Processus aléatoires Thomas Budzinski
ENS Paris, 2018-2019 Bureau V2
thomas.budzinski@ens.fr

TD 9 : Le retour de la vengeance des martingales
Corrigé

Mercredi 14 Novembre

Exercice 1 (Propriété de Liouville)
Soit $G = (V, E)$ un graphe infini, connexe et localement fini (i.e. où chaque sommet n'a qu'un nombre fini de voisins) et $h : V \to \mathbb{R}$. On dit que h est *harmonique sur* G si pour tout $x \in V$, on a

$$h(x) = \frac{1}{\deg(x)} \sum_{y \sim x} h(y),$$

où la somme est effectuée sur les voisins y de x et où $\deg(x)$ est le nombre de ces voisins. On dit que G vérifie la *propriété de Liouville* si toute fonction bornée harmonique sur G est constante.

1. Montrer que si h est harmonique et (X_n) est une marche aléatoire simple sur G, alors $(h(X_n))_{n\geq 0}$ est une martingale.
2. Montrer que si la marche aléatoire simple sur G est récurrente (i.e. si elle visite presque sûrement tous les points une infinité de fois), alors G vérifie la propriété de Liouville.
3. Soient $x, y \in \mathbb{Z}^d$ tels que $\sum_{i=1}^d x_i \equiv \sum_{i=1}^d y_i \pmod 2$. Montrer qu'il existe (X_n) et (Y_n) deux marches aléatoires simples (non indépendantes !) issues respectivement de x et y telles que p.s., pour n assez grand, $X_n = Y_n$.
4. En déduire que $\mathbb{Z}^d$ vérifie la propriété de Liouville.
5. Donner un exemple de graphe (connexe, localement fini) ne vérifiant pas la propriété de Liouville.

<u>*Indication :*</u> Pour la question 3, commencer par le cas $d = 1$ puis essayer d'adapter à d quelconque.

<u>*Solution de l'exercice 1*</u>

1. Soit $\mathscr{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$. Conditionnellement à $\mathscr{F}_n$, le sommet X_{n+1} est uniforme parmi les voisins de X_n, donc $\mathbb{E}[h(X_{n+1})|\mathscr{F}_n]$ est la moyenne de h sur les voisins de X_n, c'est-à-dire X_n car h est harmonique.
2. Soit h harmonique bornée sur G. Soient $x, y \in V$ et (X_n) une marche aléatoire simple issue de x. Alors $(h(X_n))_{n\geq 0}$ est une martingale, donc elle converge p.s. Or, elle visite une infinité de fois x et y, donc elle prend une infinité de fois les valeurs $h(x)$ et $h(y)$, donc $h(x) = h(y)$, et ce pour tous x et y. La fonction h est donc constante, donc G est Liouville.
3. Dans le cas $d = 1$, l'idée est de faire démarrer deux marches aléatoires indépendantes $\widetilde{X}$ et $\widetilde{Y}$ issues de x et y. Par récurrence de la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$ (plus la condition de parité), le temps $\tau_1 = \inf\{n | \widetilde{X}_n = \widetilde{Y}_n\}$ est fini p.s. On prend alors $X = \widetilde{X}$ ainsi que $Y_n = \widetilde{Y}_n$ pour $n \leq \tau_1$ et $Y_n = \widetilde{X}_n$ pour $n \geq \tau_1$.

   Dans le cas général, il faut "coupler les coordonnées une par une" : on démarre deux marches indépendantes de x et y, et on note τ_1 le premier temps où leurs coordonnées selon e_1 coïncident. À partir de τ_1, on applique la stratégie du cas $d = 1$ pour que les coordonnées selon e_1 restent les

mêmes pour $n \geq \tau_1$. Puis on attend τ_2, le premier temps où les coordonnées selon e_2 coïncident, et ainsi de suite.

Les détails sont laissés en exercice, vous pouvez aussi venir me voir au bureau V2.

