Autours du polynôme de Jones

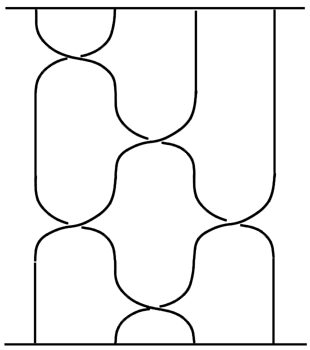
Raphaël Beuzart, Jean-Baptiste Teyssier

La définition primitive d'un noeud est celle d'un plongement de $\mathbb{S}_1$ dans $\mathbb{R}^3$. Deux noeuds seront dits équivalents si on peut passer de l'un à l'autre par une isotopie. La question qui se pose alors est celle de la classification de tels objets, et en particulier la construction d'invariants permettant de les distinguer.
Ce mémoire a été construit autour d'un invariant particulier appellé polynôme de Jones, dont une des propriétés remarquables est de détecter le caractère chiral d'un noeud, c'est-à-dire le fait qu'il soit distinct de son image dans un miroir. Dans une première partie, on montre que le polynôme de Jones peut s'obtenir à l'aide d'une modification convenable d'une représentation du groupe de tresse. On en déduira les relations de Skein qu'il vérifie, permettant un calcul explicite. La seconde partie, dont le principe repose sur des idées de mécanique quantique, est consacrée à l'élaboration d'une méthode systématique de construction d'invariants d'enchevêtrement, modulo la connaissance de deux matrices R et h dont on déterminera les propriétés. Un calcul montrera que le polynôme de Jones se retrouve effectivement par cette méthode. Enfin, on se pose la question de savoir comment obtenir des matrices R et h auxquelles le procédé précédent peut s'appliquer. On va pour cela être amené à définir la notion d'algèbre de Hopf, et à l'enrichir successivement d'éléments remarquables pour aboutir à la notion d'algèbre de Hopf rubannée. Fort de ce procédé industriel de fabrication, on verra que le polynôme de Jones s'avère être justement l'invariant issu de l'algèbre de Hopf rubannée obtenue par déformation de l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{sl}(2)$.
Nous voudrions remercier Marc Rosso pour la richesse de ce sujet ainsi que pour l'initiative qu'il nous a laissé prendre durant notre exploration.

1 Groupes de tresse et invariant de noeuds.

1.1 Notion de tresse.

De façon abstraite une tresse à n brins est l'union de n brins plongés dans $\mathbb{R}^2 \times [0,1]$ tel que son bord soit $\{1,\ldots,n\} \times \{0\} \times \{0,1\}$ et telle qu'aucun brin n'ait de point critique selon la coordonnée verticale. Ainsi si après avoir attaché n fils à un plafond et les avoir emmelés on les rattache au plancher, on obtient une tresse à n brins. Les tresses sont définies à isotopie près (préservant le bord).
Toute tresse à n brins est obtenue à partir des σ_i et σ_i^{-1} en les recollant verticalement.

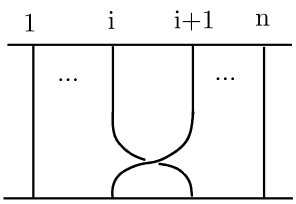


la tresse $\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_2^{-1}$

L'ensemble des classes d'isotopie de tresses est muni d'une structure de groupe, le produit de deux tresses étant obtenu en les recollant verticalement. De façon plus formelle le groupe de tresse à n brins, noté B_n, est le quotient du groupe libre engendré par $\sigma_1,\ldots,\sigma_{n-1}$ par les relations suivantes :

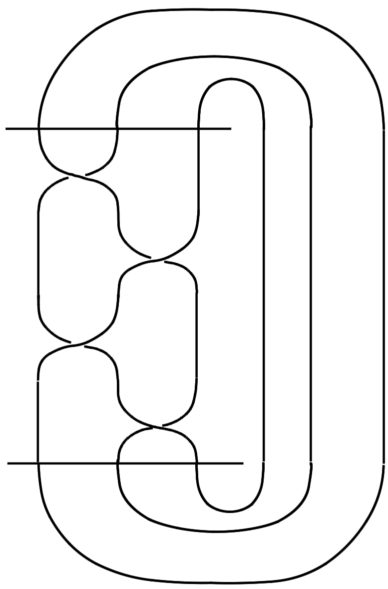
$$\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i(|i-j|>1) \tag{1}$$

$$\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}(i=1,\ldots,n-2) \tag{2}$$



σ_i

Le fait que les deux définitions du groupe de tresses données ci-dessus soient équivalentes n'est pas démontré ici. La clôture d'une tresse est le noeud obtenu en recollant les bouts du bas avec les bouts du haut comme dans l'exemple suivant.



clôture de $\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_2^{-1}$

On peut montrer que tout noeud peut être obtenu à isotopie près comme la clôture d'une tresse. Il est alors légitime de se demander sur quels critères deux tresses ont même clôture (toujours à isotopie près). On a de ce fait le théorème suivant :

Théorème 1.1.1. *Soient b et b' deux tresses, L et L' leurs clôtures respectives. Alors L est isotopique à L' en tant que noeud orienté si et seulement si on peut relier b à b' par les mouvements suivants :*

$$\textit{MI} : ab \longleftrightarrow ba \ \forall a, b \in B_n$$
$$\textit{MII} : b\sigma_n \longleftrightarrow b \longleftrightarrow b\sigma_n^{-1} \ \forall b \in B_n$$

MI et MII sont les mouvements de Markov. De façon informelle le théorème précédent nous permet d'écrire :

$$\textit{noeuds orientes/isotopie} = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)/\textit{mouvements MI et MII}$$

1.2 Représentation du groupe de tresses et R-matrice.

Notons qu'il existe un morphisme de groupe surjectif évident $B_n \to \mathfrak{S}_n$ qui à σ_i associe $(i, i+1)$. Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 2 de base $\{e_0, e_1\}$. On peut alors considérer la représentation $\psi_n : \mathfrak{S}_n \to End(V^{\otimes n})$ telle que :

$$\psi_n(s_i) = (Id_V)^{\otimes(i-1)} \otimes T \otimes (Id_V)^{\otimes(n-i-1)}$$

Où $T : V \otimes V \to V \otimes V$ est défini par $T(x \otimes y) = y \otimes x$. En composant par le morphisme naturel $B_n \to \mathfrak{S}_n$ on obtient une représentation de B_n. Toutefois le passage de B_n à $\mathfrak{S}_n$ fait perdre beaucoup d'informations sur le groupe B_n (pour s'en convaincre, il suffit par exemple de remarquer que B_n est infini, et pas $\mathfrak{S}_n$). On ne pourra donc pas en tirer un bon invariant de noeuds. On va cependant s'inspirer de la forme générale de cette représentation en cherchant des représentations de B_n, $\psi_n : B_n \to End(V^{\otimes n})$ sous la forme :

$$\psi_n(\sigma_i) = (Id_V)^{\otimes(i-1)} \otimes R \otimes (Id_V)^{\otimes(n-i-1)}$$

Pour une certaine application linéaire $R : V \otimes V \to V \otimes V$ différente de T. D'après (1) et (2), pour que ψ_n soit bien défini, il suffit que :

$$\psi_n(\sigma_i)\psi_n(\sigma_j) = \psi_n(\sigma_j)\psi_n(\sigma_i) \quad |i-j| > 1 \tag{3}$$

$$\psi_n(\sigma_i)\psi_n(\sigma_{i+1})\psi_n(\sigma_i) = \psi_n(\sigma_{i+1})\psi_n(\sigma_i)\psi_n(\sigma_{i+1}) \tag{4}$$

ψ_n vérifie toujours la condition (3). Afin que ψ_n vérifie la condition (4) il est nécessaire et suffisant que l'équation suivante soit vérifiée :

$$(R \otimes Id_V)(Id_V \otimes R)(R \otimes Id_V) = (Id_V \otimes R)(R \otimes Id_V)(Id_V \otimes R) \tag{5}$$

Cette équation est l'équation de dite de Yang-Baxter, que l'on rencontre aussi dans des modèles de physique statistique. Une solution de l'équation de Yang-Baxter sera appellée une R-matrice. Cherchons donc une R-matrice. On utilisera la notation $R(e_i \otimes e_j) = \sum R_{ij}^{kl} e_k \otimes e_l$ et on se restreindra à chercher des R-matrices qui vérifient $R_{ij}^{kl} = 0$ sauf si $i + j = k + l$ (condition appellée condition de conservation de la charge). V étant de dimension 2 la matrice de R dans la base $\{e_0 \otimes e_0, e_0 \otimes e_1, e_1 \otimes e_0, e_1 \otimes e_1\}$ a donc la forme suivante :

$$R = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & d & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

