Géométrie Différentielle, TD bonus du 30 mai 2015

1. Forme volume canonique d'une sous-variété orientée de l'espace euclidien

1– Soit M une sous-variété orientée de dimension d de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe une unique forme volume ω sur M telle que si $x \in M$ et $e_1, \ldots, e_d$ est une base orthonormale (pour la structure euclidienne induite par celle de $\mathbb{R}^n$) directe (au sens de l'orientation de M) de T_xM,

$$\omega_x(e_1, \ldots, e_d) = 1.$$

2– On prend $M = \mathbb{S}^{n-1}$. Montrer que ω est la restriction à $\mathbb{S}^{n-1}$ de

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x_i \, \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \widehat{\mathrm{d}x_i} \ldots \wedge \mathrm{d}x_n.$$

3– Exprimer l'intégrale sur la sphère de cette forme volume, en fonction du volume de la boule unité de $\mathbb{R}^n$.

Solution :

1– L'unicité est évidente car la condition détermine ω_x pour tout $x \in M$.

Pour montrer l'existence, il faut vérifier le caractère $\mathcal{C}^\infty$ de ω. Faisons-le au voisinage de $x \in M$. Pour cela on choisit un ouvert U de $\mathbb{R}^d$ et $F : U \to M$ un paramétrage local orienté de M au voisinage de x. On note $u = F^{-1}(x)$. Soit $(a_1, \ldots, a_d)$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$ et $(e_1, \ldots, e_d)$ une base orthonormale directe de T_xM. Alors :

$$\begin{aligned}\omega_{F(u)}(T_uF(a_1), \ldots, T_uF(a_d)) &= \det(\langle T_uF(a_i), e_j\rangle_{1\leqslant i,j\leqslant d})) \\ &= (\det(\langle T_uF(a_i), T_uF(a_j)\rangle_{1\leqslant i,j\leqslant d}))^{1/2}\end{aligned}$$

où l'on a pris la racine positive, car le paramétrage local respecte les orientations.

On a montré la formule ci-dessous qui prouve, comme voulu, le caractère $\mathcal{C}^\infty$ de ω :

$$F^*\omega = (\det(\langle T_uF(a_i), T_uF(a_j)\rangle_{1\leqslant i,j\leqslant d}))^{1/2} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_d.$$

Autre preuve : on montre qu'on peut trouver des sections lisses $s_1, \ldots, s_d$ de T_xM formant en tout point une base orthonormée directe : vu la définition de ω, ceci prouvera le caractère lisse. On se ramène à la situation locale suivante : soit U ouvert de $\mathbb{R}^d$ et g une application lisse de U dans l'ensemble des matrices symétriques définies positives de taille d. Alors il existe d application $a_1, \ldots, a_d$ de U dans $\mathbb{R}^d$ telles que $(a_1(u), \ldots, a_d(u))$ est orthonormée pour $g(u)$ pour tout u. Pour montrer cela, on part d'une base quelconque fixe de $\mathbb{R}^d$ et on applique en tout point le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt ; ceci donne une base, dépendant de façon lisse de u, car g est une fonction lisse de u.

2– On vérifie aisément que la forme ω définie sur $\mathbb{S}^{n-1}$ par la formule $\omega_x(v_1,\dots,v_{n-1}) = \det(x, v_1, \dots, v_{n-1})$ vérifie les propriétés requises, et est donc (par unicité) la forme volume canonique sur $\mathbb{S}^{n-1}$. Que cette forme coïncide avec celle donnée dans l'énoncé résulte juste du développement du déterminant suivant la première colonne.

3– On calcule $d\sigma = n\,\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n$. On peut alors appliquer la formule de Stokes : en notant $\mathbb{B}^n$ la boule unité,

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \sigma|_{\mathbb{S}^{n-1}} = n \int_{\mathbb{B}^n} \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n.$$

On reconnaît le volume d'une boule connu classiquement (procéder par récurrence sur n, appliquer Fubini, faire un changement de variables trigonométrique et reconnaître une intégrale de Wallis). Tous calculs faits,

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \omega = \frac{n\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}.$$

2. Sommes de normales

On considère la sphère unité $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$. Soit M une partie de $\mathbb{S}^2$ délimitée par une sous-variété de dimension 1 fermée ∂M de $\mathbb{S}^2$, de sorte que M est une variété à bord de bord ∂M.

On munit M et ∂M des formes volumes canoniques, qu'on note da et ds. Si $x \in \mathbb{S}^2$, on note $N(x)$ le vecteur normal unitaire sortant. Si $x \in \partial M$, on note $n(x)$ le vecteur tangent à la sphère en x qui est le vecteur normal unitaire sortant à ∂M.

Montrer que :

$$\int_{\partial M} n(x)ds + 2\iint_M N(x)da = 0.$$

Solution :

On va considérer des formes différentielles à valeurs dans $\mathbb{R}^3$. Les formules usuelles restent valables en raisonnant coordonnées par coordonnées dans $\mathbb{R}^3$.