4. Soit h harmonique bornée sur G et soient x, y, X et Y comme dans la question précédente. Alors $(h(X_n))_{n\geq 0}$ et $(h(Y_n))_{n\geq 0}$ sont deux martingales bornées, donc elles convergent p.s. et dans L^1 vers respectivement X_∞ et Y_∞. Comme $X_n = Y_n$ pour n assez grand, on a $X_\infty = Y_\infty$ p.s.. Par convergence L^1, on peut donc écrire

$$h(x) = \mathbb{E}\left[X_\infty\right] = \mathbb{E}\left[Y_\infty\right] = h(y),$$

donc h est constante sur $\{x \in \mathbb{Z}^d | \sum_{i=1}^d x_i \equiv 0 \pmod 2\}$, et il est facile d'en conclure que h est constante sur V.

5. Considérer l'arbre binaire infini. La marche aléatoire est transiente (car la "hauteur" augmente de 1 avec proba $\frac{2}{3}$ et diminue de 1 avec proba $\frac{1}{3}$), donc à partir d'un certain rang elle reste soit dans la moitié gauche de l'arbre, soit dans la moitié droite. On peut alors poser

$$h(x) = \mathbb{P}\left(\text{la marche aléatoire issue de } x \text{ finit dans la moitié gauche de l'arbre}\right).$$

On vérifie facilement que h est harmonique et bornée (par 1). De plus, si x est "très haut" dans la moitié gauche de l'arbre, il a une très faible probabilité de redescendre jusqu'à la racine, donc $h(x)$ est proche de 1. Les détails sont laissés en exercice.

Exercice 2 (Processus de Galton–Watson surcritique)
Soit μ une loi sur $\mathbb{N}$ telle que $\sum_i i\mu(i) = m > 1$ et $\sum_i i^2\mu(i) < +\infty$. Soient $(Z_{n,i})_{n,i\in\mathbb{N}}$ des variables i.i.d. de loi μ. On définit le processus X par $X_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 0$,

$$X_{n+1} = \sum_{i=1}^{X_n} Z_{n,i}.$$

1. Que peut décrire le processus X ?
2. On pose $p_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$ et $p = \mathbb{P}(\exists n, X_n = 0)$. Montrer une formule de récurrence de la forme $p_{n+1} = f(p_n)$, et en déduire que $p < 1$.
3. On pose $M_n = m^{-n}X_n$. Montrer que M est une martingale. En déduire que M_n converge p.s. vers une variable M_∞.
4. Trouver une relation de récurrence sur $\mathbb{E}[M_n^2]$, et en déduire que $M_n \to M_\infty$ dans L^2.
5. On note $q = \mathbb{P}(M_\infty = 0)$. Donner une équation sur q. En déduire que $q = p$. Qu'est-ce-que cela signifie sur la croissance de X_n ?

Solution de l'exercice 2

1. Supposons qu'une population évolue de la manière suivante : à chaque génération n, les individus se reproduisent indépendamment des générations précédentes et les uns des autres, de telle manière que le nombre d'enfants d'un individu a pour loi μ. Alors le processus X décrit le nombre d'individus à la génération n.
2. Dire que $X_{n+1} = 0$ revient à dire qu'il existe i tel que le premier individu a eu i enfants (ce qui arrive avec proba $\mu(i)$), et chacun de ces i enfants n'a pas de descendant à la génération n (ce qui arrive avec proba p_n pour chaque enfant). Par conséquent, on a

$$p_{n+1} = \sum_i \mu(i)p_n^i = f(p_n),$$

avec $f(x) = \sum_i \mu(i)x^i$. On sait de plus que $p = \lim_{n\to+\infty} p_n$, donc p est un point fixe de f. De plus, f est croissante (les $\mu(i)$ sont positifs), donc si p' est un point fixe de f, on a par récurrence $p_n \leq p'$ pour tout n, donc $p \leq p'$. On en déduit que p est le plus petit point fixe de f, donc montrer que $p < 1$ revient à montrer que f admet un point fixe strictement inférieur à 1. Or, on a $f(1) = 1$ et $f'(1) = m > 1$, donc $f(x) < x$ pour x assez proche de 1. Mais on a aussi $f(0) \geq 0$, donc par le théorème des valeurs intermédiaires f admet un point fixe dans $[0, 1[$, donc $p < 1$.