Par la condition de conservation de la charge, les opérateurs $Id_V \otimes R$ et $R \otimes Id_V$ préservent les quatre sous-espaces suivant $\{e_0 \otimes e_0 \otimes e_0\}$, $\{e_0 \otimes e_0 \otimes e_1, e_0 \otimes e_1 \otimes e_0, e_1 \otimes e_0 \otimes e_0\}$, $\{e_0 \otimes e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_0 \otimes e_1, e_1 \otimes e_1 \otimes e_0\}$ et $\{e_1 \otimes e_1 \otimes e_1\}$. Si on considère $V \oplus V \oplus V$ comme la somme directe de ces quatres sous-espaces, les applications linéaires précédentes ont pour forme :

$$R \otimes Id_V = (a) \oplus \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} b & c & 0 \\ d & e & 0 \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \oplus (f)$$
$$Id_V \otimes R = (a) \oplus \begin{pmatrix} b & c & 0 \\ d & e & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{pmatrix} \oplus (f)$$

Puis le calcul donne :

$$(R\otimes Id_V)(Id_V\otimes R)(R\otimes Id_V)$$
$$= (a^3)\oplus\begin{pmatrix} a^2b & abc & ac^2\\ abd & b^2e+acd & bce+ace\\ ad^2 & bde+ade & cde+ae^2\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix} b^2f+bcd & bcf+bce & c^2f\\ bdf+bde & cdf+be^2 & cef\\ d^2f & def & ef^2\end{pmatrix}\oplus(f^3)$$
$$(Id_V\otimes R)(R\otimes Id_V)(Id_V\otimes R)$$
$$= (a^3)\oplus\begin{pmatrix} ab^2+bcd & abc+bce & ac^2\\ abd+bde & acd+be^2 & ace\\ ad^2 & ade & a^2e\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix} bf^2 & bcf & c^2f\\ bdf & b^2e+cdf & bce+cef\\ d^2f & bde+def & cde+e^2f\end{pmatrix}\oplus(f^3)$$

Les conditions pour que R soit une R-matrices sont donc les suivantes :

$$b(cd+ab-a^2)=0,\ b(cd+bf-f^2)=0$$
$$e(cd+ae-a^2)=0,\ e(cd+ef-f^2)=0$$
$$bce=0,\ bde=0,\ be(b-e)=0$$

On prend ici $b=0$ et $c\neq 0$ des sorte que les équations à vérifier se retrouvent en un nombre bien plus limité :

$$a^2-ae=cd=f^2-ef$$

Ainsi :

$$e=a-\tfrac{cd}{a},\ (a-f)(a+f-e)=0.$$

Il apparaît donc deux cas : $a=f$ ou $a+f-e=0$, correspondant aux R-matrices suivantes :

$$R=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & c & 0\\ 0 & d & a-cd/a & 0\\ 0 & 0 & 0 & a\end{pmatrix},\ \text{où } R=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & c & 0\\ 0 & d & a-cd/a & 0\\ 0 & 0 & 0 & -cd/a\end{pmatrix}$$

La première de ces deux matrices va fournir le polynôme de Jones ,et la deuxième celui d'Alexander (que l'on obordera pas ici). En posant $a=t^{1/2}$ et $c=d=t$ la première matrice se réécrit sous la forme :

$$R=\begin{pmatrix} t^{1/2} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & t & 0\\ 0 & t & t^{1/2}-t^{3/2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & t^{1/2}\end{pmatrix}$$

Cette R-matrice définit donc comme indiqué précédemment une représentation du groupe B_n. On va construire à partir de cette représentation un invariant de noeuds en prenant pour un noeud L la trace de $\psi_n(b)$ où b est une tresse dont la clôture est L. Pour que l'invariant soit bien défini à isotopie près, il faut que les mouvements MI et MII ne perturbent en aucun cas sa valeur. Le fait que le mouvement MI n'ait aucun effet sur cet invariant candidat provient du fait bien connu de la trace $trace(AB)=trace(BA)$. Afin d'obtenir l'invariance par le mouvement MII, il faudrait que :

$$\begin{aligned}\forall b\in B_n, Tr(\psi_{n+1}(b\sigma_n)) &= Tr((\psi_n(b)\otimes Id_V)(Id_V^{\otimes(n-1)}\otimes R))\\ &= Tr(\psi_n(b))\\ &= Tr(\psi_{n+1}(b\sigma_n^{-1}))=Tr((\psi_n(b)\otimes Id_V)(Id_V^{\otimes(n-1)}\otimes R^{-1}))\end{aligned}$$

Or comme $Tr((\psi_n(b) \otimes Id_V)(Id_V^{\otimes(n-1)} \otimes R)) = Tr(\psi_n(b)(Id_V^{\otimes(n-1)} \otimes Tr_2(R)))$ et $Tr((\psi_n(b) \otimes Id_V)(Id_V^{\otimes(n-1)} \otimes R^{-1})) = Tr(\psi_n(b)(Id_V^{\otimes(n-1)} \otimes Tr_2(R^{-1})))$, il suffit pour vérifier cette condition que $Tr_2(R^{\pm 1}) = Id_V$. Malheureusement, ce n'est pas le cas ici. On va donc légèrement modifier notre trace.
Posons $h = \begin{pmatrix} t^{-1/2} & 0 \\ 0 & t^{1/2} \end{pmatrix}$. On a alors :

$$Tr_2((Id_V \otimes h)R) = Tr_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^{3/2} & 0 \\ 0 & t^{1/2} & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Id_V$$

$$Tr_2((Id_V \otimes h)R^{-1}) = Tr_2 \begin{pmatrix} t^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-t^{-1} & t^{-1/2} & 0 \\ 0 & t^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Id_V$$

Finalement,

$$\begin{aligned} Tr(h^{\otimes(n+1)}\psi_{n+1}(\sigma_n^{\pm 1} b)) &= Tr(h^{\otimes(n+1)}(Id_V^{\otimes(n-1)} \otimes R^{\pm 1})(\psi_n(b) \otimes Id_V)) \\ &= Tr(h^{\otimes n}(Id_V^{n-1} \otimes Tr_2((Id_V \otimes h)R^{\pm 1}))\psi_n(b)) \\ &= Tr(\psi_n(b)) \end{aligned}$$

Donc $Tr(h^{\otimes n}\psi_n(b))$ est invariant sous le mouvement MII .
Or, par la condition de conservation de la charge de la matrice R, on a :

$$R(h \otimes h) = (h \otimes h)R$$

On en déduit que $\psi_n(b)$ commute avec $h^{\otimes n}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} Tr(h^{\otimes n}\psi_n(b_1 b_2)) &= Tr(h^{\otimes n}\psi_n(b_1)\psi_n(b_2)) \\ &= Tr(\psi_n(b_2)h^{\otimes n}\psi_n(b_1)) \\ &= Tr(h^{\otimes n}\psi_n(b_2)\psi_n(b_1)) \\ &= Tr(h^{\otimes n}\psi_n(b_2 b_1)) \end{aligned}$$

d'où l'invariance sous le mouvement MI.

Proposition 1.2.1. *Soit L un noeud orienté et b une tresse dont la clôture est L. Alors $Tr(h^{\otimes n}\psi_n(b))$ est un invariant d'isotopie de L et sera noté $P(L)$. De plus, cet invariant est un polynôme de Laurent en $t^{1/2}$ vérifiant la relation suivante :*

$t^{-1}P($  $) - tP($  $) = (t^{-1/2} - t^{1/2})P($  $)$ (6)

Où l'on doit comprendre dans la relation précédente que l'on a simplement modifié localement le diagramme d'un noeud ainsi qu'indiqué selon les dessins.

La première partie de la proposition découle directement de ce qui précède. Pour la relation de récurrence, il suffit de remarquer que :

$$\begin{aligned} t^{-1}R - tR^{-1} &= t^{-1}\begin{pmatrix} t^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & t & t^{1/2}-t^{3/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^{1/2} \end{pmatrix} - t\begin{pmatrix} t^{-1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t^{-1/2}-t^{-3/2} & t^{-1} & 0 \\ 0 & t^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^{-1/2} \end{pmatrix} \\ &= (t^{-1/2} - t^{1/2}) Id_{V\otimes V} \end{aligned}$$

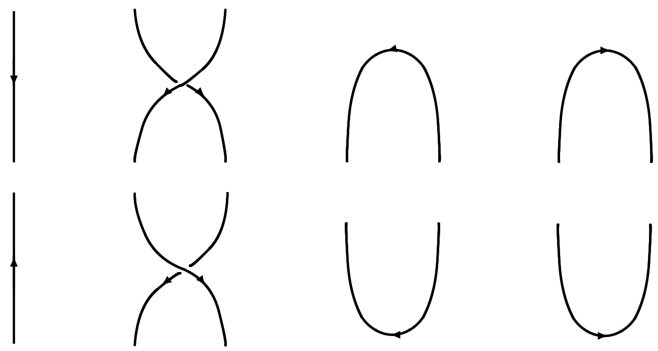
Puisque R, R^{-1} et $Id_{V\otimes V}$ correspondent respectivement à un croisement positif, un croisement négatifs et deux brins parallèles.
Alors, en normalisant P par $(t^{-1/2} - t^{1/2})$ on obtient un polynôme vérifiant toujours (6) et qui vaut 1 sur le noeud trivial. C'est le polynôme de Jones.

