

TD 9 : Le retour de la vengeance des martingales

Mercredi 14 Novembre

Exercice 1 (Propriété de Liouville)

Soit $G = (V, E)$ un graphe infini, connexe et localement fini (i.e. où chaque sommet n'a qu'un nombre fini de voisins) et $h : V \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que h est *harmonique sur G* si pour tout $x \in V$, on a

$$h(x) = \frac{1}{\deg(x)} \sum_{y \sim x} h(y),$$

où la somme est effectuée sur les voisins y de x et où $\deg(x)$ est le nombre de ces voisins. On dit que G vérifie la *propriété de Liouville* si toute fonction bornée harmonique sur G est constante.

1. Montrer que si h est harmonique et (X_n) est une marche aléatoire simple sur G , alors $(h(X_n))_{n \geq 0}$ est une martingale.
2. Montrer que si la marche aléatoire simple sur G est récurrente (i.e. si elle visite presque sûrement tous les points une infinité de fois), alors G vérifie la propriété de Liouville.
3. Soient $x, y \in \mathbb{Z}^d$ tels que $\sum_{i=1}^d x_i \equiv \sum_{i=1}^d y_i \pmod{2}$. Montrer qu'il existe (X_n) et (Y_n) deux marches aléatoires simples (non indépendantes !) issues respectivement de x et y telles que p.s., pour n assez grand, $X_n = Y_n$.
4. En déduire que \mathbb{Z}^d vérifie la propriété de Liouville.
5. Donner un exemple de graphe (connexe, localement fini) ne vérifiant pas la propriété de Liouville.

Indication : Pour la question 3, commencer par le cas $d = 1$ puis essayer d'adapter à d quelconque.

Exercice 2 (Processus de Galton–Watson surcritique)

Soit μ une loi sur \mathbb{N} telle que $\sum_i i\mu(i) = m > 1$ et $\sum_i i^2\mu(i) < +\infty$. Soient $(Z_{n,i})_{n,i \in \mathbb{N}}$ des variables i.i.d. de loi μ . On définit le processus X par $X_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 0$,

$$X_{n+1} = \sum_{i=1}^{X_n} Z_{n,i}.$$

1. Que peut décrire le processus X ?
2. On pose $p_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$ et $p = \mathbb{P}(\exists n, X_n = 0)$. Montrer une formule de récurrence de la forme $p_{n+1} = f(p_n)$, et en déduire que $p < 1$.
3. On pose $M_n = m^{-n} X_n$. Montrer que M est une martingale. En déduire que M_n converge p.s. vers une variable M_∞ .
4. Trouver une relation de récurrence sur $\mathbb{E}[M_n^2]$, et en déduire que $M_n \rightarrow M_\infty$ dans L^2 .
5. On note $q = \mathbb{P}(M_\infty = 0)$. Donner une équation sur q . En déduire que $q = p$. Qu'est-ce que cela signifie sur la croissance de X_n ?

Exercice 3 (Une preuve de la loi forte des grands nombres)

Soit $(Z_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. On suppose que $\mathbb{E}[Z_n] = 0$ pour tout $n \geq 1$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{\text{Var}(Z_n)}{n^2} < +\infty$. On pose, pour $n \geq 1$,

$$M_n = \sum_{j=1}^n \frac{Z_j}{j} \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{j=1}^n Z_j.$$

1. Montrer que M_n converge p.s. quand n tend vers $+\infty$.
2. En exprimant S en fonction de M , en déduire $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} 0$.
3. Soit X une variable aléatoire telle que $\mathbb{E}[X] = 0$. On considère une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires i.i.d. de même loi que X . Pour tout $n \geq 1$, on pose $Y_n = X_n \mathbb{1}_{|X_n| \leq n}$. Montrer que :
 - (i) $\mathbb{E}[Y_n] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}[X]$,
 - (ii) $\mathbb{P}(\exists n \geq 1, \forall j \geq n, X_j = Y_j) = 1$,
 - (iii) $\sum_{n \geq 1} \frac{\text{Var}(Y_n)}{n^2} < \infty$.
4. En déduire la loi forte des grands nombres.

Exercice 4 (Le singe et la machine à écrire)

Un chimpanzé est assis devant une machine à écrire et commence à taper une lettre par seconde. Il tape à chaque fois une lettre choisie uniformément parmi les 26 lettres de l'alphabet, indépendamment des lettres précédentes. On note T le premier temps auquel les 11 dernières lettres écrites par le singe forment le mot "ABRACADABRA". Le but de l'exercice est de calculer $\mathbb{E}[T]$. Pour cela, on va définir une martingale. On suppose que le singe a juste à côté de lui un sac rempli de beaucoup (beaucoup, beaucoup) de bananes. On joue alors au jeu suivant : juste *avant* chaque seconde $n = 1, 2, 3, \dots$ un joueur arrive derrière le singe et parie 1 banane avec lui sur l'événement

{la n -ième lettre tapée par l'animal est un "A"}.

Si il perd, il part (et le singe met 1 banane dans son sac). Si il gagne, il reçoit 26 bananes du singe, qu'il remise immédiatement sur l'événement

{la $n + 1$ -ième lettre tapée par l'animal est un "B"}.

Si il perd, il part. Si il gagne, il reçoit 26^2 bananes qu'il remise immédiatement sur l'événement

{la $n + 2$ -ième lettre tapée par l'animal est un "R"}.

Et ainsi de suite jusqu'à ce que "ABRACADABRA" sorte de la machine. Notez qu'il peut y avoir jusqu'à trois joueurs en train de miser derrière le singe.

1. Montrer que le nombre de bananes dans le sac du chimpanzé au temps n est une martingale pour $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$, où \mathcal{F}_n est la tribu engendrée par les n premières lettres tapées par l'animal.

2. En déduire

$$\mathbb{E}[T] = 26^{11} + 26^4 + 26.$$

3. Refaire le même exercice en remplaçant "ABRACADABRA" par "ABCDEFGHIIJK". Commenter.

Exercice 5 (Théorème de Rademacher)

Le but de cet exercice est de montrer par une approche probabiliste que toute fonction lipschitzienne est primitive d'une fonction mesurable bornée. Soient X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$ et $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne de constante de Lipschitz $L > 0$. Pour tout $n \geq 0$, on pose

$$X_n = \lfloor 2^n X \rfloor 2^{-n} \quad \text{et} \quad Z_n = 2^n (f(X_n + 2^{-n}) - f(X_n)).$$

1. Montrer les égalités de tribus suivantes :

$$\sigma(X_0, X_1, \dots, X_n) = \sigma(X_n) \quad \text{et} \quad \bigcap_{n \geq 0} \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots) = \sigma(X).$$

2. Déterminer $\mathbb{E}[h(X_{n+1})|X_n]$ pour toute fonction $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable continue. En déduire que $(Z_n)_{n \geq 0}$ est une \mathcal{F}_n -martingale bornée (où $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n)$ pour tout $n \geq 0$).

3. Montrer que (Z_n) converge p.s. et dans L^1 vers une variable aléatoire Z , puis qu'il existe une fonction $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable bornée telle que $Z = g(X)$ p.s..

4. Calculer $\mathbb{E}[h(X)|X_n]$ pour toute fonction $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable bornée. En déduire que p.s. :

$$Z_n = 2^n \int_{X_n}^{X_n + 2^{-n}} g(u) du.$$

5. Conclure que pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) = f(0) + \int_0^x g(u) du$.

Exercice 6

Que représente la jolie image ci-dessous ?