3. Soit $\mathscr{F}_n$ la tribu engendrée par les $Z_{k,i}$ pour $k \leq n-1$. Alors X_n ne dépend que des $Z_{k,i}$ avec $k \leq n-1$ et $i \in \mathbb{N}$, donc X est $(\mathscr{F}_n)$-adapté, donc M aussi. De plus, comme M est positif, on peut faire le calcul suivant sans savoir M_n et M_{n+1} sont intégrables :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[M_{n+1}|\mathscr{F}_n\right] &= m^{-(n+1)}\mathbb{E}\left[X_{n+1}|\mathscr{F}_n\right] \\
&= m^{-(n+1)}\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{X_n} Z_{n,i}\Big|\mathscr{F}_n\right] \\
&= m^{-(n+1)}\sum_{i=1}^{X_n}\mathbb{E}\left[Z_{n,i}|\mathscr{F}_n\right] \\
&= m^{-(n+1)}\sum_{i=1}^{X_n} m \\
&= m^{-(n+1)}mX_n \\
&= M_n.
\end{aligned}$$

En particulier, on en déduit que $\mathbb{E}[M_n] = \mathbb{E}[M_0] < +\infty$ pour tout n, et M est une martingale positive, donc elle converge p.s..

4. Notons σ^2 la variance de la loi μ. Pour tout n, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[M_{n+1}^2|\mathscr{F}_n\right] &= m^{-2(n+1)}\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{X_n} Z_{n,i}\right)^2\Big|\mathscr{F}_n\right] \\
&= m^{-2(n+1)}\sum_{i,j=1}^{X_n}\mathbb{E}\left[Z_{n,i}Z_{n,j}\right] \\
&= m^{-2(n+1)}\left(\sum_{i=1}^{X_n}\mathbb{E}\left[Z_{n,i}^2\right] + \sum_{i\neq j}\mathbb{E}\left[Z_{n,i}\right]\mathbb{E}\left[Z_{n,j}\right]\right) \\
&= m^{-2(n+1)}\left((m^2+\sigma^2)X_n + m^2X_n(X_n-1)\right) \\
&= M_n^2 + \frac{\sigma^2}{m^{2(n+1)}}M_n.
\end{aligned}$$

En prenant l'espérance des deux côtés, on obtient

$$\mathbb{E}\left[M_{n+1}^2\right] = \mathbb{E}\left[M_n^2\right] + \frac{\sigma^2}{m^{2(n+1)}}\mathbb{E}\left[M_n\right] = \mathbb{E}\left[M_n^2\right] + \frac{\sigma^2}{m^{n+2}}.$$

Comme $\sum_n \frac{\sigma^2}{m^{n+2}} < +\infty$, on en déduit que $\mathbb{E}\left[M_n^2\right]$ est borné, donc M est bornée dans L^2, donc elle converge dans L^2.

5. On dit qu'un individu x est à *descendance lente* si le nombre de descendants de x après n générations est $o(m^n)$. En particulier, un individu dont la descendance s'éteint est à descendance lente, et q est la probabilité que l'individu de départ soit à descendance lente.

   Dire que l'individu de départ a une descendance lente revient à dire qu'il existe i tel qu'il a i enfants, et chacun d'eux a une descendance lente. De même que dans la question 2, la probabilité que cela arrive vaut $\sum_i \mu(i)q^i = f(q)$, donc $q = f(q)$. Or, μ est une série entière à coefficients positifs, et il y a au moins un $i \geq 2$ tel que $\mu(i) > 0$, donc f est strictement convexe, donc elle a au plus deux points fixes. Comme p et 1 sont deux points fixes de f, on a donc soit $q = p$, soit $q = 1$. Mais dans le second cas, on a $M_\infty = 0$ p.s.. C'est absurde car M_n converge vers M_∞ dans L^2, donc aussi dans L^1, et $\mathbb{E}[M_n] = \mathbb{E}[M_0] = 1$ pour tout n. On a donc $q = p$. Cela signifie que presque sûrement, soit le processus X s'éteint, soit X_n est asymptotiquement équivalent à m^n fois une variable aléatoire strictement positive.

