

# Aspects rigoureux de la mécanique statistique à l'équilibre

## TD A : équivalences entre modèles

Jérémie Bouttier et Guilhem Semerjian

20 février 2014

### 1 Couplage entre modèle de Potts et FK-percolation

On revisite la relation entre le modèle de Potts à  $q$  états et la FK-percolation dans un langage légèrement différent. On considère un graphe connexe fini  $G = (V, E)$  (non-orienté mais possiblement avec boucles et arêtes multiples) et la fonctionnelle  $\Psi : \{1, \dots, q\}^V \times \{0, 1\}^E \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\Psi(\eta, \omega) = \prod_{i \sim j} (v \delta_{\eta_i, \eta_j})^{\omega_{ij}}$$

où le produit porte sur toutes les arêtes du graphes,  $\delta$  est le symbole de Kronecker et  $v$  un réel positif (par convention  $0^0 = 1$ ).

1. Montrer que

$$\Psi_1(\eta) = \sum_{\omega} \Psi(\eta, \omega)$$

est le poids de Boltzmann de la configuration  $\eta$  dans le modèle de Potts à  $q$  états en champ nul sur  $G$ , et donner la relation entre  $v$  et température inverse  $\beta$ . En déduire que

$$Z = \sum_{\eta} \sum_{\omega} \Psi(\eta, \omega)$$

est la fonction de partition du modèle de Potts et que  $\Psi_1(\eta)/Z$  est la probabilité de Gibbs-Boltzmann de la configuration  $\eta$  dans le modèle de Potts.

2. Montrer que

$$\Psi_2(\omega) = \sum_{\eta} \Psi(\eta, \omega)$$

est proportionnel à

$$q^{C(\omega)} \prod_{e \in E} (p \delta_{\omega_e, 1} + (1-p) \delta_{\omega_e, 0})$$

où  $C(\omega)$  est le nombre de composantes connexes du sous-graphe associé à  $\omega$ , et  $p$  est une quantité qu'on reliera à  $v$ . La quantité  $\Psi_2(\omega)/Z$  est la probabilité de la configuration  $\omega$  dans le modèle de la *FK-percolation* sur  $G$ . (Comme expliqué en cours, le fait que  $\Psi_2(\omega)$  soit polynomial en  $q$  permet d'étendre le modèle aux valeurs non entières de  $q$ .)

3. Considérons deux sommets  $i, j$  non nécessairement voisins. Quelle est la probabilité d'avoir  $\eta_i = \eta_j$  dans le modèle de Potts à température nulle? À température infinie? Pour une température quelconque, relier cette probabilité à celle que  $i$  et  $j$  soient dans une même

composante connexe de  $\omega$  pour la FK-percolation. Discuter qualitativement pourquoi l'apparition d'un ordre à longue portée dans le modèle de Potts s'interprète comme l'apparition d'une composante géante dans la FK-percolation.

En termes probabilistes, la construction ci-dessus est un *couplage* (réalisation de variables aléatoires sur un même espace de probabilité), appelé couplage d'Edwards-Sokal.

## 2 Couplage entre modèle $O(n)$ et gaz de boucles

Toujours sur un graphe fini  $G = (V, E)$ , considérons une configuration de spins  $\vec{\sigma} \in (S^{n-1})^V$  où  $S^{n-1}$  est la sphère-unité de dimension  $n - 1$  :

$$S^{n-1} = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^n, \vec{u} \cdot \vec{u} = 1\}.$$

On considère ensuite le hamiltonien

$$H(\vec{\sigma}) = - \sum_{i \sim j} \ln(1 + x \vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j)$$

avec  $x < 1$ , et on se place à température inverse  $\beta = 1$ . La fonction de partition du modèle  $O(n)$  est donnée par

$$Z = \int e^{-H(\vec{\sigma})} \prod_{i \in V} d\mu(\vec{\sigma}_i)$$

où  $\mu$  la mesure de probabilité uniforme sur  $S^{n-1}$ , et la mesure de Gibbs-Boltzmann du modèle  $O(n)$  est  $(e^{-H(\vec{\sigma})}/Z) \prod_{i \in V} d\mu(\vec{\sigma}_i)$ .

1. Expliquer qualitativement pourquoi, bien qu'on ait supposé  $\beta = 1$ ,  $x$  joue néanmoins un rôle analogue à celui d'une température. Montrer que, pour  $n = 1$ , on retrouve précisément le hamiltonien du modèle d'Ising.
2. Pour  $\omega \in \{0, 1\}^E$ , posons

$$\Upsilon(\vec{\sigma}, \omega) = \prod_{i \sim j} (x \vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j)^{\omega_{ij}}.$$

Montrer que

$$e^{-H(\vec{\sigma})} = \Upsilon_1(\vec{\sigma}) := \sum_{\omega} \Upsilon(\vec{\sigma}, \omega).$$

3. Expliquer (sans calcul!) pourquoi

$$\begin{aligned} \int (\vec{u} \cdot \vec{u}_1) d\mu(\vec{u}) &= 0, \\ \int (\vec{u} \cdot \vec{u}_1)(\vec{u} \cdot \vec{u}_2) d\mu(\vec{u}) &= \frac{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2}{n}, \\ \int (\vec{u} \cdot \vec{u}_1)(\vec{u} \cdot \vec{u}_2)(\vec{u} \cdot \vec{u}_3) d\mu(\vec{u}) &= 0, \end{aligned}$$

quels que soient les vecteurs  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ .

4. Supposons que le graphe est trivalent (chaque sommet a exactement trois arêtes incidentes). Montrer que la quantité

$$\Upsilon_2(\omega) = \int \Upsilon(\vec{\sigma}, \omega) \prod_{i \in V} d\mu(\vec{\sigma}_i)$$

est non-nulle si et seulement si le sous-graphe associé à  $\omega$  est formé par l'union de cycles disjoints (en physique, on parle de *gaz de boucles*), et qu'on a alors

$$\Upsilon_2(\omega) = n^{L(\omega)} (x/n)^{|\omega|}$$

où  $L(\omega)$  est le nombre de cycles et  $|\omega|$  la somme de leurs longueurs. Expliquer pourquoi ceci permet de donner un sens à la fonction de partition du modèle  $O(n)$  pour  $n$  non entier.

5. Considérons deux sommets  $i, j$  non nécessairement voisins. Comment interpréter graphiquement la valeur moyenne de  $\vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j$  dans le modèle  $O(n)$ ? Qu'en est-il dans la limite  $n \rightarrow 0$ ?

### 3 Modèle de Potts à $q \rightarrow 0$

Montrer que, si on fait tendre  $q$  vers 0 dans le modèle de la FK-percolation en gardant le rapport  $v/q$  fixé, les configurations ayant une contribution dominante sont les *forêts couvrantes* (sous-graphes couvrants acycliques mais non nécessairement connexes). Si on garde plutôt le rapport  $v/q^\sigma$  fixé avec  $\sigma \in (0, 1)$ , montrer que les configurations dominantes sont les *arbres couvrants*. (Indication : le *nombre cyclomatique* du sous-graphe associé à  $\omega$ , défini par  $L(\omega) = |\omega| - |V| + C(\omega)$ , est un entier positif qui est nul si et seulement si le sous-graphe est acyclique.)