Processus aléatoires
ENS Paris, 2018-2019

Thomas Budzinski
Bureau V2
thomas.budzinski@ens.fr

TD 8 : Encore des martingales ! Corrigé

Mercredi 7 Novembre

Exercice 1 (Urne de Polya)
À l'instant 0, une urne contient a boules blanches et $b = N_0 - a$ boules rouges. On tire une boule uniformément et on la remplace par deux boules de sa couleur, ce qui donne la composition de l'urne à l'instant 1. On répète ce procédé.

Pour $n \geq 1$, on note Y_n et $X_n = \frac{Y_n}{N_0+n}$ respectivement le nombre et la proportion de boules blanches dans l'urne à l'instant n. Soit $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$.

1. Donner $\mathbb{P}(Y_{n+1} = Y_n + 1 | \mathcal{F}_n)$ et $\mathbb{P}(Y_{n+1} = Y_n | \mathcal{F}_n)$.
2. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale qui converge p.s. vers une variable aléatoire, que l'on note U, et montrer que pour tout $k \geq 1$, on a $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n^k] = \mathbb{E}[U^k]$.
3. *Cas $a = b = 1$.* Montrer que pour tout $n \geq 0$, Y_n suit une loi uniforme sur $\{1, ..., n+1\}$. En déduire la loi de U.
4. *Cas général.* On fixe $k \geq 1$. On pose pour tout $n \geq 1$:
$$Z_n = \frac{Y_n(Y_n+1)\dots(Y_n+k-1)}{(N_0+n)(N_0+n+1)\dots(N_0+n+k-1)} .$$
Montrer que $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une martingale pour la filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geq 0}$. En déduire la valeur de $\mathbb{E}[U^k]$.
5. Montrer que la fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle bornée se développe en série entière sur $\mathbb{R}$ (on exhibera le développement en série entière). Expliquer pourquoi on a caractérisé la loi de U.

<u>*Solution de l'exercice 1*</u>

1. On a
$$\mathbb{P}(Y_{n+1} = Y_n + 1 | \mathscr{F}_n) = \mathbb{P}\left(\text{la } n^{\text{ième}} \text{ boule tirée est blanche} | \mathscr{F}_n\right) = X_n,$$
et de même
$$\mathbb{P}(Y_{n+1} = Y_n | \mathscr{F}_n) = 1 - X_n .$$
2. Pour tout $n \geq 1$, la variable X_n est $\mathscr{F}_n$-mesurable, $X_n \in [0,1]$ donc est intégrable et, d'après la question précédente,
$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathscr{F}_n] = \frac{Y_n+1}{N_0+n+1}X_n + \frac{Y_n}{N_0+n+1}(1-X_n) = \frac{X_n+Y_n}{N_0+n+1} = X_n ,$$
donc $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale. Elle est de plus bornée dans L^∞, donc dans L^k pour tout k, donc elle converge p.s. et dans L^k pour tout k vers une variable U. On a donc bien
$$\mathbb{E}[X_n^k] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[U^k].$$

3. On raisonne par récurrence sur n. L'initialisation à $n=0$ est immédiate. Soit $n \geq 1$ et supposons que la loi de Y_{n-1} est la loi uniforme sur $\{1,...,n\}$. Soit aussi $k \geq 2$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y_n = k) &= \mathbb{P}(Y_n = k \text{ et } Y_{n-1} = k) + \mathbb{P}(Y_n = k \text{ et } Y_{n-1} = k-1) \\
&= \mathbb{P}(Y_{n-1} = k)\mathbb{P}(Y_n = k | Y_{n-1} = k) + \mathbb{P}(Y_{n-1} = k-1)\mathbb{P}(Y_n = k | Y_{n-1} = k-1) \\
&= \frac{\mathbb{P}(\text{la } n\text{-ième boule prise est rouge } | Y_{n-1} = k)}{n} \\
&\quad + \frac{\mathbb{P}(\text{la } n\text{-ième boule prise est blanche} | Y_{n-1} = k-1)}{n} \\
&= \frac{1}{n} \cdot \frac{n+1-k}{n+1} + \frac{1}{n} \cdot \frac{k-1}{n+1} = \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\mathbb{P}(Y_n = 1) = \mathbb{P}(\text{les } n \text{ boules tirées sont rouges}) = \frac{1}{2}\frac{2}{3} \cdots \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

