

# Aspects rigoureux de la mécanique statistique à l'équilibre

## TD B : exercices sur la percolation, dualité dans le modèle de Potts

Jérémie Bouttier et Guilhem Semerjian

20 mars 2014

### 1 Exercices sur la percolation

#### 1.1 Percolation par arêtes sur $\mathbb{Z}^2$ à $p = 1/2$

1. On note  $U_n$  le rectangle  $[-n, n] \times [0, 2n - 1]$  et on considère l'évènement  $A_n$  qu'il existe un chemin ouvert dans  $U_n$  reliant le bord gauche au bord droit. Montrer que  $\mathbb{P}_{1/2}(A_n) = 1/2$ . (Indication : que signifie l'évènement complémentaire pour la percolation duale?) En déduire que  $\mathbb{P}_{1/2}(0 \leftrightarrow \partial[-2n, 2n]^2) \geq 1/(4n)$ .
2. Notons  $C_n(x)$  l'évènement  $\{x \leftrightarrow x + \partial[-n, n]^2\}$ . En utilisant le résultat de la question précédente, montrer que  $\mathbb{P}_{1/2}(C_n(0) \circ C_n(0)) \geq 1/(4n)$ . Que peut-on en déduire pour  $\mathbb{P}_{1/2}(C_n(0))$ ?

#### 1.2 Percolation sur un arbre $m$ -aire infini

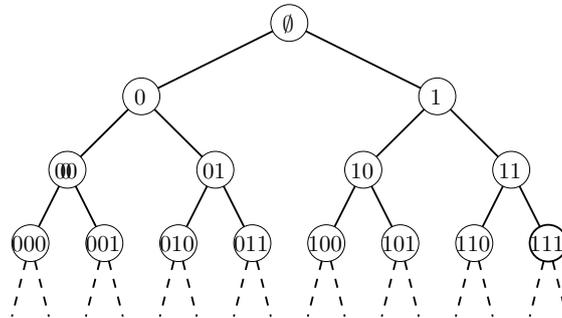


FIGURE 1 – L'arbre binaire infini, vu jusqu'à profondeur 3.

Soit  $m \in \mathbb{N}^*$ . L'arbre  $m$ -aire infini peut être défini comme le graphe dont l'ensemble des sommets est l'ensemble des mots sur un alphabet à  $m$  lettres, mettons  $\{0, \dots, m - 1\}$  :  $V = \bigcup_{n \geq 0} \{0, \dots, m - 1\}^n = \{\emptyset\} \cup \{0, \dots, m - 1\} \cup \{0, \dots, m - 1\}^2 \cup \dots$ , et où deux mots sont reliés par une arête si et seulement si leurs longueurs diffèrent de un et l'un est préfixe de l'autre. Cf figure 1.2 pour une illustration dans le cas  $m = 2$ . On considère la percolation par arête sur l'arbre  $m$ -aire.

1. Pour tout  $p$ , déterminer la probabilité que  $\emptyset$  soit dans une composante connexe infinie, et donner en particulier la probabilité critique  $p_c$ .
2. On note  $N_\infty$  le nombre de composantes connexes infinies. Montrer que pour tout  $p \in (p_c, 1)$ ,  $N_\infty = \infty$  presque sûrement.

## 2 Dualité dans le modèle de Potts et la FK-percolation

**Rappels** On se place sur un graphe connexe fini  $G = (V, E)$ . On rappelle que la fonction de partition du modèle de Potts à  $q$  états sur  $G$  (en champ magnétique nul)

$$Z_G(q, \beta) = \sum_{\eta \in \{1, \dots, q\}^V} e^{\beta \sum_{i \sim j} \delta_{\eta_i, \eta_j}} \quad (1)$$

peut se réécrire sous la forme

$$Z_G(q, \beta) = \sum_{\omega \in \{0, 1\}^E} q^{C(\omega)} v^{|\omega|} \quad (2)$$

où  $C(\omega)$  est le nombre de composantes connexes du graphe<sup>1</sup>  $\omega$ ,  $|\omega| = \sum_{e \in E} \omega_e$  est son nombre d'arêtes, et

$$v = e^\beta - 1. \quad (3)$$

Ceci amène à définir le modèle de la *FK-percolation* dans lequel un graphe  $\omega \in \{0, 1\}^E$  apparaît avec probabilité  $q^{C(\omega)} v^{|\omega|} / Z_G(q, \beta)$  (en cours nous avons introduit la quantité  $p = 1 - e^{-\beta}$  de manière à avoir une forme analogue à la percolation par arêtes de paramètre  $p$ ).

