TD 9 – Lois de variables aléatoires

1 – Lois de variables aléatoires

Exercice 1. Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on se donne (X, Y) une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

1. Soit $\lambda, \mu > 0$. On suppose que la loi de (X, Y) est
$$\lambda\mu e^{-\lambda x - \mu y} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^2}(x, y)\,dx\,dy.$$
Déterminer la loi de la variable aléatoire $U = \min(X, Y)$.
2. On suppose que la loi de (X, Y) est
$$\frac{1}{4\pi} e^{-x/2} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \mathbb{1}_{[0,2\pi]}(y)\,dx\,dy.$$
Déterminer la loi de la variable aléatoire $(\sqrt{X}\cos(Y), \sqrt{X}\sin(Y))$.

Exercice 2. Soient X, Y et Z des variables aléatoires réelles définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. On suppose que $X = Y$ p.s. (c'est-à-dire $\mathbb{P}$ presque partout). Montrer que X et Y ont la même loi. Montrer que la réciproque est fausse.
2. On suppose que X et Y ont la même loi.
   (a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne. Montrer que les variables aléatoires $f(X)$ et $f(Y)$ ont la même loi.
   (b) Montrer que les variables aléatoires XZ et YZ n'ont pas nécessairement la même loi.

2 – Probabilités discrètes

Exercice 3. On répartit au hasard r boules dans n cases. Soit $r_1, \dots, r_n$ des entiers tels que $r_1 + \cdots + r_n = r$.

1. Expliciter les espaces de probabilités décrivant cette expérience et calculer la probabilité d'obtenir r_1 boules dans la case $1, \dots, r_n$ boules dans la case n, pour chacun des modèles suivants :
   (a) On suppose que toutes les configurations de boules sont possibles et équiprobables. Cette distribution s'appelle *statistique de Maxwell-Boltzmann*.
   (b) On suppose que toutes les configurations possibles pour les nombres de boules dans chaque case sont équiprobables. Cette distribution s'appelle *statistique de Bose-Einstein*.
   (c) On suppose qu'il ne peut y avoir plus d'une boule dans chaque case et que toutes les configurations de boules autorisées sont équiprobables. Cette distribution s'appelle *statistique de Fermi-Dirac*.

Pour toute question, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à michel.pain@ens.fr, ou bien à venir me voir au bureau V2.

Ces trois modèles sont utilisés en physique statistique (avec des particules à la place des boules), la pertinence d'un modèle est liée au type de particules étudiées et aux résultats expérimentaux.

2. Quelle est la probabilité que parmi r personnes, au moins deux personnes aient leur anniversaire le même jour ?
3. Supposons que dans une grande ville, il arrive r accidents durant une semaine. Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins un accident chaque jour de la semaine ?
4. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. Combien de dérivées partielles d'ordre r différentes admet-t-elle ?
5. Un livre contient n symboles et il y a r coquilles. Quel modèle choisiriez–vous pour la loi des coquilles ?

3 – Compléments (hors TD)

Exercice 4. (*Tribu engendrée par une variable aléatoire*) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités et X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On note

$$\sigma(X) := \{X^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}.$$

1. Montrer que $\sigma(X)$ est la plus petite tribu $\mathcal{A}$ sur Ω telle que X soit mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. La tribu $\sigma(X)$ est appelée la *tribu engendrée par la variable aléatoire* X.
2. Soit Y une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ qui soit $\sigma(X)$-mesurable, i.e. Y est une application mesurable de $(\Omega, \sigma(X))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Montrer qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ borélienne telle que $Y = f(X)$.
3. Expliciter $\sigma(X)$ et la loi de X dans les cas suivants (λ est la mesure de Lebesgue) :
   (a) $X := a1_A + b1_B$, où $A, B \in \mathcal{F}$ et $a, b \in \mathbb{R}^*$.
   (b) $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) := ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ et, pour tout $\omega \in [0,1]$,
   $$X(\omega) := \begin{cases} 2\omega & \text{si } 0 \le \omega \le 1/2, \\ 1 & \text{si } 1/2 \le \omega \le 1. \end{cases}$$
   (c) $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) := ([-1,1], \mathcal{B}([-1,1]), \lambda/2)$ et $X(\omega) = \omega^2$ pour $\omega \in [0,1]$.