On en déduit que Y_n suit bien une loi uniforme sur $\{1,...,n+1\}$.
Il en découle que X_n suit une loi uniforme sur $\{1/(n+2), 2/(n+2), ..., (n+1)/(n+2)\}$ pour tout $n \geq 0$. Or (X_n) converge p.s. donc en loi vers U, donc U suit une loi uniforme sur $[0,1]$.

4. Pour tout $n \geq 0$, la variable Z_n est $\mathscr{F}_n$-mesurable et $Z_n \in [0,1]$ donc est intégrable, et

$$Z_{n+1} = \begin{cases} \frac{Y_n \dots (Y_n+k-1)}{(N_0+n+1)(N_0+n+2)\dots(N_0+n+k)} & \text{si } \; Y_{n+1} = Y_n \\ \frac{(Y_n+1)\dots(Y_n+k)}{(N_0+n+1)(N_0+n+2)\dots(N_0+n+k)} & \text{si } \; Y_{n+1} = Y_n + 1 \end{cases}$$

ou encore

$$Z_{n+1} = \begin{cases} Z_n \cdot \frac{N_0+n}{N_0+n+k} & \text{si } \; Y_{n+1} = Y_n \\ Z_n \cdot \frac{N_0+n}{N_0+n+k} \cdot \frac{Y_n+k}{Y_n} & \text{si } \; Y_{n+1} = Y_n + 1 \end{cases}.$$

Le calcul pour en déduire (en utilisant la question 1) que (Z_n) est bien une martingale est laissé en exercice.
En particulier, pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{E}[Z_n] = \mathbb{E}[Z_0] = \frac{a(a+1)\cdots(a+k-1)}{N_0(N_0+1)\cdots(N_0+k-1)}$$

car $Y_0 = a$ (il y a a boules blanches à l'instant initial). De plus, on a $Y_n = Un + o(n)$ p.s. et, pour toute suite (y_n) et tout réel u tels que $y_n = un + o(n)$, on a

$$\frac{y_n(y_n+1)\dots(y_n+k-1)}{N_0+n(N_0+n+1)\dots(N_0+n+k-1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} u^k,$$

donc Z_n converge p.s. vers U^k. Comme $Z_n \in [0,1]$ pour tout n, on en déduit par convergence dominée que

$$\mathbb{E}[U^k] = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[Z_n] = \mathbb{E}[Z_0] = \frac{a(a+1)\cdots(a+k-1)}{(a+b)(a+b+1)\cdots(a+b+k-1)}.$$

5. Soit X une v.a. réelle bornée et $c > 0$ telle que $|X| \leq c$ p.s. Soit ϕ_X la fonction caractéristique de X, i.e., pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$. On a, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \mathbb{E}\left[\sum_{n\geq 0} \frac{(itX)^n}{n!}\right] = \sum_{n\geq 0} \frac{(it)^n}{n!}\mathbb{E}[X^n],$$

où l'interversion est justifiée par le théorème de Fubini :

$$\sum_{n\geq 0}\left|\frac{(it)^n}{n!}\right|\mathbb{E}[|X|^n] \leq \sum_{n\geq 0}\frac{|t|^n}{n!}c^n = e^{c|t|} < +\infty.$$

Comme U est à valeurs dans $[0,1]$, sa fonction caractéristique ϕ_U se développe en série entière sur $\mathbb{R}$ comme décrit ci-dessus. Les $\mathbb{E}[U^k]$ pour $k \geq 1$ décrivent donc complètement la fonction caractéristique de U, qui elle même caractérise la loi de U.

