

Géométrie Différentielle, TD 9 du 2 mai 2014

1. Champs de vecteurs dépendant du temps

Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n contenant 0 et I un intervalle ouvert contenant 0. Soit $t \mapsto X_t, t \in I$, une famille lisse de champs de vecteurs sur U . On cherche à construire une famille de difféomorphismes φ_t , définis sur un voisinage V de 0 dans U et pour t suffisamment petit, telle que $\varphi_0 = \text{Id}_V$ et $\frac{d}{dt}\varphi_t(x) = X_t(\varphi_t(x))$.

- 1- On note Y le champ de vecteurs $Y(t, x) = (1, X_t(x))$ sur $I \times U$. On note $s \mapsto \psi_s$ son flot. Vérifier que $\psi_s(0, x) = (s, \varphi_s(x))$, avec $\frac{d}{dt}\varphi_t(x) = X_t(\varphi_t(x))$ et $\varphi_0 = \text{Id}_U$.
- 2- Montrer que φ_s est un difféomorphisme d'un ouvert U_s contenant 0 vers un autre ouvert. Montrer plus précisément, que pour s petit, les φ_s sont définies sur un même ouvert V de U .
- 3- Inversement, soit $\varphi_t, t \in I$, une famille lisse de difféomorphismes sur un ouvert U de \mathbb{R}^n avec $\varphi_0 = \text{Id}_U$. Montrer qu'il existe une famille lisse $t \mapsto X_t$ de champs de vecteurs tels que $\frac{d}{dt}\varphi_t(x) = X_t(\varphi_t(x))$.

2. Méthode du chemin

On rappelle la formule magique de Cartan : si X est un champ de vecteurs et α une forme différentielle, alors $L_X\alpha = d(\iota_X\alpha) + \iota_X(d\alpha)$. On aura de plus besoin d'une généralisation au cas des champs de vecteurs dépendant du temps : si φ_t est une famille de difféomorphismes tels que $\varphi_0 = \text{Id}$ et si X_t est le champ de vecteurs dépendant du temps correspondant alors

$$\frac{d}{ds}\varphi_s^*(\alpha)|_{s=t} = \varphi_t^*(d(\iota_{X_t}\alpha) + \iota_{X_t}(d\alpha)).$$

La *méthode du chemin* consiste à construire un difféomorphisme vérifiant telle propriété en construisant une famille de difféomorphismes à partir du champ de vecteurs correspondant.

- 1- **Première application :** Soit U un ouvert de \mathbb{R}^{2n} contenant 0 et ω une forme symplectique sur U , c'est-à-dire une forme de degré 2 telle que $d\omega = 0$ et non dégénérée, au sens où, pour tout x dans U , ω_x est une forme bilinéaire antisymétrique non dégénérée sur T_xU .
On veut montrer que, dans un bon système de coordonnées, ω s'écrit $\sum_{i=1}^n dx^i \wedge dx^{i+n}$. Montrer qu'on peut supposer $\omega_0 = (\sum_{i=1}^n dx^i \wedge dx^{i+n})_0$.
- 2- On pose $\tilde{\omega} = \sum_{i=1}^n dx^i \wedge dx^{i+n}$ et $\omega_t = t\omega + (1-t)\tilde{\omega}$. Montrer que, sur un voisinage de 0, les ω_t sont des formes symplectiques.
- 3- Si φ_t est une famille de difféomorphismes, que vaut $\frac{d}{ds}\varphi_s^*(\omega_s)|_{s=t}$?

- 4– Soit α une 1-forme telle que $d\alpha = \tilde{\omega} - \omega$ (existence locale garantie par le lemme de Poincaré). Montrer qu'il existe un champ de vecteurs dépendant du temps tel que $\iota_{X(t)}\omega_t = \alpha$.
- 5– Conclure ; c'est le lemme de Darboux.
- 6– **Deuxième application** : Soient ω_0 et ω_1 deux formes volume de même intégrale sur une variété compacte M de dimension n . On va montrer qu'il existe un difféomorphisme φ tel que $\varphi^*(\omega_1) = \omega_0$. On pose $\omega_t = (1-t)\omega_0 + t\omega_1$. Montrer que ω_t est une forme volume pour tout t .
- 7– Montrer que si α est une forme de degré $n-1$, il existe un champ de vecteurs dépendant du temps X_t tel que $\iota_{X_t}\omega_t = \alpha$.
On généralise alors le premier exercice et on montre que les φ_t correspondant à X_t sont des difféomorphismes de M dans lui-même.
- 8– On admet qu'il existe α une forme de degré $n-1$ telle que $d\alpha = \omega_0 - \omega_1$. Conclure, comme précédemment ; c'est le théorème de Moser.

3. Deux champs de vecteurs

- 1– Soient X et Y deux champs de vecteurs C^∞ sur une variété M de dimension 2. Soit $x \in M$ tel que $X(x)$ et $Y(x)$ soient linéairement indépendants. Montrer qu'il existe f, g des fonctions C^∞ strictement positives définies au voisinage de x telles que $[fX, gY] = 0$.
- 2– A-t-on un résultat global ?
- 3– Le résultat local est-il encore valable si M est de dimension supérieure à 3 ?

4. Dérivations des fonctions continues

Montrer que l'anneau des fonctions continues sur \mathbb{R}^n n'admet pas de dérivations non nulles.