On suppose à présent que le graphe est *plan*, i.e. est dessiné dans le plan sans croisement d'arêtes. On note  $F$  l'ensemble des *faces* (composantes connexes du graphe dans le plan). Pour un graphe plan connexe, on a la relation d'Euler :

$$|V| - |E| + |F| = 2 \quad (4)$$

(vérifier cela sur le graphe de la figure 2(a), en ignorant pour l'instant les pointillés, et en n'oubliant pas de compter la face externe).

À tout graphe connexe plan on peut associer son graphe *dual*  $G^* = (V^*, E^*)$ , tel que  $V^*$  est en bijection avec  $F$  et  $E^*$  est en bijection avec  $E$ . À une configuration  $\omega \in \{0, 1\}^E$ , on associe la configuration duale  $\omega^*$  définie par  $\omega_{e^*}^* = 1 - \omega_e$  pour tout  $e \in E$ ,  $e^*$  étant l'arête duale. Cf figure 2(b), où on représente simultanément le graphe muni d'une configuration de la figure 2(a) et leurs duaux<sup>2</sup>, les arêtes ouvertes en trait plein et les arêtes fermées en pointillés. On considère  $Z_{G^*}(q, \beta)$  la fonction de partition du modèle de Potts sur  $G^*$ , notre but est de trouver une relation fonctionnelle entre  $Z_G(q, \beta)$  et  $Z_{G^*}(q, \beta)$ .

**Équivalence avec un modèle de boucles** On peut associer à  $(G, \omega)$  une configuration de boucles dessinées sur un certain graphe. Les étapes successives sont représentées sur la figure 2 :

- (a) On part d'un graphe  $G$  muni d'une configuration  $\omega$  (rouge).

---

1. On rappelle qu'à  $\omega \in \{0, 1\}^E$  on peut associer bijectivement le sous-graphe couvrant de  $(V, E)$  formé par les arêtes  $e$  telles que  $\omega_e = 1$ , qu'on note encore  $\omega$  par abus.

2. On pourra observer qu'ici le graphe dual n'est pas *simple*, car il possède une arête dont les deux extrémités sont confondues, et une paire d'arêtes doubles, ayant les mêmes deux extrémités. Ce détail peut être ignoré sans problème, on aurait également pu prendre  $G$  non-simple (dans la somme  $i \sim j$  de (1), les arêtes doubles comptent deux fois, etc).