Remarque Plus précisément, la loi de U est la loi $\beta(a,b)$ de densité

$$\frac{1}{B(a,b)}u^{a-1}(1-u)^{b-1}\mathbb{1}_{[0,1]}(u)$$

par rapport à la mesure de Lebesgue. Il suffit pour le vérifier de calculer les moments de la loi $\beta(a,b)$ (intégration par parties par exemple) et de vérifier qu'ils coïncident avec le résultat de la question 4, ce qui est laissé en exercice au lecteur courageux (ou muni d'un logiciel de calcul).

Exercice 2 (Processus de Galton–Watson surcritique)
Soit μ une loi sur $\mathbb{N}$ telle que $\sum_i i\mu(i) = m > 1$ et $\sum_i i^2\mu(i) < +\infty$. Soient $(Z_{n,i})_{n,i\in\mathbb{N}}$ des variables i.i.d. de loi μ. On définit le processus X par $X_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 0$,

$$X_{n+1} = \sum_{i=1}^{X_n} Z_{n,i}.$$

1. Que peut décrire le processus X ?
2. On pose $p_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$ et $p = \mathbb{P}(\exists n, X_n = 0)$. Montrer une formule de récurrence de la forme $p_{n+1} = f(p_n)$, et en déduire que $p < 1$.
3. On pose $M_n = m^{-n}X_n$. Montrer que M est une martingale. En déduire que M_n converge p.s. vers une variable M_∞.
4. Trouver une relation de récurrence sur $\mathbb{E}[M_n^2]$, et en déduire que $M_n \to M_\infty$ dans L^2.
5. On note $q = \mathbb{P}(M_\infty = 0)$. Donner une équation sur q. En déduire que $q = p$. Qu'est-ce-que cela signifie sur la croissance de X_n ?

Solution de l'exercice 2

1. Supposons qu'une population évolue de la manière suivante : à chaque génération n, les individus se reproduisent indépendamment des générations précédentes et les uns des autres, de telle manière que le nombre d'enfants d'un individu a pour loi μ. Alors le processus X décrit le nombre d'individus à la génération n.
2. Dire que $p_{n+1} = 0$ revient à dire qu'il existe i tel que le premier individu a eu i enfants (ce qui arrive avec proba $\mu(i)$), et chacun de ces i enfants n'a pas de descendant à la génération n (ce qui arrive avec proba p_n pour chaque enfant). Par conséquent, on a

$$p_{n+1} = \sum_i \mu(i)p_n^i = f(p_n),$$

avec $f(x) = \sum_i \mu(i)x^i$. On sait de plus que $p = \lim_{n\to+\infty} p_n$, donc p est un point fixe de f. De plus, f est croissante (les $\mu(i)$ sont positifs), donc si p' est un point fixe de f, on a par récurrence $p_n \leq p'$ pour tout n, donc $p \leq p'$. On en déduit que p est le plus petit point fixe de f, donc montrer que $p < 1$ revient à montrer que f admet un point fixe strictement inférieur à 1. Or, on a $f(1) = 1$ et $f'(1) = m > 1$, donc $f(x) < x$ pour x assez proche de 1. Mais on a aussi $f(0) \geq 0$, donc par le théorème des valeurs intermédiaires f admet un point fixe dans $[0,1[$, donc $p < 1$.