Remarque On a utilisé la convergence L^2 pour montrer une convergence L^1. Il est naturel de se demander si la convergence L^1 de M reste vraie si μ n'est plus de carré intégrable. Le théorème de Kesten–Stigum affirme que M converge dans L^1 vers M_∞ si et seulement si

$$\sum_i i \log i \, \mu(i) < +\infty.$$

Pour une preuve du théorème de Kesten–Stigum, voir par exemple le chapitre 12.2 de Probability on trees and networks, de Lyons et Peres.

Exercice 3 (Une preuve de la loi forte des grands nombres)
Soit $(Z_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. On suppose que $\mathbb{E}[Z_n] = 0$ pour tout $n \geq 1$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{\mathrm{Var}(Z_n)}{n^2} < +\infty$. On pose, pour $n \geq 1$,

$$M_n = \sum_{j=1}^n \frac{Z_j}{j} \qquad \text{et} \qquad S_n = \sum_{j=1}^n Z_j \, .$$

1. Montrer que M_n converge p.s. quand n tend vers $+\infty$.
2. En exprimant S en fonction de M, en déduire $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} 0$.
3. Soit X une variable aléatoire telle que $\mathbb{E}[X] = 0$. On considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires i.i.d. de même loi que X. Pour tout $n \geq 1$, on pose $Y_n = X_n \mathbb{1}_{|X_n|\leq n}$. Montrer que :
   (i) $\mathbb{E}[Y_n] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[X]$,
   (ii) $\mathbb{P}\left(\exists n \geq 1, \forall j \geq n, X_j = Y_j\right) = 1$,
   (iii) $\sum_{n\geq 1} \frac{\mathrm{Var}(Y_n)}{n^2} < \infty$.
4. En déduire la loi forte des grands nombres.

Solution de l'exercice 3

1. Comme les X_i sont d'espérance nulle, on vérifie facilement que M est une martingale. De plus, par indépendance des X_i, pour tout n on a

$$\mathbb{E}[M_n^2] = \mathrm{Var}(M_n) = \sum_{i=j}^n \mathrm{Var}\left(\frac{Z_j}{j}\right) = \sum_{j=1}^n \frac{\mathrm{Var}(Z_j)}{j^2},$$

   qui est bornée par l'hypothèse sur les variances. La martingale M est donc bornée dans L^2, donc elle converge p.s. vers une variable M_∞.
2. Pour tout $n \geq 1$, on a

$$\frac{S_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n j(M_j - M_{j-1}) = \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^n jM_j - \sum_{j=1}^{n-1}(j+1)M_j\right) = M_n - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} M_j.$$

   D'après le lemme de Cesaro, le membre de droite tend vers 0, d'où $\frac{S_n}{n} \to 0$ p.s.
3. (i) On a $\mathbb{E}[Y_n] = \mathbb{E}[X\mathbb{1}_{|X|\leq n}]$, avec $X\mathbb{1}_{|X|\leq n} \to X$ p.s. et $|X\mathbb{1}_{|X|\leq n}| \leq |X|$, donc $\mathbb{E}[Y_n] \to \mathbb{E}[X] = 0$ par convergence dominée.
   (ii) Pour tout $j \geq 1$, on a $\mathbb{P}(X_j \neq Y_j) = \mathbb{P}(|X_j| > j) = \mathbb{P}(|X| > j)$ donc

$$\sum_{j=1}^\infty \mathbb{P}(X_j \neq Y_j) = \sum_{j=1}^\infty \mathbb{P}(|X| > j) \leq \int_0^\infty \mathbb{P}(|X| > t)\,\mathrm{d}t = \mathbb{E}[|X|] < +\infty,$$

   donc d'après le lemme de Borel-Cantelli, p.s., $X_j = Y_j$ pour j assez grand.

