Géométrie Différentielle, TD 9 du 2 mai 2014

1. Champs de vecteurs dépendant du temps

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant 0 et I un intervalle ouvert contenant 0. Soit $t \mapsto X_t, t \in I$, une famille lisse de champs de vecteurs sur U. On cherche à construire une famille de difféomorphismes φ_t, définis sur un voisinage V de 0 dans U et pour t suffisamment petit, telle que $\varphi_0 = \mathrm{Id}_V$ et $\frac{d}{dt}\varphi_t(x) = X_t(\varphi_t(x))$.

1– On note Y le champ de vecteurs $Y(t,x) = (1, X_t(x))$ sur $I \times U$. On note $s \mapsto \psi_s$ son flot. Vérifier que $\psi_s(0,x) = (s, \varphi_s(x))$, avec $\frac{d}{dt}\varphi_t(x) = X_t(\varphi_t(x))$ et $\varphi_0 = \mathrm{Id}_U$.

2– Montrer que φ_s est un difféomorphisme d'un ouvert U_s contenant 0 vers un autre ouvert. Montrer plus précisément, que pour s petit, les φ_s sont définies sur un même ouvert V de U.

3– Inversement, soit φ_t, $t \in I$, une famille lisse de difféomorphismes sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ avec $\varphi_0 = \mathrm{Id}_U$. Montrer qu'il existe une famille lisse $t \mapsto X_t$ de champs de vecteurs tels que $\frac{d}{dt}\varphi_t(x) = X_t(\varphi_t(x))$.

Solution :

Voir le livre de Jacques Lafontaine, III.F

2. Méthode du chemin

On rappelle la formule magique de Cartan : si X est un champ de vecteurs et α une forme différentielle, alors $L_X\alpha = d(\iota_X\alpha) + \iota_X(d\alpha)$. On aura de plus besoin d'une généralisation au cas des champs de vecteurs dépendant du temps : si φ_t est une famille de difféomorphismes tels que $\varphi_0 = \mathrm{Id}$ et si X_t est le champ de vecteurs dépendant du temps correspondant alors

$$\frac{d}{ds}\varphi_s^*(\alpha)_{|s=t} = \varphi_t^*(d(\iota_{X_t}\alpha) + \iota_{X_t}(d\alpha)).$$

La *méthode du chemin* consiste à construire un difféomorphisme vérifiant telle propriété en construisant une famille de difféomorphismes à partir du champ de vecteurs correspondant.

1– **Première application :** Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^{2n}$ contenant 0 et ω une forme symplectique sur U, c'est-à-dire une forme de degré 2 telle que $d\omega = 0$ et non dégénérée, au sens où, pour tout x dans U, ω_x est une forme bilinéaire antisymétrique non dégénérée sur T_xU.

On veut montrer que, dans un bon système de coordonnées, ω s'écrit $\sum_{i=1}^n dx^i \wedge dx^{i+n}$. Montrer qu'on peut supposer $\omega_0 = (\sum_{i=1}^n dx^i \wedge dx^{i+n})_0$.

2– On pose $\widetilde{\omega} = \sum_{i=1}^{n} dx^i \wedge dx^{i+n}$ et $\omega_t = t\omega + (1-t)\widetilde{\omega}$. Montrer que, sur un voisinage de 0, les ω_t sont des formes symplectiques.

3– Si φ_t est une famille de difféomorphismes, que vaut $\frac{d}{ds}\varphi_s^*(\omega_s)_{|s=t}$?

4– Soit α une 1-forme telle que $d\alpha = \widetilde{\omega} - \omega$ (existence locale garantie par le lemme de Poincaré). Montrer qu'il existe un champ de vecteurs dépendant du temps tel que $\iota_{X(t)}\omega_t = \alpha$.

5– Conclure ; c'est le lemme de Darboux.

6– **Deuxième application :** Soient ω_0 et ω_1 deux formes volume de même intégrale sur une variété compacte M de dimension n. On va montrer qu'il existe un difféomorphisme φ tel que $\varphi^*(\omega_1) = \omega_0$. On pose $\omega_t = (1-t)\omega_0 + t\omega_1$. Montrer que ω_t est une forme volume pour tout t.

7– Montrer que si α est une forme de degré $n-1$, il existe un champ de vecteurs dépendant du temps X_t tel que $\iota_{X_t}\omega_t = \alpha$.

On généralise alors le premier exercice et on montre que les φ_t correspondant à X_t sont des difféomorphismes de M dans lui-même.

8– On admet qu'il existe α une forme de degré $n-1$ telle que $d\alpha = \omega_0 - \omega_1$. Conclure, comme précédemment ; c'est le théorème de Moser.

Solution :

Voir le livre de Jacques Lafontaine, III.F et exercice 17 du chapitre V et 19 du chapitre VII.

3. Deux champs de vecteurs

1– Soient X et Y deux champs de vecteurs C^∞ sur une variété M de dimension 2. Soit $x \in M$ tel que $X(x)$ et $Y(x)$ soient linéairement indépendants. Montrer qu'il existe f, g des fonctions C^∞ strictement positives définies au voisinage de x telles que $[fX, gY] = 0$.

2– A-t-on un résultat global ?

3– Le résultat local est-il encore valable si M est de dimension supérieure à 3 ?

Solution :

1– On travaille localement au voisinage de x. Comme $X(x) \neq 0$, par théorème de redressement des champs de vecteurs, on peut supposer $X = \partial_1$. Notons $Y = a\partial_1 + b\partial 2$, avec $b(x) \neq 0$ par hypothèse. On effectue un changement de variables de la forme $(x, y) \mapsto (x, h(x, y))$. L'expression de X ne change pas, mais Y devient $(a + b\frac{\partial f}{\partial x_1})\partial_1 + b\frac{\partial f}{\partial x_2}\partial_2$.

Choisissons f telle que $\frac{\partial f}{\partial x_1} = -\frac{a}{b}$ et $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \neq 0$. Dans un tel système de coordonnées, $X = \partial_1$ et $Y = c\partial_2$ avec $c \neq 0$ au voisinage de X. On prend $f = 1$ et $g = \pm\frac{1}{c}$.

2– Sans doute pas.

3– Choisissons X et Y de sorte qu'ils engendrent un champ de 2-plans non intégrable. Alors fX et gY engendrent le même champ de 2-plans. La condition $[fX, gY] = 0$ permettrait d'appliquer le théorème de Frobenius pour montrer son intégrabilité. C'est absurde.

4. Dérivations des fonctions continues

Montrer que l'anneau des fonctions continues sur $\mathbb{R}^n$ n'admet pas de dérivations non nulles.

Solution :

Soit δ une dérivation. On a $\delta(1) = \delta(1 \cdot 1) = 2\delta(1)$ de sorte que $\delta(1) = 0$, et que $\delta(c) = 0$ pour toute constante c.

Si $f \geqslant 0$ et $f(x) = 0$, on pose $g = \sqrt{(f)}$. Il vient $\delta(f) = 2g\delta(g)$ de sorte que $\delta(f)(x) = 0$.

Si f est telle que $f(x) = 0$, on montre $\delta(f)(x) = 0$, en écrivant $f = \max(f, 0) + \min(f, 0)$: on est alors ramené au cas précédent.

Finalement, si f est quelconque, on écrit $f = (f - f(x)) + f(x)$. Les résultats ci-dessus montrent $\delta(f)(x) = 0 + 0 = 0$.