Géométrie Différentielle, TD bonus du 30 mai 2015

1. Forme volume canonique d'une sous-variété orientée de l'espace euclidien

1– Soit M une sous-variété orientée de dimension d de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe une unique forme volume ω sur M telle que si $x \in M$ et $e_1, \ldots, e_d$ est une base orthonormale (pour la structure euclidienne induite par celle de $\mathbb{R}^n$) directe (au sens de l'orientation de M) de T_xM,

$$\omega_x(e_1, \ldots, e_d) = 1.$$

2– On prend $M = \mathbb{S}^{n-1}$. Montrer que ω est la restriction à $\mathbb{S}^{n-1}$ de

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x_i \, \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \widehat{\mathrm{d}x_i} \ldots \wedge \mathrm{d}x_n.$$

3– Exprimer l'intégrale sur la sphère de cette forme volume, en fonction du volume de la boule unité de $\mathbb{R}^n$.

2. Sommes de normales

On considère la sphère unité $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$. Soit M une partie de $\mathbb{S}^2$ délimitée par une sous-variété de dimension 1 fermée ∂M de $\mathbb{S}^2$, de sorte que M est une variété à bord de bord ∂M.

On munit M et ∂M des formes volumes canoniques, qu'on note da et ds. Si $x \in \mathbb{S}^2$, on note $N(x)$ le vecteur normal unitaire sortant. Si $x \in \partial M$, on note $n(x)$ le vecteur tangent à la sphère en x qui est le vecteur normal unitaire sortant à ∂M.

Montrer que :

$$\int_{\partial M} n(x) ds + 2 \iint_M N(x) da = 0.$$

3. Champs de vecteurs dépendant du temps

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant 0 et I un intervalle ouvert contenant 0. Soit $t \mapsto X_t, t \in I$, une famille lisse de champs de vecteurs sur U. On cherche à construire une famille de difféomorphismes φ_t, définis sur un voisinage V de 0 dans U et pour t suffisamment petit, telle que $\varphi_0 = \mathrm{Id}_V$ et $\frac{d}{dt}\varphi_t(x) = X_t(\varphi_t(x))$.

1– On note Y le champ de vecteurs $Y(t, x) = (1, X_t(x))$ sur $I \times U$. On note $s \mapsto \psi_s$ son flot. Vérifier que $\psi_s(0, x) = (s, \varphi_s(x))$, avec $\frac{d}{dt}\varphi_t(x) = X_t(\varphi_t(x))$ et $\varphi_0 = \mathrm{Id}_U$.

2– Montrer que φ_s est un difféomorphisme d'un ouvert U_s contenant 0 vers un autre ouvert. Montrer plus précisément, que pour s petit, les φ_s sont définies sur un même ouvert V de U.

3– Inversement, soit φ_t, $t \in I$, une famille lisse de difféomorphismes sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ avec $\varphi_0 = \mathrm{Id}_U$. Montrer qu'il existe une famille lisse $t \mapsto X_t$ de champs de vecteurs tels que $\frac{d}{dt}\varphi_t(x) = X_t(\varphi_t(x))$.

4. Méthode du chemin

On rappelle la formule magique de Cartan : si X est un champ de vecteurs et α une forme différentielle, alors $L_X\alpha = d(\iota_X\alpha)+\iota_X(d\alpha)$. On aura de plus besoin d'une généralisation au cas des champs de vecteurs dépendant du temps : si φ_t est une famille de difféomorphismes tels que $\varphi_0 = \mathrm{Id}$ et si X_t est le champ de vecteurs dépendant du temps correspondant alors

$$\frac{d}{ds}\varphi_s^*(\alpha)_{|s=t} = \varphi_t^*(d(\iota_{X_t}\alpha) + \iota_{X_t}(d\alpha)).$$

La *méthode du chemin* consiste à construire un difféomorphisme vérifiant telle propriété en construisant une famille de difféomorphismes à partir du champ de vecteurs correspondant.

1– **Première application :** Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^{2n}$ contenant 0 et ω une forme symplectique sur U, c'est-à-dire une forme de degré 2 telle que $d\omega = 0$ et non dégénérée, au sens où, pour tout x dans U, ω_x est une forme bilinéaire antisymétrique non dégénérée sur T_xU.

   On veut montrer que, dans un bon système de coordonnées, ω s'écrit $\sum_{i=1}^n dx^i \wedge dx^{i+n}$. Montrer qu'on peut supposer $\omega_0 = (\sum_{i=1}^n dx^i \wedge dx^{i+n})_0$.

2– On pose $\widetilde{\omega} = \sum_{i=1}^n dx^i \wedge dx^{i+n}$ et $\omega_t = t\omega + (1-t)\widetilde{\omega}$. Montrer que, sur un voisinage de 0, les ω_t sont des formes symplectiques.

3– Si φ_t est une famille de difféomorphismes, que vaut $\frac{d}{ds}\varphi_s^*(\omega_s)_{|s=t}$?

4– Soit α une 1-forme telle que $d\alpha = \widetilde{\omega} - \omega$ (existence locale garantie par le lemme de Poincaré). Montrer qu'il existe un champ de vecteurs dépendant du temps tel que $\iota_{X(t)}\omega_t = \alpha$.

5– Conclure ; c'est le lemme de Darboux.

6– **Deuxième application :** Soient ω_0 et ω_1 deux formes volume de même intégrale sur une variété compacte M de dimension n. On va montrer qu'il existe un difféomorphisme φ tel que $\varphi^*(\omega_1) = \omega_0$. On pose $\omega_t = (1-t)\omega_0 + t\omega_1$. Montrer que ω_t est une forme volume pour tout t.

7– Montrer que si α est une forme de degré $n-1$, il existe un champ de vecteurs dépendant du temps X_t tel que $\iota_{X_t}\omega_t = \alpha$.

   On généralise alors le premier exercice et on montre que les φ_t correspondant à X_t sont des difféomorphismes de M dans lui-même.

8– On admet qu'il existe α une forme de degré $n-1$ telle que $d\alpha = \omega_0 - \omega_1$. Conclure, comme précédemment ; c'est le théorème de Moser.

5. Théorème de d'Alembert-Gauss

Soit $P = \sum a_k z^k$ un polynôme à coefficients complexes de degré $n \geqslant 1$. On montre que l'application polynomiale définie par P est surjective.

1– Montrer que l'application polynomiale de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par P s'étend en une application lisse f de $\widehat{\mathbb{C}}$ dans $\widehat{\mathbb{C}}$.

2– Montrer que f a un nombre fini de points critiques. Quand le point à l'infini est-il un point critique ?

3– Soit y une valeur régulière dans l'image de f. Montrer qu'il existe un voisinage V_y de y dans $\widehat{\mathbb{C}}$ et un nombre fini d'ouverts disjoints U_i de $\widehat{\mathbb{C}}$ tels que $f^{-1}(V_y) = \bigcup U_i$ et tels que la restriction de f à chaque U_i réalise un difféomorphisme de U_i sur V_y.

4– Montrer que toutes les fibres de f au-dessus des valeurs régulières (i.e. les préimages $f^{-1}(y)$) sont toutes de même cardinal et conclure.