(iii) Enfin, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Var}(Y_n)}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}[Y_n^2]}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[\frac{|X|^2}{n^2}\mathbb{1}_{|X|\leq n}\right] = \mathbb{E}\left[|X|^2 \sum_{n\geq 1\vee |X|} \frac{1}{n^2}\right]$$
$$\leq \mathbb{E}\left[|X|^2 \frac{c}{|X|}\right] = c\mathbb{E}[|X|] < +\infty,$$

en utilisant à la fin $\sum_{n\geq 1\vee a} = O\left(\frac{1}{a}\right)$.

4. On se place dans le cadre de la question 3. Pour tout $n \geq 1$, posons $Z_n = Y_n - \mathbb{E}[Y_n]$. On a $\mathrm{Var}(Z_n) = \mathrm{Var}(Y_n)$ pour tout $n \geq 0$ donc $(Z_n)_{n\geq 1}$ vérifie les hypothèses des questions 1 et 2, donc

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(Y_j - \mathbb{E}[Y_j]) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} 0\,.$$

Or $\mathbb{E}[Y_n] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[X] = 0$, donc d'après le lemme de Cesaro on a

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}[Y_j] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_j \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} 0.$$

Enfin, p.s., il existe $J \geq 1$ tel que $Y_j = X_j$ pour tout $j \geq J$. On a alors

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{J-1} X_j + \frac{1}{n}\sum_{j\geq J} Y_j \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

ce qui achève la démonstration.

Exercice 4 (Le singe et la machine à écrire)
Un chimpanzé est assis devant une machine à écrire et commence à taper une lettre par seconde. Il tape à chaque fois une lettre choisie uniformément parmi les 26 lettres de l'alphabet, indépendamment des lettres précédentes. On note T le premier temps auquel les 11 dernières lettres écrites par le singe forment le mot "ABRACADABRA". Le but de l'exercice est de calculer $\mathbb{E}[T]$. Pour cela, on va définir une martingale. On suppose que le singe a juste à côté de lui un sac rempli de beaucoup (beaucoup, beaucoup) de bananes. On joue alors au jeu suivant : juste *avant* chaque seconde $n = 1, 2, 3, \ldots$ un joueur arrive derrière le singe et parie 1 banane avec lui sur l'événement

$$\{\text{la } n\text{-ième lettre tapée par l'animal est un "A"}\}.$$

Si il perd, il part (et le singe met 1 banane dans son sac). Si il gagne, il reçoit 26 bananes du singe, qu'il remise immédiatement sur l'événement

$$\{\text{la } n+1\text{-ième lettre tapée par l'animal est un "B"}\}.$$

Si il perd, il part. Si il gagne, il reçoit 26^2 bananes qu'il remise immédiatement sur l'événement

$$\{\text{la } n+2\text{-ième lettre tapée par l'animal est un "R"}\}.$$

Et ainsi de suite jusqu'à ce que "ABRACADABRA" sorte de la machine. Notez qu'il peut y avoir jusqu'à trois joueurs en train de miser derrière le singe.

1. Montrer que le nombre de bananes dans le sac du chimpanzé au temps n est une martingale pour $(\mathscr{F}_n)_{n\geq 0}$, où $\mathscr{F}_n$ est la tribu engendrée par les n premières lettres tapées par l'animal.
2. En déduire
$$\mathbb{E}[T] = 26^{11} + 26^4 + 26.$$
3. Refaire le même exercice en remplaçant "ABRACADABRA" par "ABCDEFGHIJK". Commenter.

Solution de l'exercice 4

1. Cela est dû au fait que les paris sont à chaque étape "équilibrés" : conditionnellement à $\mathscr{F}_n$, l'espérance de gain de chacun des parieurs est nulle donc l'espérance de gain du singe aussi.
2. Supposons d'abord qu'on puisse appliquer le théorème d'arrêt à T : alors la variation du nombre de bananes dans le sac du singe au temps T est d'espérance nulle, donc l'espérance de ses gains est égale à l'espérance de ses pertes. Les pertes du singe sont faciles à calculer : au moment où ABRACADABRA sort, il y a 3 parieurs derrière le singe : un qui est arrivé juste avant le premier "A" et qui repart avec 26^{11} bananes, un qui est arrivé juste avant le second "A" et qui repart avec 26^4 bananes, et un qui est arrivé juste avant le dernier "A" et qui repart avec 26 bananes. Les pertes du singe sont donc de $26^{11} + 26^4 + 26$ bananes. D'autre part, chacun des T parieurs qui est passé a donné une banane au singe (y compris les 3 parieurs qui gagnent à la fin), donc les gains du singe sont de T bananes.