2 Opérateur invariant d'enchevêtrement.

2.1 Enchevêtrements.

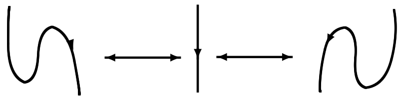
Définition 2.1.1. *On appelle enchevêtrements toute réunion finie disjointe T d'anneaux du type $S \times [0;1]$ et de bandes du type $[0;1] \times [0;1]$ immergés dans $\mathcal{R}^3$ tels que $T \in \mathcal{R} \times \mathcal{R} \times [0;1]$ et dont la frontière est incluse dans $\{0\} \times \mathcal{R} \times \{0,1\}$. Deux enchevêtrements sont dits isotopes s'ils sont reliés par une isotopie de $\mathcal{R}^2 \times [0;1]$ fixant les points frontières.*
On appellera enchevêtrements orienté un enchevêtrements dont chacune des composantes est orientée.

Tout enchevêtrement orienté se représente dans $\mathcal{R}^2$ par un diagramme orienté constitué des diagrammes élémentaires suivants :

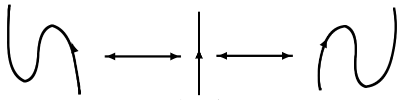


Si on cherche à ramener l'étude des enchevêtrements orientés à l'étude de leur diagramme dans le plan, il faut pouvoir remonter des diagrammes à leur enchevêtrements d'origine, donc en particulier savoir distinguer si deux diagrammes proviennent ou non de deux enchevêtrements isotopes. C'est l'objet du théorème suivant.

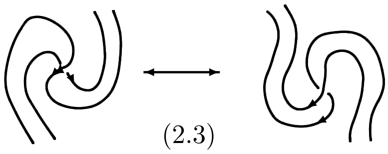
Théorème 2.1.1. *deux enchevêtrements sont isotopes si et seulement si on peut passer de l'un à l'autre de leur diagramme à l'aide d'un nombre fini de mouvements, appellés mouvements de Turaev définis de la manière suivante (on dira alors que deux tels diagrammes sont isotopes) :*



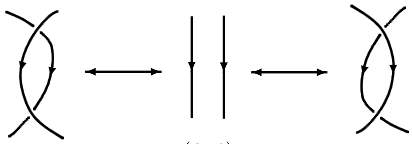
(2.1)



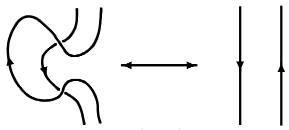
(2.2)



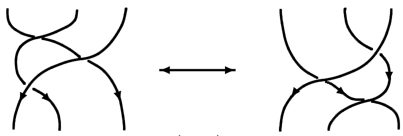
(2.3)



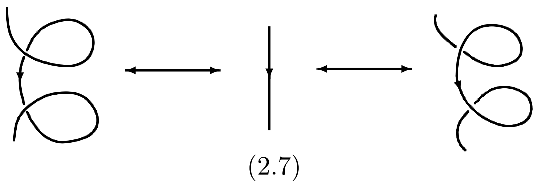
(2.4)



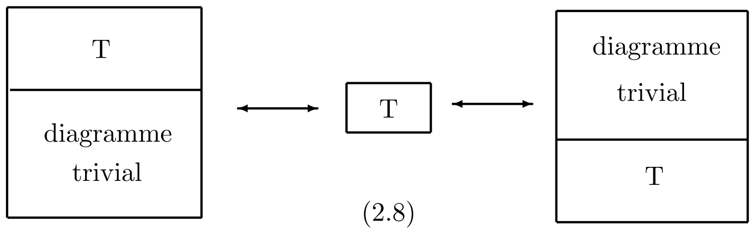
(2.5)



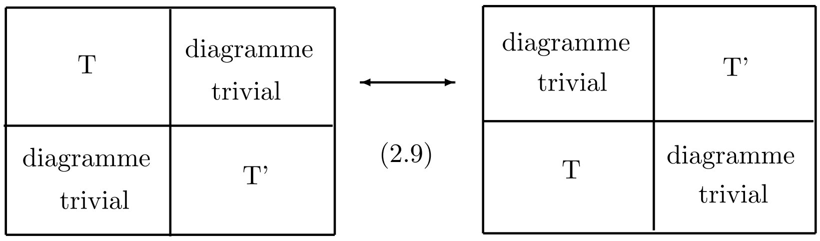
(1.6)



(2.7)


T
diagramme trivial
T
diagramme trivial
T

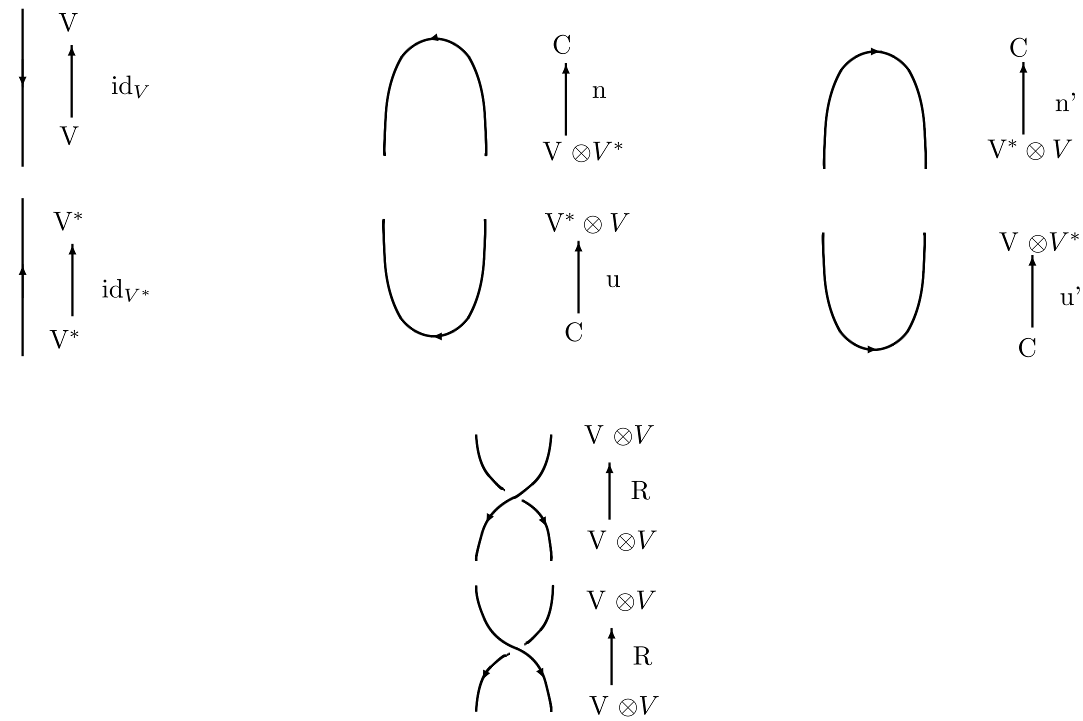
(2.8)


T
diagramme trivial
diagramme trivial
T'
diagramme trivial
T'
T
diagramme trivial

(2.9)

2.2 Opérateur invariant d'enchevêtrements orientés.

Quitte à réagencer un diagramme d'enchevêtrements orientés, on peut toujours le considérer découpé en tranches contenant au plus un diagramme non trivial. On se convainc facilement que cette opération préserve la classe d'isotopie de l'enchevêtrements de départ.On va alors construire un invariant d'enchevêtrements à partir de cette représentation en s'inspirant d'une idée issue de la physique quantique. Considérons un système de n particules évoluant sans collision dans un plan entre deux instants t_1 et t_2 selon une loi donnée par $(\vec{r}_1, ..., \vec{r}_1)$. Chaque état du système peut être alors assimilé à une " tranche de temps" via la fonction $t \longrightarrow ((t, \vec{r}_1), ..., (t, \vec{r}_1))$. En physique quantique, tout état d'un système se représente pas un vecteur d'un espace de Hilbert, le passage d'un état à un autre se faisant via un opérateur d'évolution. Dans le cas présent, quitte à réagencer un diagramme d'enchevêtrements orienté, on peut toujours le considérer découpé en tranches contenant au plus un diagramme non trivial. On se convainc facilement que cette opération préserve la classe d'isotopie de l'enchevêtrements de départ. Chaque tranche correspond alors à un état de notre sytème. A chaque intersection du diagramme et d'une ligne séparant deux tranches, on associe un $\mathbb{C}$ espace vectoriel. On place alors en bout de ligne de produit tensoriel le long de la ligne de tous ces espaces vectoriels. L'opérateur permettant de passer d'une tranche à l'autre est alors définit de la manière suivante :