Introduisons la 1-forme différentielle ω sur $\mathbb{R}^3$ donnée par $\omega_x(v) = -x \times v$, où $\times$ désigne le produit vectoriel. En particulier, on vérifie que $\omega|_{\partial M} = n(x)ds$.

Introduisons la 2-forme différentielle α sur $\mathbb{R}^3$ donnée par $\alpha_x(v_1, v_2) = v_1 \times v_2$. En particulier, on vérifie que $\alpha|_M = N(x)da$.

On calcule de plus que $\mathrm{d}\omega = -2\alpha$. Par exemple, la première coordonnée de ω est donnée par $x_3dx_2 - x_2dx_3$, de sorte que la première coordonnée de $\mathrm{d}\omega$ est donnée par $-2dx_2 \wedge dx_3$. Mais la première coordonnée de α est bien $dx_2 \wedge dx_3$.

On applique alors le théorème de Stokes : $\int_{\partial M} n(x)ds = \int_{\partial M} \omega = \iint_M \mathrm{d}\omega = -2\iint_M \alpha = -2\iint_M N(x)da$

3. Champs de vecteurs dépendant du temps

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant 0 et I un intervalle ouvert contenant 0. Soit $t \mapsto X_t, t \in I$, une famille lisse de champs de vecteurs sur U. On cherche à construire une famille de difféomorphismes φ_t, définis sur un voisinage V de 0 dans U et pour t suffisamment petit, telle que $\varphi_0 = \mathrm{Id}_V$ et $\frac{d}{dt}\varphi_t(x) = X_t(\varphi_t(x))$.

1– On note Y le champ de vecteurs $Y(t,x) = (1, X_t(x))$ sur $I \times U$. On note $s \mapsto \psi_s$ son flot. Vérifier que $\psi_s(0,x) = (s, \varphi_s(x))$, avec $\frac{d}{dt}\varphi_t(x) = X_t(\varphi_t(x))$ et $\varphi_0 = \mathrm{Id}_U$.

2– Montrer que φ_s est un difféomorphisme d'un ouvert U_s contenant 0 vers un autre ouvert. Montrer plus précisément, que pour s petit, les φ_s sont définies sur un même ouvert V de U.

3– Inversement, soit φ_t, $t \in I$, une famille lisse de difféomorphismes sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ avec $\varphi_0 = \mathrm{Id}_U$. Montrer qu'il existe une famille lisse $t \mapsto X_t$ de champs de vecteurs tels que $\frac{d}{dt}\varphi_t(x) = X_t(\varphi_t(x))$.

Solution :

Voir le livre de Jacques Lafontaine, III.F

4. Méthode du chemin

On rappelle la formule magique de Cartan : si X est un champ de vecteurs et α une forme différentielle, alors $L_X\alpha = d(\iota_X\alpha) + \iota_X(d\alpha)$. On aura de plus besoin d'une généralisation au cas des champs de vecteurs dépendant du temps : si φ_t est une famille de difféomorphismes tels que $\varphi_0 = \mathrm{Id}$ et si X_t est le champ de vecteurs dépendant du temps correspondant alors

$$\frac{d}{ds}\varphi_s^*(\alpha)_{|s=t} = \varphi_t^*(d(\iota_{X_t}\alpha) + \iota_{X_t}(d\alpha)).$$

La *méthode du chemin* consiste à construire un difféomorphisme vérifiant telle propriété en construisant une famille de difféomorphismes à partir du champ de vecteurs correspondant.

1– **Première application :** Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^{2n}$ contenant 0 et ω une forme symplectique sur U, c'est-à-dire une forme de degré 2 telle que $d\omega = 0$ et non dégénérée, au sens où, pour tout x dans U, ω_x est une forme bilinéaire antisymétrique non dégénérée sur T_xU.

On veut montrer que, dans un bon système de coordonnées, ω s'écrit $\sum_{i=1}^n dx^i \wedge dx^{i+n}$. Montrer qu'on peut supposer $\omega_0 = (\sum_{i=1}^n dx^i \wedge dx^{i+n})_0$.

2– On pose $\widetilde{\omega} = \sum_{i=1}^n dx^i \wedge dx^{i+n}$ et $\omega_t = t\omega + (1-t)\widetilde{\omega}$. Montrer que, sur un voisinage de 0, les ω_t sont des formes symplectiques.

3– Si φ_t est une famille de difféomorphismes, que vaut $\frac{d}{ds}\varphi_s^*(\omega_s)_{|s=t}$?

4– Soit α une 1-forme telle que $d\alpha = \widetilde{\omega} - \omega$ (existence locale garantie par le lemme de Poincaré). Montrer qu'il existe un champ de vecteurs dépendant du temps tel que $\iota_{X(t)}\omega_t = \alpha$.

5– Conclure ; c'est le lemme de Darboux.

6– **Deuxième application :** Soient ω_0 et ω_1 deux formes volume de même intégrale sur une variété compacte M de dimension n. On va montrer qu'il existe un difféomorphisme φ tel que $\varphi^*(\omega_1) = \omega_0$. On pose $\omega_t = (1-t)\omega_0 + t\omega_1$. Montrer que ω_t est une forme volume pour tout t.