   Pour écrire cela proprement, on peut appliquer le théorème d'arrêt à $T \wedge t$. Les gains du singe au temps $T \wedge t$ valent alors $T \wedge t$ et on a $\mathbb{E}[T \wedge t] \to \mathbb{E}[T]$ par convergence monotone. Les pertes du singe sont majorées par $26^{11} + 26^{10} + \cdots + 1$ et tendent p.s. vers $26^{11} + 26^4 + 26$ quand t tend vers $+\infty$, donc leur espérance tend vers $26^{11} + 26^4 + 26$ bananes par convergence dominée.
3. On obtient $\mathbb{E}[T] = 26^{11}$, soit une espérance strictement inférieure à celle du temps d'apparition de ABRACADABRA. Si cela peut paraître contre-intuitif, la raison est que les sous-mots qui se répètent ("A" et "ABRA") introduisent des corrélations positives entre l'apparition de "ABRACADABRA" à deux rangs différents, ce qui augmente les chances que l'événement se produise très tard.

Exercice 5 (Théorème de Rademacher)
Le but de cet exercice est de montrer par une approche probabiliste que toute fonction lipschitzienne est primitive d'une fonction mesurable bornée. Soient X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$ et $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne de constante de Lipschitz $L > 0$. Pour tout $n \geq 0$, on pose

$$X_n = \lfloor 2^n X \rfloor 2^{-n} \qquad \text{et} \qquad Z_n = 2^n \left(f\left(X_n + 2^{-n}\right) - f(X_n) \right).$$

1. Montrer les égalités de tribus suivantes :
$$\sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n) = \sigma(X_n) \qquad \text{et} \qquad \bigcap_{n \geq 0} \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots) = \sigma(X).$$
2. Déterminer $\mathbb{E}[h(X_{n+1})|X_n]$ pour toute fonction $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mesurable continue. En déduire que $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une $\mathscr{F}_n$-martingale bornée (où $\mathscr{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ pour tout $n \geq 0$).
3. Montrer que (Z_n) converge p.s. et dans L^1 vers une variable aléatoire Z, puis qu'il existe une fonction $g : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable bornée telle que $Z = g(X)$ p.s..
4. Calculer $\mathbb{E}[h(X)|X_n]$ pour toute fonction $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mesurable bornée. En déduire que p.s. :
$$Z_n = 2^n \int_{X_n}^{X_n + 2^{-n}} g(u) \mathrm{d}u.$$
5. Conclure que pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) = f(0) + \int_0^x g(u) \mathrm{d}u$.

Solution de l'exercice 5

1. On remarque que, pour $0 \leq k \leq n$, $X_k = 2^{-k} \lfloor 2^k X_n \rfloor$. On peut l'écrire proprement, ou faire un dessin pour s'en convaincre... Ainsi, pour $0 \leq k \leq n$, X_k est $\sigma(X_n)$-mesurable. On en déduit que $\sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n) = \sigma(X_n)$.