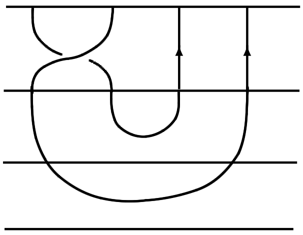
où V est un $\mathbb{C}$-ev de base (e_i), $R \in GL(V \otimes V)$ et $h \in End(V)$ définissant les opérateurs précédents comme suit : $\forall x \in V, \forall f \in V^*$

$$n(x \otimes f) = f(h(x))$$

$$n'(f \otimes x) = f(x) \qquad u(1) = \sum_{i=1}^{n} e_i^* \otimes h^{-1}(e_i)$$

$$u'(1) = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes e_i^*$$

On note $[D]$ la composée le long du diagramme D de tous les opérateurs associés aux tranches du diagrammes. Si la frontière supérieure de D contient j points et la frontière inférieure i points, alors $[D] \in End(V^{\otimes i}, V^{\otimes j})$. En particulier, pour un noeud, on a $[D] \in \mathbb{C}$.



$$
\begin{array}{c}
\text{V} \otimes V \otimes V^* \otimes V^* \\
\uparrow \ \text{R} \otimes id_{V^*} \otimes id_{V^*} \\
\text{V} \otimes V \otimes V^* \otimes V^* \\
\uparrow \ \text{id}_V \otimes u' \otimes id_{V^*} \\
\text{V} \otimes \mathbb{C} \otimes V^* \\
\uparrow \ \text{id}_{V^*} \otimes id_{V^*} \otimes u' \\
\text{V}^* \otimes V^* \otimes \mathbb{C}
\end{array}
$$

1

On va alors chercher les conditions que doivent remplir R et h pour que $[D]$ soit constant sur toutes les classes d'isotopie de diagramme d'enchevêtrements.
Introduisons tout d'abord quelques notations.
Si V est un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie et $A \in End(V \otimes V)$ de matrice (A^{ij}_{kl}), on définit $A^{\circlearrowright}$et $A^{\circlearrowleft}$ les applications linéraires de matrices respectives $((A^{\circlearrowright})^{ij}_{kl})$ et $((A^{\circlearrowleft})^{ij}_{kl})$ telles que

$$A^{ij}_{kl} = (A^{\circlearrowright})^{ki}_{lj} = (A^{\circlearrowleft})^{ik}_{jl} \tag{7}$$

Théorème 2.2.1. *Soit D un diagramme orienté d'enchevêtrement, V un $\mathbb{C}$-ev et $R \in GL(V \otimes V)$, $h \in End(V)$ satisfaisant les relations :*

$$R(h \otimes h) = (h \otimes h)R \tag{8}$$

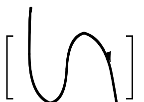
$$trace_2((id_V \otimes h)R^{\pm 1})) = c^{\pm 1} id_V \tag{9}$$

$$(R^{-1}) \circlearrowleft ((id_V \otimes h)R(h^{-1}) \otimes id_V)^{\circlearrowright} = id_V \otimes id_{V*} \tag{10}$$

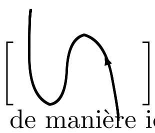
$$(R \otimes id_V)(id_V \otimes R)(R \otimes id_V) = (id_V \otimes R)(R \otimes id_V)(id_V \otimes R) \tag{11}$$

Alors [ ] est constant sur toute la classe d'isotopie de D. On appelle [ ] l'opérateur invariant associé à R et h.

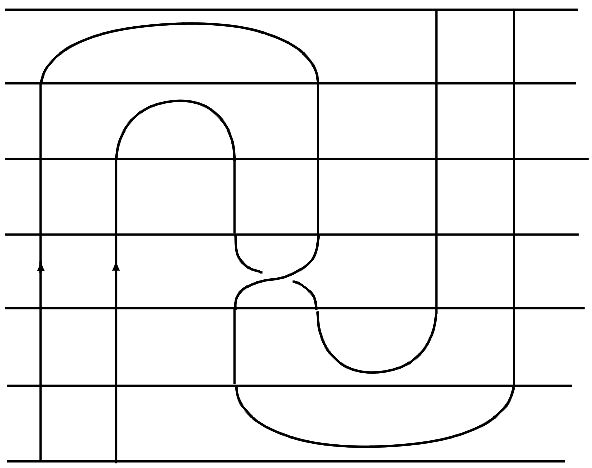
Démonstration. Soit R et h comme dans le théorème précédent. Pour prouver le résultat, 2.1.1 assure qu'il suffit que [ ] soit invariant sous chacun des mouvements de Turaev.

 $= (id_V \otimes n')(u' \otimes id_V)$

or $e_i \overset{u' \otimes id_V}{\longrightarrow} \sum_j e_j \otimes e_j^* \otimes e_i \overset{id_V \otimes n'}{\longrightarrow} e_i$, d'où le résultat.

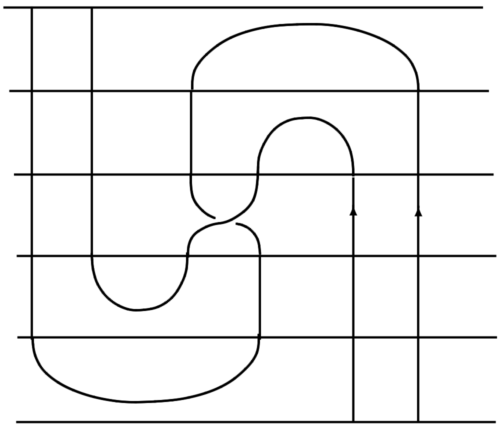
De même,  $= id_V$

On montre de manière identique l'invariance sous le mouvement (2.2)



$$\begin{tikzcd}
\mathrm{C}\otimes V^* \otimes V^* \\
\mathrm{V}^* \otimes V \otimes V^* \otimes V^* \arrow[u, "\mathrm{n'} \otimes id_{V^*} \otimes id_{V^*}"'] \\
\mathrm{V}^* \otimes V^* \otimes V \otimes V \otimes V^* \otimes V^* \arrow[u, "\mathrm{id}_{V^*} \otimes n' \otimes id_V \otimes id_{V^*} \otimes id_{V^*}"'] \\
\mathrm{V}^* \otimes V^* \otimes V \otimes V \otimes V^* \otimes V^* \arrow[u, "\mathrm{id}_{V^*} \otimes id_{V^*} \otimes id_V \otimes id_V \otimes id_{V^*} \otimes id_{V^*}"'] \\
\mathrm{V}^* \otimes V^* \otimes V \otimes V \otimes V^* \otimes V^* \arrow[u, "\mathrm{id}_{V^*} \otimes id_{V^*} \otimes R \otimes id_{V^*} \otimes id_{V^*}"'] \\
\mathrm{V}^* \otimes V^* \otimes V \otimes \mathbb{C} \otimes V^* \arrow[u, "\mathrm{id}_{V^*} \otimes id_{V^*} \otimes id_V \otimes u' \otimes id_{V^*}"'] \\
\mathrm{V}^* \otimes V^* \otimes \mathbb{C} \arrow[u, "\mathrm{id}_{V^*} \otimes id_{V^*} \otimes u'"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
e_i^* \otimes e_j^* \quad & \xrightarrow{id_{V^*}\otimes id_{V^*}\otimes u'} \quad \sum_k e_i^* \otimes e_j^* \otimes e_k \otimes 1 \otimes e_k^* \\
& \xrightarrow{id_{V^*}\otimes id_{V^*}\otimes id_V \otimes u' \otimes id_{V^*}} \quad \sum_{k,p} e_i^* \otimes e_j^* \otimes e_k \otimes e_p \otimes e_p^* \otimes e_k^* \\
& \xrightarrow{id_{V^*}\otimes id_{V^*}\otimes R \otimes id_{V^*} \otimes id_{V^*}} \quad \sum_{k,p,m,n} R_{kp}^{mn} e_i^* \otimes e_j^* \otimes e_k \otimes e_m \otimes e_n \otimes e_p^* \otimes e_k^* \\
& \xrightarrow{id_{V^*}\otimes n' \otimes id_V \otimes id_{V^*} \otimes id_{V^*}} \quad \sum_{k,p,n} R_{kp}^{jn} e_i^* \otimes e_n \otimes e_p^* \otimes e_k^* \\
& \xrightarrow{n' \otimes id_{V^*} \otimes id_{V^*}} \quad \sum_{k,p} R_{kp}^{ji} \otimes e_p^* \otimes e_k^* = \sum_{k,p} R_{pk}^{ji} \otimes e_k^* \otimes e_p^*
\end{aligned}$$



