

TD 8 : Encore des martingales !

Mercredi 7 Novembre

Exercice 1 (Urne de Polya)

À l'instant 0, une urne contient a boules blanches et $b = N_0 - a$ boules rouges. On tire une boule uniformément et on la remplace par deux boules de sa couleur, ce qui donne la composition de l'urne à l'instant 1. On répète ce procédé.

Pour $n \geq 1$, on note Y_n et $X_n = \frac{Y_n}{N_0+n}$ respectivement le nombre et la proportion de boules blanches dans l'urne à l'instant n . Soit $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$.

1. Donner $\mathbb{P}(Y_{n+1} = Y_n + 1 | \mathcal{F}_n)$ et $\mathbb{P}(Y_{n+1} = Y_n | \mathcal{F}_n)$.
2. Montrer que $(X_n)_{n \geq 0}$ est une martingale qui converge p.s. vers une variable aléatoire, que l'on note U , et montrer que pour tout $k \geq 1$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n^k] = \mathbb{E}[U^k]$.
3. Cas $a = b = 1$. Montrer que pour tout $n \geq 0$, Y_n suit une loi uniforme sur $\{1, \dots, n+1\}$. En déduire la loi de U .
4. Cas général. On fixe $k \geq 1$. On pose pour tout $n \geq 1$:

$$Z_n = \frac{Y_n(Y_n + 1) \dots (Y_n + k - 1)}{(N_0 + n)(N_0 + n + 1) \dots (N_0 + n + k - 1)}.$$

Montrer que $(Z_n)_{n \geq 0}$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$. En déduire la valeur de $\mathbb{E}[U^k]$.

5. Montrer que la fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle bornée se développe en série entière sur \mathbb{R} (on exhibera le développement en série entière). Expliquer pourquoi on a caractérisé la loi de U .

Exercice 2 (Processus de Galton–Watson surcritique)

Soit μ une loi sur \mathbb{N} telle que $\sum_i i\mu(i) = m > 1$ et $\sum_i i^2\mu(i) < +\infty$. Soient $(Z_{n,i})_{n,i \in \mathbb{N}}$ des variables i.i.d. de loi μ . On définit le processus X par $X_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 0$,

$$X_{n+1} = \sum_{i=1}^{X_n} Z_{n,i}.$$

1. Que peut décrire le processus X ?
2. On pose $p_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$ et $p = \mathbb{P}(\exists n, X_n = 0)$. Montrer une formule de récurrence de la forme $p_{n+1} = f(p_n)$, et en déduire que $p < 1$.
3. On pose $M_n = m^{-n}X_n$. Montrer que M est une martingale. En déduire que M_n converge p.s. vers une variable M_∞ .
4. Trouver une relation de récurrence sur $\mathbb{E}[M_n^2]$, et en déduire que $M_n \rightarrow M_\infty$ dans L^2 .
5. On note $q = \mathbb{P}(M_\infty = 0)$. Donner une équation sur q . En déduire que $q = p$. Qu'est-ce que cela signifie sur la croissance de X_n ?

Exercice 3 (Modèle de Wright-Fisher)

Un gène a deux allèles α et β . On considère une population qui se renouvelle entièrement à chaque génération, le nombre d'individus restant fixe et égal à $n \geq 2$. On suppose que pour tout $k \geq 0$, à la génération $k + 1$, chacun des n individus choisit son parent uniformément parmi les n individus de la génération k , indépendamment les uns des autres. On note X_k le nombre d'individus portant l'allèle α à la génération k , et $\mathcal{F}_k = \sigma(X_0, \dots, X_k)$. On suppose $X_0 = a \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$.

1. Quelle est la loi de X_{k+1} conditionnellement à \mathcal{F}_k ? En déduire que X est une martingale pour $(\mathcal{F}_k)_{k \geq 0}$.
2. Montrer que X converge p.s. vers une variable X_∞ , et donner sa loi.
On pose $\tau = \inf\{k | X_k = X_\infty\}$.
3. Calculer $\mathbb{E}[X_{k+1}(n - X_{k+1}) | \mathcal{F}_k]$ et trouver une martingale.
4. En déduire un encadrement de $\mathbb{E}[\tau]$. On pourra par exemple montrer

$$\mathbb{E}[\tau] = O(n \ln n).$$

Exercice 4 (Une preuve de la loi forte des grands nombres)

Soit $(Z_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. On suppose que $\mathbb{E}[Z_n] = 0$ pour tout $n \geq 1$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{\text{Var}(Z_n)}{n^2} < +\infty$. On pose, pour $n \geq 1$,

$$M_n = \sum_{j=1}^n \frac{Z_j}{j} \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{j=1}^n Z_j.$$

1. Montrer que M_n converge p.s. quand n tend vers $+\infty$.
2. En exprimant S en fonction de M , en déduire $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} 0$.
3. Soit X une variable aléatoire telle que $\mathbb{E}[X] = 0$. On considère une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires i.i.d. de même loi que X . Pour tout $n \geq 1$, on pose $Y_n = X_n \mathbb{1}_{|X_n| \leq n}$. Montrer que :
 - (i) $\mathbb{E}[Y_n] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}[X]$,
 - (ii) $\mathbb{P}(\exists n \geq 1, \forall j \geq n, X_j = Y_j) = 1$,
 - (iii) $\sum_{n \geq 1} \frac{\text{Var}(Y_n)}{n^2} < +\infty$.
4. En déduire la loi forte des grands nombres.

Exercice 5

Que représente la jolie image ci-dessous ?