   De plus, pour tout $n \geq 0$, par définition de X_n, on sait que X_n est $\sigma(X)$-mesurable. Ainsi, on a l'inclusion
$$\bigcap_{n \geq 0} \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots) \subset \sigma(X).$$

Enfin, X_n converge p.s. vers X quand n tend vers l'infini, donc X est $\sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots)$-mesurable pour tout $n \geq 0$. Ainsi, on obtient l'inclusion réciproque

$$\sigma(X) \subset \bigcap_{n\geq 0} \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots).$$

2. Soit $h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable continue. Alors h est bornée sur $[0,1]$ donc $h(X_n)$ est intégrable pour tout n. On a, pour $n \geq 0$ et $0 \leq k \leq 2^n - 1$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[h(X_{n+1})\mathbb{1}_{X_n=k/2^n}\right] &= \mathbb{E}\left[h(X_{n+1})\mathbb{1}_{X\in[k/2^n,(2k+1)/2^{n+1}[}\right] + \mathbb{E}\left[h(X_{n+1})\mathbb{1}_{X\in[(2k+1)/2^{n+1},(k+1)/2^n[}\right] \\ &= 2^{-(n+1)}\left(h\left(\frac{k}{2^n}\right) + h\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right)\right).\end{aligned}$$

On en déduit

$$\mathbb{E}\left[h(X_{n+1}) \mid X_n\right] = \frac{h(X_n)}{2} + \frac{h\left(X_n + 2^{-(n+1)}\right)}{2}.$$

Pour tout $n \geq 0$, la variable Z_n est $\mathscr{F}_n$-mesurable, et $|Z_n| \leq L$ donc Z_n est intégrable. De plus,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z_{n+1}|\mathscr{F}_n] &= 2^{n+1}\mathbb{E}\left[f(X_{n+1} + 2^{-(n+1)}) - f(X_{n+1}) \mid \mathscr{F}_n\right] \\ &= 2^{n+1}\mathbb{E}\left[f(X_{n+1} + 2^{-(n+1)}) - f(X_{n+1}) \mid X_n\right] \\ &= 2^n\left(f(X_n + 2^{-(n+1)}) - f(X_n) + f(X_n + 2^{-n}) - f(X_n + 2^{-(n+1)})\right) \\ &= Z_n\,,\end{aligned}$$

en utilisant à la deuxième ligne la première égalité de tribus de la question 1. Donc $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une $(\mathscr{F}_n)$-martingale bornée par L.

3. D'après la question 2, on sait que (Z_n) est une martingale bornée dans L^p pour tout $p > 0$, donc (Z_n) converge p.s. et dans L^1. On note Z sa limite. Pour tout $n \geq 0$, Z_n est mesurable par rapport à la tribu $\sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots)$ donc Z est mesurable par rapport à la tribu $\bigcap_{n\geq 0} \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots)$. D'après la question 1, Z est ainsi $\sigma(X)$-mesurable. Il existe donc une fonction $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ borélienne telle que $Z = g(X)$. De plus, Z étant bornée par L, on peut choisir g bornée (en prenant remplaçant g par $g \wedge L$ par exemple).

4. Soit $h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable bornée. La variable $h(X)$ est intégrable et on a, pour $n \geq 0$ et $0 \leq k \leq 2^n - 1$,

$$\mathbb{E}\left[h(X)\mathbb{1}_{X_n=k2^{-n}}\right] = \mathbb{E}\left[h(X)\mathbb{1}_{X\in[k2^{-n},(k+1)2^{-n}[}\right] = \int_{k2^{-n}}^{(k+1)2^{-n}} h(x)\mathrm{d}x.$$

On en déduit que

$$\mathbb{E}[h(X) \mid X_n] = 2^n \int_{X_n}^{X_n+2^{-n}} h(x)\mathrm{d}x.$$

La $(\mathscr{F}_n)$-martingale $(Z_n)_{n\geq 0}$ converge p.s. et dans L^1 vers Z, donc $Z_n = \mathbb{E}[Z|\mathscr{F}_n]$ pour tout $n \geq 0$. On a donc p.s.

$$Z_n = \mathbb{E}[g(X)|X_n] = 2^n \int_{X_n}^{X_n+2^{-n}} g(u)\mathrm{d}u.$$

5. D'après la question 4., pour tout $n \geq 0$,

$$f(X_n + 2^{-n}) - f(X_n) = \int_{X_n}^{X_n+2^{-n}} g(u)\mathrm{d}u \quad \text{p.s.}$$

