\
&= 1_{[-a;a]}(2\pi k/N)
\end{aligned}$$

pour tout $k \in \{[-N/2]+1, ..., [-N/2]\}$.
2. a) $\hat{h} = \frac{\hat{R}_{X_a}}{\hat{R}_{X_a} + \hat{R}_Y} = \frac{1}{1+\sigma^2} 1_{[-a;a]}$.
3. c) On vérifie d'abord que $E(Z[0]) = 0$. On remarque aussi que, pour tout k et pour $a \in \{0,1\}$, $P(\epsilon_k = a) = (1-p)^a p^{1-a}$. Pour tout $s \geq 0$:

$$\begin{aligned}
R_Z[s] &= E(Z[0]Z[s]) \\
&= E((-1)^{\epsilon_1 + \ldots + \epsilon_s}) \\
&= \sum_{(\eta_1,\ldots,\eta_s)\in\{0,1\}^s} P(\epsilon_1 = \eta_1, ..., \epsilon_s = \eta_s)(-1)^{\eta_1+\ldots+\eta_s} \\
&= \sum_{(\eta_1,\ldots,\eta_s)\in\{0,1\}^s} (1-p)^{\eta_1+\ldots+\eta_s} p^{1-\eta_1+\ldots+1-\eta_s} (-1)^{\eta_1+\ldots+\eta_s} \\
&= p^s \sum_{(\eta_1,\ldots,\eta_s)\in\{0,1\}^s} \left(\frac{1-p}{p}\right)^{\eta_1+\ldots+\eta_s} (-1)^{\eta_1+\ldots+\eta_s} \\
&= p^s \sum_{(\eta_1,\ldots,\eta_s)\in\{0,1\}^s} \left(-\frac{1-p}{p}\right)^{\eta_1+\ldots+\eta_s} \\
&= p^s \left(1 - \frac{1-p}{p}\right)^s = (2p-1)^s
\end{aligned}$$

On a alors :

$$
\begin{aligned}
\hat{R}_Z[\omega] &= \sum_s R_Z[s] \exp(-is\omega) \\
&= \sum_s (2p-1)^{|s|} e^{-is\omega} \\
&= \sum_{s \geq 0} \left((2p-1)e^{-i\omega}\right)^s + \sum_{s \geq 0} \left((2p-1)e^{i\omega}\right)^s - 1 \\
&= \frac{1}{1-(2p-1)e^{-i\omega}} + \frac{1}{1-(2p-1)e^{i\omega}} - 1 \\
&= \frac{1-(2p-1)^2}{1-2.(2p-1)\cos(\omega)+(2p-1)^2}
\end{aligned}
$$

4. e) Les résultats sont bons pour la première texture, qui est bien modélisée par un processus gaussien. En revanche, la deuxième texture obéit à une loi beaucoup plus compliquée et la modélisation par un processus gaussien n'est plus adaptée.