Exercice 5. On considère une source lumineuse ponctuelle située au point $(-1,0)$ dans le plan. Soit θ une variable aléatoire définie sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, uniforme sur $]-\pi/2, \pi/2[$. On suppose que la source émet un rayon lumineux en direction de l'axe des ordonnées en faisant un angle θ avec l'axe des abscisses. Déterminer la loi de l'ordonnée du point d'impact du rayon avec l'axe des ordonnées.

Exercice 6. Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on se donne une variable aléatoire N à valeurs dans $\mathbb{R}$ de loi $(\sqrt{2\pi})^{-1} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x$. Calculer la loi de la variable aléatoire $1/N^2$.

Exercice 7. Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on se donne $(X_1, \dots, X_n)$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ de loi

$$\mathbb{1}_{[0,1]^n}(x_1, \dots, x_n)\,\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n.$$

1. Construire, à l'aide des évènements $A_\sigma = \{X_{\sigma_1} < \cdots < X_{\sigma_n}\}$ pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, n variables aléatoires $Y_1, \ldots, Y_n$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telles que

$$Y_1(\omega) \leq \cdots \leq Y_n(\omega) \quad \text{et} \quad \{Y_1(\omega), \ldots, Y_n(\omega)\} = \{X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)\}$$

pour presque tout $\omega \in \Omega$.

2. Déterminer les lois des variables aléatoires $(Y_1, \ldots, Y_n)$ et $(Y_1/Y_2, \ldots, Y_{n-1}/Y_n)$.

Exercice 8. (*Pouvoir paranormal moyen*) On considère l'expérience de divination suivante. On dispose d'un jeu de 52 cartes distinctes, d'un manipulateur et d'un devin. Le devin ne peut à aucun moment voir le jeu ou le manipulateur, et doit deviner quelle est la carte se trouvant sur le dessus du paquet. Il annonce donc une carte au hasard, et le manipulateur retourne silencieusement les cartes les unes après les autres jusqu'à tomber sur la carte annoncée par le devin. Après quoi ce dernier doit deviner la carte qui suit. Il annonce une carte au hasard parmi les 51 restantes, et le manipulateur continue de retourner les cartes à partir de l'endroit où il s'était arrêté. Ainsi de suite jusqu'à ce que tout le paquet soit retourné.

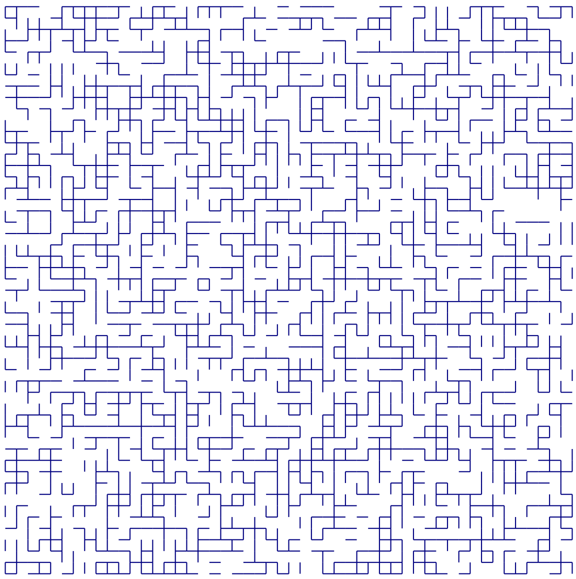
1. Donner un espace de probabilité correspondant à cette expérience.
2. Montrer que si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ alors

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(X \geq k).$$

3. Combien de cartes en moyenne le devin trouvera-t-il ?

Exercice 9. On considère un jeu de 52 cartes bien mélangé, posé face caché sur une table. On retourne une à une les cartes jusqu'à trouver un as. Combien de cartes aura-t-on vu en moyenne ?

Percolation critique sur $\mathbb{Z}^2$.



Existe-t-il un chemin traversant vertical ou horizontal ?

Fin