$$\begin{array}{c}
\mathrm{V}^* \otimes V^* \\
\uparrow \ \mathrm{id}_{V^*} \otimes id_{V^*} \otimes n \\
\mathrm{V}^* \otimes V^* \otimes V \otimes V^* \\
\uparrow \ \mathrm{id}_{V^*} \otimes id_{V^*} \otimes id_V \otimes n \otimes id_{V^*} \\
\mathrm{V}^* \otimes V^* \otimes V \otimes V \otimes V^* \otimes V^* \\
\uparrow \ \mathrm{id}_{V^*} \otimes id_{V^*} \otimes R \otimes id_{V^*} \otimes id_{V^*} \\
\mathrm{V}^* \otimes V^* \otimes V \otimes V \otimes V^* \otimes V^* \\
\uparrow \ \mathrm{id}_{V^*} \otimes u \otimes id_V \otimes id_{V^*} \otimes id_{V^*} \\
\mathrm{V}^* \otimes C \otimes V \otimes V^* \otimes V^* \\
\uparrow \ \mathrm{u} \otimes id_{V^*} \otimes id_{V^*} \\
\mathrm{C} \otimes V^* \otimes V^*
\end{array}$$

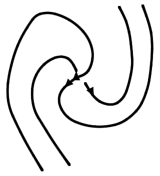
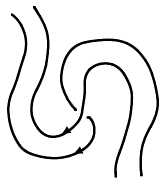
$$\begin{array}{rcl}
e_i^* \otimes e_j^* & \overset{u\otimes id_{V^*}\otimes id_{V^*}}{\longrightarrow} & \sum_k e_k^* \otimes h^{-1}(e_k) \otimes e_i^* \otimes e_j^* \\
& \overset{id_{V^*}\otimes u\otimes id_V\otimes id_{V^*}\otimes id_{V^*}}{\longrightarrow} & \sum_{k,p} e_k^* \otimes e_p^* \otimes h^{-1}(e_p) \otimes h^{-1}(e_k) \otimes e_i^* \otimes e_j^* \\
& \overset{id_{V^*}\otimes id_{V^*}\otimes R\otimes id_{V^*}\otimes id_{V^*}}{\longrightarrow} & \sum_{k,p} e_k^* \otimes e_p^* \otimes R(h^{-1}\otimes h^{-1})(e_p \otimes e_k) \otimes e_i^* \otimes e_j^* \\
& = & \sum_{k,p,m,n} (R(h^{-1}\otimes h^{-1}))_{pk}^{mn} e_k^* \otimes e_p^* \otimes e_m \otimes e_n) \otimes e_i^* \otimes e_j^* \\
& \overset{id_{V^*}\otimes id_{V^*}\otimes id_{V^*}\otimes n\otimes id_{V^*}}{\longrightarrow} & \sum_{k,p,m,n} (R(h^{-1}\otimes h^{-1}))_{pk}^{mn} e_i^*(h(e_n)) e_k^* \otimes e_p^* \otimes e_m \otimes e_j^* \\
& \overset{id_{V^*}\otimes id_{V^*}\otimes n}{\longrightarrow} & \sum_{k,p,m,n} (R(h^{-1}\otimes h^{-1}))_{pk}^{mn} e_i^*(h(e_n)) e_j^*(h(e_m)) e_k^* \otimes e_p^*
\end{array}$$

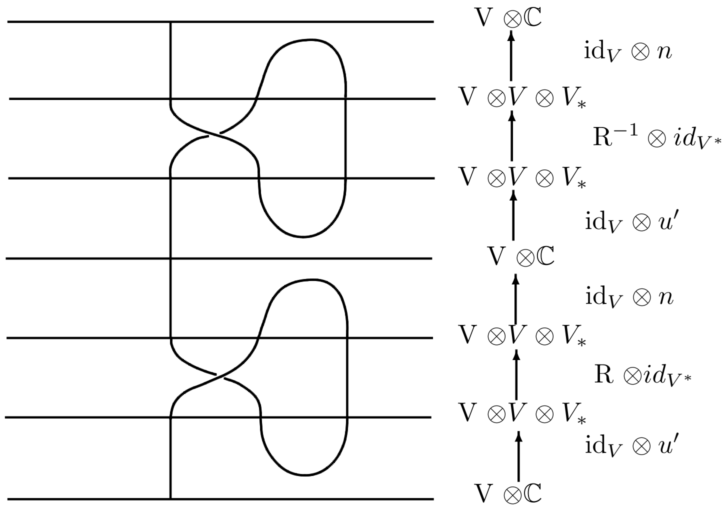
Or

$$\begin{array}{rcl}
(h\otimes h)(R(h^{-1}\otimes h^{-1}))(e_i \otimes e_j) & = & \sum_{k,p} (R(h^{-1}\otimes h^{-1}))_{ij}^{kp} h(e_k) \otimes h(e_p) \\
& = & \sum_{k,p,m,n} (R(h^{-1}\otimes h^{-1}))_{ij}^{kp} e_m^*(h(e_k)) \otimes e_n^*(h(e_p)) e_m \otimes e_n \\
& = & \sum_{m,n} R_{mn}^{ij} e_m \otimes e_n.
\end{array}$$

où la dernière égalité provient de (8).

D'où $R^{ij}_{mn} = \sum_{k,p} (R(h^{-1} \otimes h^{-1}))^{kp}_{ij} e^*_m(h(e_k))$

Donc $\Bigg[$  $\Bigg](e_i \otimes e_j) = \sum_{k,p} R^{ji}_{pk} \otimes e^*_k \otimes e^*_p = \Bigg[$  $\Bigg](\mathrm{e}_i \otimes e_j)$.



$$
\begin{aligned}
e_i &\xrightarrow{id_V \otimes u'} \sum_j e_i \otimes e_j \otimes e^*_j \\
&\xrightarrow{R \otimes id_{V^*}} \sum_{j,k,l} R^{kl}_{ij} e_k \otimes e_l \otimes e^*_j \\
&\xrightarrow{id_V \otimes n} \sum_{j,k,l} R^{kl}_{ij} e^*_j(h(e_l)) e_k \\
&\xrightarrow{id_V \otimes u'} \sum_{j,k,l,p} R^{kl}_{ij} e^*_j(h(e_l)) e_k \otimes e_p \otimes e^*_p \\
&\xrightarrow{R^{-1} \otimes id_{V^*}} \sum_{j,k,l,p,m,n} R^{kl}_{ij} (R^{-1})^{mn}_{kp} e^*_j(h(e_l)) e_m \otimes e_n \otimes e^*_p \\
&\xrightarrow{id_V \otimes n} \sum_{j,k,l,p,m,n} R^{kl}_{ij} (R^{-1})^{mn}_{kp} e^*_j(h(e_l)) e^*_p(h(e_n)) e_m
\end{aligned}
$$

Or $(id_V \otimes h) R^{-1}(e_i) \otimes e_j = (id_V \otimes h) \sum_{k,p} (R^{-1})^{kp}_{ij} e_k \otimes e_p = \sum_{k,p,l} (R^{-1})^{kp}_{ij} e^*_l(h(e_p)) e_k \otimes e_l$

On pose $A^{kl}_{ij} = \sum_p (R^{-1})^{kp}_{ij} e^*_l(h(e_p))$

$$trace_2((id_V\otimes h)R^{-1})(e_i)=\sum_{j,k}A_{ik}^{jk}e_j=\sum_{j,k,p}A_{ik}^{jk}e_k^*(h(e_p))e_j$$

Donc si D désigne le diagramme précédent

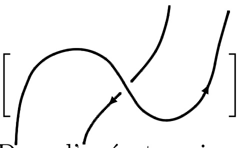
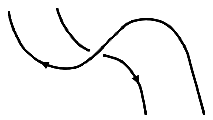
$$[D](e_i)=\sum_{j,k,l}R_{ij}^{kl}e_j^*(h(e_l))trace_2((id_V\otimes h)R^{-1})(e_k)=c^{-1}\sum_{j,k,l}R_{ij}^{kl}e_j^*(h(e_l))e_k.$$

De même $((id_V\otimes h)R)(e_i\otimes e_j)=\sum_{k,p}R_{ij}^{kp}e_k\otimes h(e_p)=\sum_{k,p,l}R_{ij}^{kp}e_l^*(h(e_p))e_k\otimes h(e_l)$.