3. Soit $\mathscr{F}_n$ la tribu engendrée par les $Z_{k,i}$ pour $k \leq n-1$. Alors X_n ne dépend que des $Z_{k,i}$ avec $k \leq n-1$ et $i \in \mathbb{N}$, donc X est $(\mathscr{F}_n)$-adapté, donc M aussi. De plus, comme M est positif, on peut faire le calcul suivant sans savoir si M_n et M_{n+1} sont intégrables :
$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[M_{n+1}|\mathscr{F}_n\right] &= m^{-(n+1)}\mathbb{E}\left[X_{n+1}|\mathscr{F}_n\right] \\ &= m^{-(n+1)}\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{X_n} Z_{n,i}\middle|\mathscr{F}_n\right] \\ &= m^{-(n+1)}\sum_{i=1}^{X_n}\mathbb{E}\left[Z_{n,i}|\mathscr{F}_n\right] \\ &= m^{-(n+1)}\sum_{i=1}^{X_n} m \\ &= m^{-(n+1)} m X_n \\ &= M_n. \end{aligned}$$
En particulier, on en déduit que $\mathbb{E}[M_n] = \mathbb{E}[M_0] < +\infty$ pour tout n, et M est une martingale positive, donc elle converge p.s..
4. Notons σ^2 la variance de la loi μ. Pour tout n, on a
$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[M_{n+1}^2|\mathscr{F}_n\right] &= m^{-2(n+1)}\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{X_n} Z_{n,i}\right)^2\middle|\mathscr{F}_n\right] \\ &= m^{-2(n+1)}\sum_{i,j=1}^{X_n}\mathbb{E}\left[Z_{n,i}Z_{n,j}\right] \\ &= m^{-2(n+1)}\left(\sum_{i=1}^{X_n}\mathbb{E}\left[Z_{n,i}^2\right] + \sum_{i\neq j}\mathbb{E}\left[Z_{n,i}\right]\mathbb{E}\left[Z_{n,j}\right]\right) \\ &= m^{-2(n+1)}\left((m^2+\sigma^2)X_n + m^2 X_n(X_n-1)\right) \\ &= M_n^2 + \frac{\sigma^2}{m^{2(n+1)}}M_n. \end{aligned}$$
En prenant l'espérance des deux côtés, on obtient
$$\mathbb{E}\left[M_{n+1}^2\right] = \mathbb{E}\left[M_n^2\right] + \frac{\sigma^2}{m^{2(n+1)}}\mathbb{E}\left[M_n\right] = \mathbb{E}\left[M_n^2\right] + \frac{\sigma^2}{m^{n+2}}.$$
Comme $\sum_n \frac{\sigma^2}{m^{n+2}} < +\infty$, on en déduit que $\mathbb{E}\left[M_n^2\right]$ est borné, donc M est bornée dans L^2, donc elle converge dans L^2.
5. On dit qu'un individu x est à *descendance lente* si le nombre de descendants de x après n générations est $o(m^n)$. En particulier, un individu dont la descendance s'éteint est à descendance lente, et q est la probabilité que l'individu de départ soit à descendance lente.

   Dire que l'individu de départ a une descendance lente revient à dire qu'il existe i tel qu'il a i enfants, et chacun d'eux a une descendance lente. De même que dans la question 2, la probabilité que cela arrive vaut $\sum_i \mu(i)q^i = f(q)$, donc $q = f(q)$. Or, μ est une série entière à coefficients positifs, et il y a au moins un $i \geq 2$ tel que $\mu(i) > 0$, donc f est strictement convexe, donc elle a au plus deux points fixes. Comme p et 1 sont deux points fixes de f, on a donc soit $q = p$, soit $q = 1$. Mais dans le second cas, on a $M_\infty = 0$ p.s.. C'est absurde car M_n converge vers M_∞ dans L^2, donc aussi dans L^1, et $\mathbb{E}[M_n] = \mathbb{E}[M_0] = 1$ pour tout n. On a donc $q = p$. Cela signifie que presque sûrement, soit le processus X s'éteint, soit X_n est asymptotiquement équivalent à m^n fois une variable aléatoire strictement positive.

Remarque On a utilisé la convergence L^2 pour montrer une convergence L^1. Il est naturel de se demander si la convergence L^1 de M reste vraie si μ n'est plus de carré intégrable. Le théorème de Kesten–Stigum affirme que M converge dans L^1 vers M_∞ si et seulement si

$$\sum_i i \log i \, \mu(i) < +\infty.$$

Pour une preuve du théorème de Kesten–Stigum, voir par exemple le chapitre 12.2 du monumental Probability on trees and networks, de Lyons et Peres.

Exercice 3 (Modèle de Wright-Fisher)
Un gène a deux allèles α et β. On considère une population qui se renouvelle entièrement à chaque génération, le nombre d'individus restant fixe et égal à $n \geq 2$. On suppose que pour tout $k \geq 0$, à la génération $k+1$, chacun des n individus choisit son parent uniformément parmi les n individus de la génération k, indépendamment les uns des autres. On note X_k le nombre d'individus portant l'allèle α à la génération k, et $\mathscr{F}_k = \sigma(X_0, \ldots, X_k)$. On suppose $X_0 = a \in [\![1, n-1]\!]$.