7– Montrer que si α est une forme de degré $n-1$, il existe un champ de vecteurs dépendant du temps X_t tel que $\iota_{X_t}\omega_t = \alpha$.

On généralise alors le premier exercice et on montre que les φ_t correspondant à X_t sont des difféomorphismes de M dans lui-même.

8– On admet qu'il existe α une forme de degré $n-1$ telle que $d\alpha = \omega_0 - \omega_1$. Conclure, comme précédemment ; c'est le théorème de Moser.

Solution :

Voir le livre de Jacques Lafontaine, III.F et exercice 17 du chapitre V et 19 du chapitre VII.

5. Théorème de d'Alembert-Gauss

Soit $P = \sum a_k z^k$ un polynôme à coefficients complexes de degré $n \geqslant 1$. On montre que l'application polynomiale définie par P est surjective.

1– Montrer que l'application polynomiale de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par P s'étend en une application lisse f de $\widehat{\mathbb{C}}$ dans $\widehat{\mathbb{C}}$.

2– Montrer que f a un nombre fini de points critiques. Quand le point à l'infini est-il un point critique ?

3– Soit y une valeur régulière dans l'image de f. Montrer qu'il existe un voisinage V_y de y dans $\widehat{\mathbb{C}}$ et un nombre fini d'ouverts disjoints U_i de $\widehat{\mathbb{C}}$ tels que $f^{-1}(V_y) = \bigcup U_i$ et tels que la restriction de f à chaque U_i réalise un difféomorphisme de U_i sur V_y.

4– Montrer que toutes les fibres de f au-dessus des valeurs régulières (i.e. les préimages $f^{-1}(y)$) sont toutes de même cardinal et conclure.

Solution :

1– On note ∞ le point à l'infini de $\widehat{\mathbb{C}}$ vu comme compactifié d'Alexandroff de $\mathbb{C}$. On pose $f(\infty) = \infty$. Il s'agit alors de vérifier que f est lisse au voisinage de ∞. Par définition de la structure de variété différentielle sur $\widehat{\mathbb{C}}$, il suffit de montrer que l'application $z \mapsto$

$P(z^{-1})^{-1}$ bien définie sur un voisinage épointé de 0 s'étend en 0 en une application lisse (s'annulant en 0). On calcule $P(z^{-1})^{-1} = \frac{z^n}{\sum a_k z^{n-k}}$. Comme $a_n \neq 0$, le résultat est clair.

2– Un point $z \neq \infty$ est critique si, et seulement si, $P'(z) = 0$. En effet, la différentielle d'une application polynomiale de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ s'identifie à sa dérivée formelle, nombre complexe vu comme application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Donc, il y a un nombre fini de points critiques dans $\mathbb{C}$, et donc un nombre fini de points critiques pour f (au pire, on ajoute le pôle Nord). L'expression précédente de f dans des cartes au voisinage de l'infini montre que ∞ est un point critique si, et seulement si, $n \geqslant 2$.

3– La fibre de f au-dessus de y est compact, comme fermé dans un compact, et discrète car, d'après le théorème d'inversion locale, si $f(x) = y$, f réalise un difféomorphisme local d'un voisinage de x dans un voisinage de y. Donc cette fibre est finie. On note x_i les points dans cette fibre. Par le théorème d'inversion locale, il existe U_i voisinage de x_i et V_i voisinage de y tel que f réalise un difféomorphisme de U_i dans V_i. On peut bien sûr supposer les U_i disjoints, et même les V_i égaux à un même ouvert V relativement compact, quitte à prendre l'intersection des V_i pour V_y et sa préimage par f, intersectée avec U_i, comme nouveau U_i. Soit K un voisinage compact de V, alors $f^{-1}(K)$ est compact par propreté et $f^{-1}(K) - \bigcup U_i$ également. On pose $W = V - f(f^{-1}(K) - \bigcup U_i)$; c'est un ouvert car $f(f^{-1}(K) - \bigcup U_i)$ est compact. Par construction, les fibres au-dessus des points de W ont toutes cardinal k.

4– Remarquons que l'image de f est fermée car image continue d'un compact. En particulier, si y n'est pas dans l'image de f ; tout un voisinage de y n'est pas dans l'image de f. Ceci et la question précédente prouvent que le cardinal de la fibre au-dessus de z est une fonction localement constante, pour z variant dans l'ensemble des valeurs non critiques. Comme cet ensemble est le complémentaire dans $\widehat{\mathbb{C}}$ d'un ensemble fini, il est connexe. Ainsi, toutes les fibres au-dessus des valeurs régulières ont même cardinal. Ce cardinal ne peut pas être nul : sinon, f n'aurait que des valeurs critiques et P serait un polynôme constant. Donc, toute valeur régulière est atteinte par f ; comme par définition f atteint les valeurs critiques, f est surjective. Donc P aussi, comme application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.