Posons $A_{ij}^{kl}=\sum_p(R)_{ij}^{kp}e_l^*(h(e_p))$.

$$trace_2((id_V\otimes h)R)(e_i)=\sum_{j,k}A_{jk}^{ik}e_j=\sum_{j,k,p}R_{ik}^{jp}e_k^*(h(e_p))e_j=ce_i$$

Donc l'opérateur invariant de l'enchevêtrements précédent vaut id_V. On démontre qu'il en ai de même si on change son orientation.
Un calcul analogue donne

[] $=(R^{-1})\circlearrowleft$ et [] $=((id_V\otimes h)R(h^{-1})\otimes id_V)^{\circlearrowright}$.

Donc l'opérateur invariant du diagramme non trivial de (2.5) vaut

$$(R^{-1})\circlearrowleft((id_V\otimes h)R(h^{-1})\otimes id_V)^{\circlearrowright}=id_V\otimes id_V$$

De même, on montre que l'invariance sous le mouvement (2.6) découle de (11).

2.3 Le cas du polynôme de Jones.

Prenons alors pour V un $\mathbb{C}$-ev de dimension 2 de base $\{e_0,e_1\}$ et

$$R=\begin{pmatrix} t^{1/2} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & t & 0\\ 0 & t & t^{1/2}-t^{3/2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & t^{1/2}\end{pmatrix}\qquad h=\begin{pmatrix} t^{-1/2} & 0\\ 0 & t^{1/2}\end{pmatrix}$$

On a déjà vu dans la première partie que R et h satisfont (1),(2) et (4). Un calcul matriciel montre qu'elles satisfont aussi (3). Soit alors b une tresse à n brins de clôture L. En raisonnant par récurrence forte sur le nombre minimal d'éléments σ_i permettant d'écrire b, on montre $[b]=\psi_n(b)$.
En examinant comment le diagramme de L est obtenu à partir de celui de b, on a que :

$$\begin{aligned}
[L] &= \bigcirc_{k=1}^n id_V^{\otimes n-k}\otimes n\otimes id_{V^*}^{\otimes n-k}\circ([b]\otimes id_{V^*}^{\otimes n})\bigcirc_{k=0}^{n-1} id_V^{\otimes k}\otimes u\otimes id_{V^*}^{\otimes k}\\
&= \sum\bigcirc_{k=1}^n id_V^{\otimes n-k}\otimes n\otimes id_{V^*}^{\otimes n-k}\circ(f_{i_1}\otimes\cdots\otimes f_{i_n}\otimes id_{V^*}^{\otimes n})(e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_n}\otimes e_{j_1}^*\otimes\cdots\otimes e_{j_n}^*)\\
&= \sum\bigcirc_{k=1}^n id_V^{\otimes n-k}\otimes n\otimes id_{V^*}^{\otimes n-k}\circ(f_{i_1}(e_{j_1})\otimes\cdots\otimes f_{i_n}(e_{j_n})\otimes e_{j_1}^*\otimes\cdots\otimes e_{j_n}^*)\\
&= \sum\prod_{k=1}^n e_{j_n}^*(hf_{i_k}(e_{jk}))\\
&= Tr(h^{\otimes n}[b])\\
&= Tr(h^{\otimes n}\psi_n(b))
\end{aligned}$$

3 Opérateurs invariants et algèbres de Hopf rubannées.

3.1 Algèbre/Colgèbre/Bigèbre.

On a vu dans la section précédente que la donnée d'une R-matrice et d'une application h vérifiant (8),(9),(10),(11) donnait lieu a un invariant d'enchevêtrement orienté. On va donner une méthode systématique pour obtenir de tels éléments, via la construction d'un objet algébrique nouveau, l'algèbre de Hopf rubannée, dont nous détaillons les propriétés dans cette section. Mais avant tout quelques définitions. k désignera dorénavant un corps commutatif.

Définition 3.1.1. *On appelle k-algèbre la donnée d'un k-espace vectoriel (k-e.v. en abrégé) A et de deux applications linéaires $M : A \otimes A \to A$ et $u : k \to A$ telles que les deux diagrammes suivants soient commutatifs :*

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes A \arrow[r, "I\otimes M"] \arrow[d, "M\otimes I"] & A \otimes A \arrow[d, "M"] \\ A \otimes A \arrow[r, "M"] & A \end{tikzcd} \tag{12}$$

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[dr, "M"] & A \otimes k \arrow[l, "I\otimes u"'] \arrow[d, "\sim"] \\ k \otimes A \arrow[u, "u\otimes I"] \arrow[r, "\sim"] & A \end{tikzcd} \tag{13}$$

M est la multiplication de l'algèbre A, u le morphisme unitaire et la commutativité du premier diagramme correspond à l'associativité de l'algèbre A.

Définition 3.1.2. *De façon similaire on définit une k-coalgèbre comme étant un k-e.v. muni de deux applications linéaires $\Delta : C \to C \otimes C$ et $\epsilon : C \to k$ telles que les deux diagrammes suivants commutent :*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"] & C \otimes C \arrow[d, "I\otimes\Delta"] \\ C \otimes C \arrow[r, "\Delta\otimes I"] & C \otimes C \otimes C \end{tikzcd} \tag{14}$$

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\sim"] \arrow[dr, "\Delta"] & C \otimes k \\ k \otimes C & C \otimes C \arrow[l, "\epsilon\otimes I"] \arrow[u, "I\otimes\epsilon"'] \end{tikzcd} \tag{15}$$

La commutativité du premier diagramme s'apelle la coassociativité, Δ s'appelle la comultiplication et ϵ la counité.

Par exemple, si S est un ensemble, on définit sur le k-e.v. kS de base les éléments de S une structure de coalgèbre en posant $\Delta(s) = s \otimes s$ et $\epsilon(s) = 1\ \forall s \in S$.
Si S est un monoïde on définit une structure d'algèbre sur kS en posant $M(s \otimes s') = ss'$ et $u(1) = e$ où e est l'élément neutre du monoïde.
Le corps k a une structure naturelle d'algèbre et de coalgèbre données par :

$M(x \otimes y) = xy$, $u = Id$, $\Delta(x) = x \otimes 1$ et $\epsilon = Id$.
Ou encore, pour $n \geqslant 1$ un entier et $M^c(n,k)$ un k-e.v. de dimension n^2 et de base $(e_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, on définit une strucure de coalgèbre en posant :
$\Delta(e_{ij}) = \sum_{1 \leqslant p \leqslant n} e_{ip} \otimes e_{pj}$ et $\epsilon(e_{ij}) = \delta_{ij}$

Soit (C, Δ, ϵ) une coalgèbre on définit par récurrence la suite d'opérateurs $(\Delta_n)_{n \geqslant 1}$ par la relation :

$$\Delta_1 = \Delta$$

$$\Delta_n : C \to C^{\otimes(n+1)}$$

$$\Delta_n = (\Delta \otimes I^{n-1}) \circ \Delta_{n-1}$$

Comme on le démontre dans le cas de l'associativité d'une algèbre, l'ordre dans lequel on compose la comultiplication n'a pas d'importance, plus particulièrement on a le résultat suivant :
Soit (C, Δ, ϵ) une coalgèbre. Alors on a :

$$\Delta_n = (I^m \otimes \Delta_i \otimes I^{n-i-m}) \circ \Delta_{n-i}, \forall i \in \{1, \dots, n-1\} \forall m \in \{0, \dots, n-i\}$$

Si (C, Δ, ϵ)est une coalgèbre et $c \in C$ on note alors

$$\Delta(c) = \sum_{(c)} c_1 \otimes c_2 \tag{16}$$

au lieu de

$$\Delta(c) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} c_{1i} \otimes c_{2i}$$

L'avantage de cette notation est d'éviter la profusion d'indice lorsque l'on manipule des éléments d'une coalgèbre et l'on verra dans quelque instants qu'elle donne un autre avantage dans la simplification des calculs. Plus généralement on notera pour $n > 0$:

$$\Delta_n(c) = \sum_{(c)} c_1 \otimes \ldots \otimes c_n \tag{17}$$

La coassociativité donne alors la formule :

$$\Delta_2(c) = \sum_{(c)} \Delta(c_1) \otimes c_2 = \sum_{(c)} c_1 \otimes \Delta(c_2) = \sum_{(c)} c_1 \otimes c_2 \otimes c_3 \tag{18}$$

Et la commutativité du diagramme (4) donne :

$$\sum_{(c)} \epsilon(c_1) c_2 = \sum_{(c)} c_1 \epsilon(c_2) = c \tag{19}$$

On a alors la règle de calcul suivante : Soit (C, Δ, ϵ) une coalgebre, $i > 0$, $f : C^{\otimes(n+1)}$ et $g : C \to C$ deux applications k-linéaires telles que $f \circ \Delta_i = g$.
Soit de plus $h : C^{\otimes(n+1)} \to V$ (où V est un k-e.v.) une application k-linéaire.
Alors on a pour $1 \leqslant j \leqslant n+1$ et $c \in C$:

$$\sum_{(c)} h(c_1 \otimes \ldots \otimes c_{j-1} \otimes f(c_j \otimes \ldots \otimes c_{j+i}) \otimes c_{j+i+1} \otimes \ldots c_{n+i+1}) =$$
$$\sum_{(c)} g(c_1 \otimes \ldots \otimes c_{j-1} \otimes g(c_j) \otimes c_{j+1} \otimes \ldots \otimes c_{n+1})$$