1. Quelle est la loi de X_{k+1} conditionnellement à $\mathscr{F}_k$? En déduire que X est une martingale pour $(\mathscr{F}_k)_{k\geq 0}$.
2. Montrer que X converge p.s. vers une variable X_∞, et donner sa loi.
   On pose $\tau = \inf\{k | X_k = X_\infty\}$.
3. Calculer $\mathbb{E}\left[X_{k+1}(n - X_{k+1}) | \mathscr{F}_k\right]$ et trouver une martingale.
4. En déduire un encadrement de $\mathbb{E}[\tau]$. On pourra par exemple montrer

$$\mathbb{E}[\tau] = O(n \ln n).$$

Solution de l'exercice 3

1. Conditionnellement à $\mathscr{F}_k$, chaque individu de la génération porte l'allèle α avec probabilité $\frac{X_k}{n}$, indépendamment les uns des autres, donc X_{k+1} suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{X_k}{n}$. On en déduit $\mathbb{E}[X_{k+1} | \mathscr{F}_k] = n \times \frac{X_k}{n} = X_k$. De plus, le processus X est bien intégrable et adapté, donc X est bien une martingale.
2. La martingale X est bornée par n, donc elle converge p.s. et dans L^1 vers une variable X_∞. On va maintenant montrer que $X_\infty \in \{0, n\}$ p.s. Soit $j \in [\![1, n-1]\!]$. Pour tout k, on pose

$$q = \mathbb{P}\left(X_{k+1} = j | X_k = j\right) = \binom{n}{j} \left(\frac{j}{n}\right)^j \left(1 - \frac{j}{n}\right)^{n-j} < 1.$$

   On a pour tout $\ell \geq 0$:

$$\mathbb{P}\left(X_k = X_{k+1} = \cdots = X_{k+\ell} = j\right) = \mathbb{P}\left(X_k = j\right) \prod_{i=0}^{\ell-1} \mathbb{P}\left(X_{k+i+1=j} | X_{k+i=j}\right) \leq q^\ell \xrightarrow[\ell \to +\infty]{} 0.$$

   On en déduit $\mathbb{P}\left(\forall i \geq k, X_i = j\right) = 0$ pour tous $j \in [\![1, n-1]\!]$ et $k \geq 0$, donc $\mathbb{P}\left(X_\infty = j\right) = 0$ (comme X est à valeurs entières et converge, elle est constante à partir d'un certain rang). On a donc $X_\infty \in \{0, n\}$ p.s. De plus, par convergence L^1 on a $\mathbb{E}\left[X_\infty\right] = \mathbb{E}[X_0] = a$, donc $\mathbb{P}\left(X_\infty = 0\right) = 1 - \frac{a}{n}$ et $\mathbb{P}\left(X_\infty = n\right) = \frac{a}{n}$.
3. On sait que l'espérance et la variance d'une variable de loi binomiale de paramètres n et p valent respectivement pn et $p(1-p)n$. On obtient donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{k+1}(n - X_{k+1}) | \mathscr{F}_k] &= n\mathbb{E}[X_{k+1} | \mathscr{F}_k] - \mathbb{E}[X_{k+1} | \mathscr{F}_k]^2 - \mathrm{Var}(X_{k+1} | \mathscr{F}_k) \\ &= nX_k - X_k^2 - \frac{1}{n} X_k(n - X_k) = \frac{n-1}{n} X_k(n - X_k). \end{aligned}$$

   On en déduit que $\left(\left(\frac{n}{n-1}\right)^k X_k(n - X_k)\right)_{k \geq 0}$ est une martingale, qu'on note M.