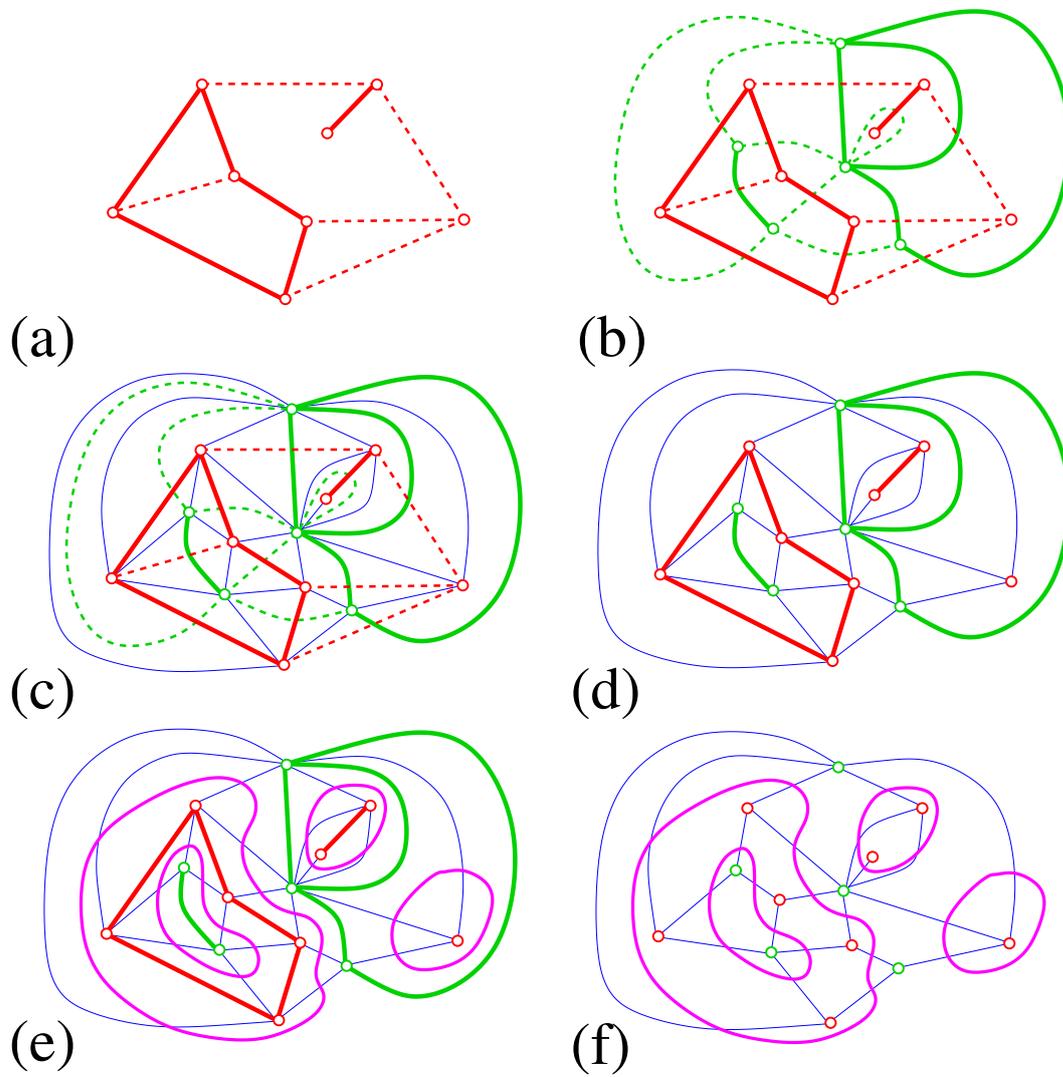


FIGURE 2 – Transformation de la FK-percolation en un modèle de boucles. Il est conseillé de visualiser cette figure en couleurs, la version en ligne est disponible à [http://www.math.ens.fr/enseignement/fiche\\_cours.html?cours=84](http://www.math.ens.fr/enseignement/fiche_cours.html?cours=84).

- (b) On superpose leurs duaux  $G^*$  et  $\omega^*$  (vert).
- (c) Dans chaque face du graphe superposé, on trace la diagonale (bleue) reliant un sommet de  $G$  (rouge) à un sommet de  $G^*$  (vert).
- (d) On efface les arêtes fermées de  $G$  et de  $G^*$ . Chaque face a 3 côtés (le graphe est une *triangulation*), deux bleus et un rouge ou vert.
- (e) On dessine des boucles (magenta) traversant les faces et les arêtes bleues de la triangulation (du point de vue des graphes, ces boucles “vivent” sur le dual de la triangulation).
- (f) On efface les arêtes rouges et vertes.

### Questions

1. Que dire du graphe bleu de la figure 2(f) ? Dépend-il de  $\omega$  ? Donner une règle locale permettant de tracer une configuration de boucles admissible.
2. La transformation est-elle bijective ? Qu’obtient-on en partant de  $(G^*, \omega^*)$  ?
3. Montrer le nombre de boucles  $L$  est donné par :

$$L = 2C(\omega) + |\omega| - |V|. \quad (5)$$

(Indication : écrire la relation d’Euler pour chaque composante connexe de  $\omega$ .)

4. Réexprimer le poids  $q^{C(\omega)}v^{|\omega|}$  dans le modèle de boucles.
5. On considère à présent la FK-percolation sur  $G^*$ , où une configuration  $\omega^*$  reçoit un poids  $q^{C(\omega^*)}(v^*)^{|\omega^*|}$ . Montrer que pour un certain choix de  $v^*$ , ce poids est proportionnel à  $q^{C(\omega)}v^{|\omega|}$  (avec une constante de proportionnalité indépendante de  $\omega$ ). En déduire une relation entre  $Z_G(q, \beta)$  et  $Z_{G^*}(q, \beta^*)$  en précisant la relation entre  $\beta$  et  $\beta^*$ . Donner également la relation entre  $p$  et  $p^* = 1 - e^{-\beta^*}$ , les “porosités” de la FK-percolation.
6. (Facultatif) Trouver le hamiltonien d’un modèle de spins à symétrie  $O(n)$  dont la fonction de partition coïncide avec celle du modèle de boucles. Quelle est la relation entre  $n$  et  $q$  ? (Indication : les spins vivent sur les arêtes du graphe bleu.)
7. On suppose à présent que  $G$  est une “boîte” finie du réseau carré ( $V = \mathbb{Z}^2 \cap [-n, n]^2$ ). On fait l’hypothèse que lorsque  $n \rightarrow \infty$ , la densité d’énergie libre thermodynamique  $f(\beta) = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta|V|} \ln Z_G(q, \beta)$  développe une unique singularité en une température critique  $\beta_c$ . Donner la valeur de  $\beta_c$ , et de  $p_c$  pour la FK-percolation. Qu’obtient-on dans le cas  $q = 1$  ?  $q = 2$  ?