Ce fait provient simplement de ce que :

$\sum_{(c)} h(c_1 \otimes \ldots \otimes c_{j-1} \otimes f(c_j \otimes \ldots \otimes c_{j+i}) \otimes c_{j+i+1} \otimes \ldots c_{n+i+1})$
$=$ h $\circ(I^{j-1} \otimes f \otimes I^{n-j+1}) \circ \Delta_{n+i}(c)$
$=$ h $\circ(I^{j-1} \otimes f \otimes I^{n-j+1}) \circ (I^{j-1} \otimes \Delta_i \otimes I^{n-j+1}) \circ \Delta_n(c)$
$=$ h $\circ(I^{j-1} \otimes (f \circ \Delta_i) \otimes I^{n-j+1}) \circ \Delta_n(c)$
$=$ h $\circ(I^{j-1} \otimes g \otimes I^{n-j+1}) \circ \Delta_n(c)$
$= \sum_{(c)} g(c_1 \otimes \ldots \otimes c_{j-1} \otimes g(c_j) \otimes c_{j+1} \otimes \ldots \otimes c_{n+1})$

Cette règle sera d'une grande utilité par la suite, mais afin d'en exposer l'intérêt, donnons quelques exemples.
Pour $c \in C$ on a
$$\sum_{(c)} \epsilon(c_1)\epsilon(c_2)c_3 = \sum_{(c)} \epsilon(c_1)c_2 = c$$

(puisqu'on a $\sum_{(c)} \epsilon(c_1)c_2 = c$, on peut remplacer dans la somme $\sum_{(c)} \epsilon(c_1)\epsilon(c_2)c_3$ $\epsilon(c_2)c_3$ par c_2).

Définition 3.1.3. *Une algebre (A, M, u) est dite commutative si le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "M"'] & & A \otimes A \arrow[dl, "M"] \\ & A & \end{tikzcd} \tag{20}$$

De façon analogue on dira qu'une coalgebre (C, Δ, ϵ) est cocommutative si le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} C \otimes C \arrow[rr, "T"] & & C \otimes C \\ & C \arrow[ul, "\Delta"] \arrow[ur, "\Delta"'] & \end{tikzcd} \tag{21}$$

Définition 3.1.4. *Soient (A, M_A, u_A) et (B, M_B, u_B) deux k-algèbres. Une application k-linéaire $f : A \to B$ est un morphisme d'algèbre si les diagrammes suivants sont commutatifs :*

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "f \otimes f"] \arrow[d, "M_A"] & B \otimes B \arrow[d, "M_B"] \\ A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] & & B \\ & k \arrow[ul, "u_A"] \arrow[ur, "u_B"'] & \end{tikzcd}$$

Définition 3.1.5. *De façon analogue si $(C, \Delta_C, \epsilon_C)$ et $(D, \Delta_D, \epsilon_D)$ sont deux k-coalgèbres. Une application k-linéaire $g : C \to D$ est un morphisme de coalgèbres si les diagrammes suivants commutent :*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\Delta_C"] & D \arrow[d, "\Delta_D"] \\ C \otimes C \arrow[r, "g \otimes g"] & D \otimes D \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} C \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\epsilon_C"] & & D \arrow[dl, "\epsilon_D"] \\ & k & \end{tikzcd}$$

On peut réécrire la commutativité du diagramme (C) via les notations introduites par :

$$\Delta_D(g(c)) = \sum_{(g(c))} g(c)_1 \otimes g(c)_2 = \sum_{(c)} g(c_1) \otimes g(c_2) \tag{22}$$

On définit maintenant pour une k-algèbre (resp. une k-coalgèbre) H une structure naturelle de k-algèbre (resp. k-coalgèbre) sur $H \otimes H$.

Définition 3.1.6. *Soient (A, M_A, u_A) et (B, M_B, u_B) deux k-algèbres. On définit alors sur le k-e.v. $A \otimes B$ une structure d'algèbre en définissant la multiplication M et la morphisme unitaire u par :*

$$M((a \otimes b) \otimes (a' \otimes b')) = (aa') \otimes (bb') \tag{23}$$

et

$$u(1) = u_A(1) \otimes u_B(1) \tag{24}$$

Soient $(C, \Delta_C, \epsilon_C)$ et $(D, \Delta_D, \epsilon_D)$ deux k-coalgèbres. On définit sur le k-e.v. $C \otimes D$ une structure de coalgèbre en définissant la comultiplication Δ et la counité ϵ par :

$$\Delta = (I \otimes T \otimes I) \circ (\Delta_A \otimes \Delta_B) \tag{25}$$

et

$$\epsilon = \epsilon_A \otimes \epsilon_B \tag{26}$$

Où T est l'application k-linéaire définie par $T(a \otimes b) = b \otimes a$ et k est identifié de façon naturelle à $k \otimes k$.

La vérification des structures de k-algèbre et de k-coalgèbre est immédiate.
On est maintenant en mesure de définir ce qu'est une bigèbre.

Définition 3.1.7. *: Soit H un k-e.v. munit à la fois d'une structure de k-algèbre via le triplet (H, M, u) et d'une structure de k-coalgèbre via le triplet (H, Δ, ϵ). Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*
i) Les applications M et u sont des morphismes de coalgèbres (pour les structures naturelles de coalgèbre sur k et $H \otimes H$).
ii)Les applications Δ et ϵ sont des morphismes d'algèbres (pour les structures naturelles d'algèbres sur k et $H \otimes H$).
Si une des deux conditions est vérifiée on dit alors que $(H, M, u, \Delta, \epsilon)$ est une bigèbre.

Démonstration. Le fait que M soit un morphisme de coalgèbre s'écrit comme la commutativité des diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd}
H \otimes H \arrow[rr, "M"] \arrow[d, "\Delta\otimes\Delta"] & & H \arrow[dd, "\Delta"] \\
H \otimes H \otimes H \otimes H \arrow[d, "I\otimes T\otimes I"] & & \\
H \otimes H \otimes H \otimes H \arrow[rr, "M\otimes M"] & & H \otimes H
\end{tikzcd} \tag{27}$$

et

$$\begin{tikzcd}
H \otimes H \arrow[r, "M"] \arrow[d, "\epsilon\otimes\epsilon"] & H \arrow[dd, "\epsilon"] \\
k \otimes k \arrow[d, "\sim"] & \\
k \arrow[r, "Id"] & k
\end{tikzcd} \tag{28}$$

Et u est un morphisme de coalgèbres si et seulement si les deux diagrammes suivants sont commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
k \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\sim"] & H \arrow[d, "\Delta"] \\
k \otimes k \arrow[r, "u\otimes u"] & H \otimes H
\end{tikzcd} \tag{29}$$

et

$$\begin{tikzcd}
k \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "Id"] & & H \arrow[dl, "\epsilon"] \\
& k &
\end{tikzcd} \tag{30}$$

Les diagrammes (27) et (29) indiquent justement que Δ est un morphisme d'algèbre et les diagrammes (28) et (30) que ϵ est un morphisme d'algèbre.

□

Remarque :
Les conditions pour que Δ et ϵ soient des morphismes d'algèbre s'écrivent :

$$(hg) = \sum_{(h)(g)} h_1 g_1 \otimes h_2 g_2 \tag{31}$$

$$\epsilon(hg) = \epsilon(h)\epsilon(g) \tag{32}$$

$$\Delta(1) = 1 \otimes 1 \tag{33}$$

$$\epsilon(1) = 1 \tag{34}$$

Par exemple, si G est un monoïde le k-e.v. kG munit de sa structure naturelle d'algèbre et de coalgèbre est une bigèbre.