4. Soit $k \geq 0$. Si $\tau > k$, alors $1 \leq X_k \leq n-1$ donc $X_k(n-X_k) \geq n-1$ donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\tau \geq k+1) &= \mathbb{P}(X_k(n-X_k) \geq n-1) \\
&= \mathbb{P}\left(M_k \geq (n-1)\left(\frac{n}{n-1}\right)^k\right) \\
&\leq \frac{1}{n-1}\left(\frac{n-1}{n}\right)^k \mathbb{E}[M_k] \\
&= \frac{1}{n-1}\left(\frac{n-1}{n}\right)^k \mathbb{E}[M_0] \\
&\leq \frac{n^2}{4(n-1)}\left(1-\frac{1}{n}\right)^k.
\end{aligned}$$

On a donc $\mathbb{P}(\tau \geq k+1) \leq 1 \wedge \frac{n^2}{4(n-1)}\left(1-\frac{1}{n}\right)^k$. On a $\frac{n^2}{4(n-1)}\left(1-\frac{1}{n}\right)^k = 1$ pour $k \approx n \ln n$. On écrit donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\tau] &= \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}(\tau \geq k+1) \\
&\leq \sum_{k=0}^{\lfloor n\ln n\rfloor} 1 + \sum_{k=1+\lfloor n\ln n\rfloor}^{+\infty} \frac{n^2}{4(n-1)}\left(1-\frac{1}{n}\right)^k \\
&\leq n\ln n + 1 + \frac{n^2}{4(n-1)} n \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n\ln n} \\
&\leq n\ln n + 1 + \frac{n^3}{4(n-1)} \exp\left(-\frac{1}{n} n \ln n\right) \\
&= n\ln n + O(n).
\end{aligned}$$

Par ailleurs, pour tout $k \geq 0$ on a $X_k(n-X_k) \leq \mathbb{1}_{\tau>k}\frac{n^2}{4}$ donc

$$a(n-a) = \mathbb{E}[M_k] \leq \frac{n^2}{4}\left(\frac{n}{n-1}\right)^k \mathbb{P}(\tau > k).$$

On en déduit

$$\mathbb{E}[\tau] = \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}(\tau \geq k+1) \geq \frac{4}{n^2} a(n-a) \sum_{k\geq 0}\left(1-\frac{1}{n}\right)^k = \frac{4a(n-a)}{n}.$$

Par exemple, on prenant $a = \frac{n}{2}$, on obtient $\mathbb{E}[\tau] \geq (1+o(1))n$.

Remarque On peut montrer qu'en faisant tendre a et n vers $+\infty$ avec $\frac{a}{n} \to x$, on a

$$\mathbb{E}[\tau] \sim -2(x\ln x + (1-x)\ln(1-x))n.$$

Voir par exemple ce lien (pages 4 et 5) pour une explication heuristique.

Exercice 4 (Une preuve de la loi forte des grands nombres)
Soit $(Z_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. On suppose que $\mathbb{E}[Z_n] = 0$ pour tout $n \geq 1$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{\mathrm{Var}(Z_n)}{n^2} < +\infty$. On pose, pour $n \geq 1$,

$$M_n = \sum_{j=1}^n \frac{Z_j}{j} \qquad \text{et} \qquad S_n = \sum_{j=1}^n Z_j\,.$$

1. Montrer que M_n converge p.s. quand n tend vers $+\infty$.

2. En exprimant S en fonction de M, en déduire $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} 0$.
3. Soit X une variable aléatoire telle que $\mathbb{E}[X] = 0$. On considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires i.i.d. de même loi que X. Pour tout $n \geq 1$, on pose $Y_n = X_n \mathbb{1}_{|X_n|\leq n}$. Montrer que :
(i) $\mathbb{E}[Y_n] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[X]$,
(ii) $\mathbb{P}\left(\exists n \geq 1, \forall j \geq n, X_j = Y_j\right) = 1$,
(iii) $\sum_{n\geq 1} \frac{\mathrm{Var}(Y_n)}{n^2} < +\infty$.
4. En déduire la loi forte des grands nombres.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u>