Donc, pour tout $n \geq 0$ et pour tout $0 \leq k \leq 2^n - 1$,

$$f((k+1)2^{-n}) - f(k2^{-n}) = \int_{k2^{-n}}^{(k+1)2^{-n}} g(u)\mathrm{d}u$$

puis, en sommant, pour tout $0 \le k \le 2^n$,

$$f(k2^{-n}) \;=\; f(0) + \int_0^{k2^{-n}} g(u)\mathrm{d}u\,.$$

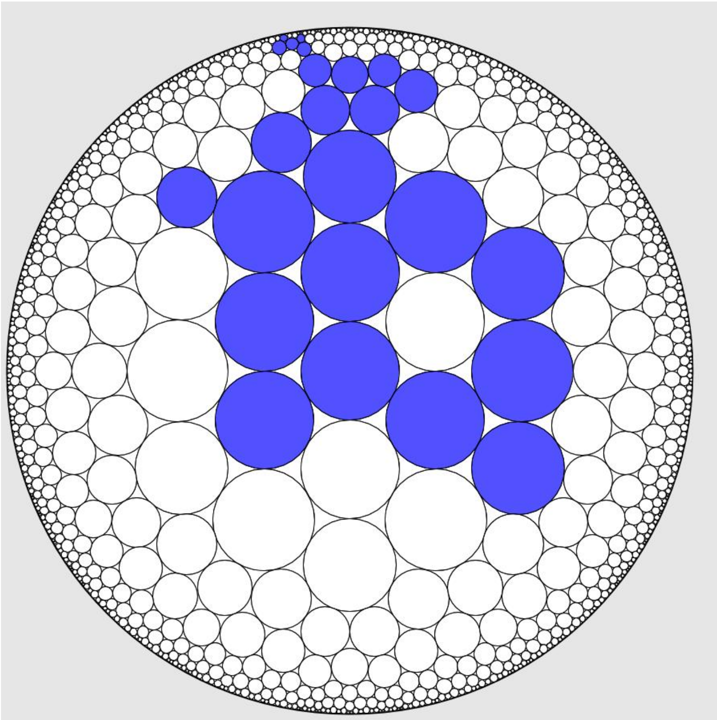
Ainsi, pour tout $x \in [0,1]$,

$$f\left(2^{-n}\lfloor 2^n x\rfloor\right) \;=\; f(0) + \int_0^{2^{-n}\lfloor 2^n x\rfloor} g(u)\mathrm{d}u$$

et en faisant tendre n vers l'infini, par continuité de f on obtient

$$f(x) \;=\; f(0) + \int_0^x g(u)\mathrm{d}u.$$

Exercice 6
Que représente la jolie image ci-dessous ?



Solution de l'exercice 6 Le but est d'illustrer l'exercice 1. Plus précisément, il s'agit d'un graphe planaire "hyperbolique" G, qui ne vérifie pas la propriété de Liouville. On a représenté G par un empilement de cercles : les cercles correspondent aux sommets du graphe, et deux cercles sont tangents si et seulement si les sommets correspondants sont reliés par une arête (un très joli théorème affirme qu'un graphe planaire peut toujours se représenter de la sorte). De plus, on a colorié en bleu les cercles visités par la marche aléatoire sur notre graphe. On peut montrer que presque sûrement, la marche aléatoire sur G converge vers un point aléatoire X_∞ au bord du disque. Cela permet de définir des fonctions harmoniques bornées non constantes sur G. En effet, soit f une fonction mesurable bornée sur $\partial\mathbb{D}$. Pour tout x, on pose $h(x) = \mathbb{E}_x\left[f(X_\infty)\right]$. En conditionnant sur le premier pas de la marche aléatoire, il est facile de vérifier que cette fonction est harmonique. Plus généralement, on peut définir ainsi des fonctions harmoniques sur tout graphe qui possède une notion naturelle de "bord", telle que la marche aléatoire converge p.s. vers un point du bord. Notons que cela ne marche pas si on remplace ce graphe par le réseau triangulaire, car l'empilement de cercle correspondant remplit le plan, et n'a donc pas de bord.