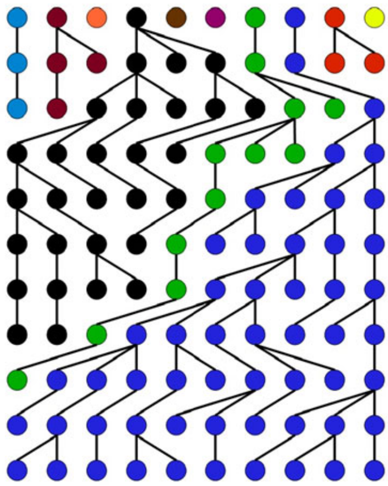
1. Comme les X_i sont d'espérance nulle, on vérifie facilement que M est une martingale. De plus, par indépendance des X_i, pour tout n on a
$$\mathbb{E}[M_n^2] = \mathrm{Var}(M_n) = \sum_{i=j}^{n} \mathrm{Var}\left(\frac{Z_j}{j}\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\mathrm{Var}(Z_j)}{j^2},$$
qui est bornée par l'hypothèse sur les variances. La martingale M est donc bornée dans L^2, donc elle converge p.s. vers une variable M_∞.
2. Pour tout $n \geq 1$, on a
$$\frac{S_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} j(M_j - M_{j-1}) = \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n} jM_j - \sum_{j=1}^{n-1}(j+1)M_j\right) = M_n - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} M_j.$$
D'après le lemme de Cesaro, le membre de droite tend vers 0, d'où $\frac{S_n}{n} \to 0$ p.s.
3. (i) On a $\mathbb{E}[Y_n] = \mathbb{E}[X\mathbb{1}_{|X|\leq n}]$, avec $X\mathbb{1}_{|X|\leq n} \to X$ p.s. et $|X\mathbb{1}_{|X|\leq n}| \leq |X|$, donc $\mathbb{E}[Y_n] \to \mathbb{E}[X] = 0$ par convergence dominée.
(ii) Pour tout $j \geq 1$, on a $\mathbb{P}(X_j \neq Y_j) = \mathbb{P}(|X_j| > j) = \mathbb{P}(|X| > j)$ donc
$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_j \neq Y_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X| > j) \leq \int_0^\infty \mathbb{P}(|X| > t)\,\mathrm{d}t = \mathbb{E}[|X|] < +\infty,$$
donc d'après le lemme de Borel-Cantelli, p.s., $X_j = Y_j$ pour j assez grand.
(iii) Enfin, on a
$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Var}(Y_n)}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}[Y_n^2]}{n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[\frac{|X|^2}{n^2}\mathbb{1}_{|X|\leq n}\right] = \mathbb{E}\left[|X|^2 \sum_{n\geq 1\vee|X|} \frac{1}{n^2}\right] \\ &\leq \mathbb{E}\left[|X|^2 \frac{c}{|X|}\right] = c\mathbb{E}[|X|] < +\infty,\end{aligned}$$
en utilisant à la fin $\sum_{n\geq 1\vee a} \frac{1}{n^2} = O\left(\frac{1}{a}\right)$.
4. On se place dans le cadre de la question 3. Pour tout $n \geq 1$, posons $Z_n = Y_n - \mathbb{E}[Y_n]$. On a $\mathrm{Var}(Z_n) = \mathrm{Var}(Y_n)$ pour tout $n \geq 0$ donc $(Z_n)_{n\geq 1}$ vérifie les hypothèses des questions 1 et 2, donc
$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(Y_j - \mathbb{E}[Y_j]) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} 0\,.$$
Or $\mathbb{E}[Y_n] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[X] = 0$, donc d'après le lemme de Cesaro on a
$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}[Y_j] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_j \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} 0.$$

Enfin, p.s., il existe $J \geq 1$ tel que $Y_j = X_j$ pour tout $j \geq J$. On a alors

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j \; = \; \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{J-1} X_j + \frac{1}{n}\sum_{j\geq J} Y_j \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

ce qui achève la démonstration.

Exercice 5
Que représente la jolie image ci-dessous ?



<u>*Solution de l'exercice 5*</u> Il s'agit d'une illustration du modèle de Wright–Fisher, mais où les individus de départ sont tous différents (et pas seulement de 2 types). Les générations les plus anciennes sont vers le haut, et chaque individu de la génération $k+1$ est relié à son parent dans la génération k. Image issue d'un article de Bastien Mallein sur Culture Math.