Définition 3.1.8. *Soient H et L deux k-bigèbres. Une application k-linéaire $f : H \to L$ est un morphisme de bigèbres si c'est un morphisme d'algèbre pour les structures d'algèbres sous-jacentes, et c'est un morphisme de coalgèbres pour les structures de coalgèbres sous-jacentes.*
Soit (C, Δ, ϵ) une k-coalgèbre et (A, M, u) une k-algèbre. On définit alors sur $Hom(C, A)$ une structure d'algèbre pour la multiplication $\star$ définie par :

$$(f \star g)(c) = \sum_{(c)} f(c_1)g(c_2) \tag{35}$$

On vérifie l'associativité de la loi ainsi définie :
soient $f, g, h \in Hom(C, A)$ et $c \in C$, on a :

$$\begin{aligned} ((f \star g) \star h)(c) &= \sum_{(c)} (f \star g)(c_1)h(c_2) \\ &= \sum_{(c)} f(c_1)g(c_2)h(c_3) \\ &= \sum_{(c)} f(c_1)(g \star h)(c_2) \\ &= (f \star (g \star h))(c) \end{aligned}$$

$u \circ \epsilon$ est alors l'élément neutre de la loi $\star$:
$(f \star (u \circ \epsilon))(c) = \sum_{(c)} f(c_1)(u \circ \epsilon)(c_2) = \displaystyle\sum_{(c)} f(c_1)\epsilon(c_2)1 = f(c)$
On prouve de la même manière que $(u \circ \epsilon) \star f = f$.
$\star$ sera appelé le produit de convolution.
Soit H une bigèbre on peut alors munir, comme cas particulier de la construction précédente, $Hom(H, H)$ d'une structure d'algèbre (pour la structure d'algèbre et de coalgèbre sous-jacentes). L'application identité $I : H \to H$ est un élément de $Hom(H, H)$.

Définition 3.1.9. *Soit H une bigèbre. On appelle élément antipodal de H toute application linéaire $S : H \to H$ qui est l'inverse de l'application identité pour le produit de convolution de $Hom(H, H)$. Si H possède un élément antipodal, on dit alors que H est une algèbre de Hopf.*

Remarque : en cas d'existence, une algèbre de Hopf admet un unique élément antipodale puisqu'il s'agit de l'inverse de I dans l'algèbre $Hom(H, H)$. On peut réécrire les relations $S \star I = I \star S = u \circ \epsilon$ sous la forme :

$$\sum_{(h)} S(h_1)h_2 = \sum_{(h)} h_1 S(h_2) = \epsilon(h)1 \quad \forall h \in H \tag{36}$$

Proposition 3.1.1. *Soit H une algèbre de Hopf avec S pour élément antipodal. Alors :*

$$S(hg) = S(g)S(h) \tag{37}$$

$$S(1) = 1 \tag{38}$$

$$\Delta(S(h)) = \sum_{(h)} S(h_2) \otimes S(h_1) \tag{39}$$

$$\epsilon(S(h)) = \epsilon(h) \tag{40}$$

(Les propriétés (37) et (38) signifie que S est un antimorphisme d'algèbre et les propriétés (39) et (40) que S est un antimorphisme de coalgèbre).
Les trois propriétés suisvantes sont équivalentes :

$$\begin{gathered}\text{(a) } S \circ S = Id \\ \text{(b) } \forall h \in H \ , \sum_{(h)} S(h_2)h_1 = \epsilon(h)1 \\ \text{(c) } \forall h \in H \ , \sum_{(h)} h_2 S(h_1) = \epsilon(h)1\end{gathered}$$

Si H est commutative ou cocommutative, alors $S \circ S = Id$.

Démonstration. (37) Grâce à la structure de coalgèbre sur $H \otimes H$ on peut définir une structure d'algèbre sur $Hom(H \otimes H, H)$ (donnée par le produit de convolution). Considérons les éléments F, G, M de $Hom(H \otimes H, H)$ définis par :

$$F(h \otimes g) = S(g)S(h)$$
$$G(h \otimes g) = S(hg)$$

et

$$M(h \otimes g) = hg$$

Pour montrer que $F = G$ il suffit de montrer que M est un inverse à gauche de F et est un inverse à droite de G. Ce qui est le cas puisque :

$$\begin{aligned}(M \star F)(h \otimes g) &= \sum_{(h \otimes g)} M((h \otimes g)_1)F((h \otimes g)_2) \\ &= \sum_{(h)(g)} M(h_1 \otimes g_1)F(h_2 \otimes g_2) \\ &= \sum_{(h)(g)} h_1 g_1 S(g_2)S(h_2) \\ &= \sum_{(h)} h_1 \epsilon(g) 1 S(h_2) \\ &= \epsilon(h)\epsilon(g)1\end{aligned}$$

et que de plus :

$$\begin{aligned}(G \star M)(h \otimes g) &= \sum_{(h \otimes g)} G((h \otimes g)_1)M((h \otimes g)_2) \\ &= \sum_{(h)(g)} G(h_1 \otimes g_1)M(h_2 \otimes g_2) \\ &= \sum_{(h)(g)} S(h_1 g_1)h_2 g_2 \\ &= \sum_{(hg)} S((hg)_1)(hg)_2 \\ &= \epsilon(hg)1\end{aligned}$$

(38) Il suffit d'appliquer la définition de l'antipode à l'élément $1 \in H$.
(39) On considère maintenant H avec sa structure de coalgèbre et $H \otimes H$ avec sa structure d'algèbre. le produit de convolution permet alors de définir une structure d'algèbre sur $Hom(H, H \otimes H)$. On définit les éléments F et G de cette algèbre par $F(h) = \Delta(S(h))$ et $G(h) = \sum_{(h)} S(h_2) \otimes S(h_1)$. Un calcul semblable à celui fait précédemment montre que Δ est un inverse à gauche de F et un inverse à droite de G, donc que $F = G$.
(40) En appliquant ϵ à la relation (25), on obtient

$$\sum_{(h)} \epsilon(h_1)\epsilon(S(h_2)) = \epsilon(h)$$

ce qui s'écrit encore

$$\epsilon(h) = \epsilon(S(\sum_{(h)} \epsilon(h_1)h_2)) = \epsilon(S(h))$$

(b)⇒(a) : il suffit de prouver que S^2 est un inverse à droite de S. On a :

$$\begin{aligned}
(S \star S^2)(h) &= \sum_{(h)} S(h_1)S^2(h_2) \\
&= \sum_{(h)} S(S(h_2)h_1) \\
&= S(\sum_{(h)} S(h_2)h_1) \\
&= S(\epsilon(h)1) \\
&= \epsilon(h)1
\end{aligned}$$

donc le résultat est prouvé.
(a)⇒(b) On applique S à l'égalité (25), et en utilisant le fait que S est un antimorphisme et que $S^2 = I$ on trouve $\sum_{(h)} S(h_2)h_1 = \epsilon(h)1$.
L'équivalence (a)⇔(c) se prouve de façon analogue.

□

Définition 3.1.10. *Soit $(H, M, u, \Delta, \epsilon)$ une algèbre de Hopf on dira qu'elle est quasi cocommutative s'il existe un élément $\mathcal{R} \in H \otimes H$ inversible tel que l'on ait :*

$$\forall x \in H, \quad (T \circ \Delta)(x) = \mathcal{R}\Delta(x)\mathcal{R}^{-1} \tag{41}$$

$\mathcal{R}$ est appelée une R-matrice universelle.

Remarque : si on écrit $\mathcal{R} = \sum_i s_i \otimes t_i$ alors la condition (35) s'écrit

$$\forall x \in H, \quad \sum_{(x),i} x_2 s_i \otimes x_1 t_i = \sum_{(x),i} s_i x_1 \otimes t_i x_2 \tag{42}$$

Par exemple, une algèbre de Hopf cocommutative est quasi cocommutative pour $\mathcal{R} = 1 \otimes 1$.
Notation : pour $\mathcal{R} = \sum_i s_i \otimes t_i$ un élément de $H \otimes H$ on notera $\mathcal{R}_{12} = \sum_i s_i \otimes t_i \otimes 1 = \mathcal{R} \otimes 1$, $\mathcal{R}_{13} = \sum_i s_i \otimes 1 \otimes t_i$ et $\mathcal{R}_{23} = \sum_i 1 \otimes s_i \otimes t_i = 1 \otimes \mathcal{R}$.

Définition 3.1.11. *Une algèbre de Hopf* $(H, M, u, \Delta, \epsilon)$ *quasi cocommutative est dite tressée (ou quasi triangulaire) si les relations suivantes sont vérifiées :*

$$(\Delta \otimes Id)(\mathcal{R}) = \mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23} \tag{43}$$

$$(Id \otimes \Delta)(\mathcal{R}) = \mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{12} \tag{44}$$

Les deux relations précédentes se réécrivent (toujours avec $\mathcal{R} = \sum_i s_i \otimes t_i$*) :*

$$\sum_{i,(s_i)} (s_i)_1 \otimes (s_i)_2 \otimes t_i = \sum_{i,j} s_i \otimes s_j \otimes t_i t_j \tag{45}$$

et

$$\sum_{i,(t_i)} s_i \otimes (t_i)_1 \otimes (t_i)_2 = \sum_{i,j} s_i s_j \otimes t_j \otimes t_i. \tag{46}$$

Par exemple, une algèbre de Hopf cocommutative est tressée avec $\mathcal{R} = 1 \otimes 1$.

Proposition 3.1.2. *Soit* $(H, M, u, \Delta, \epsilon, S, R)$ *une algèbre de Hopf tressée. Alors on a :*

$$\mathcal{R}_{12}\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23} = \mathcal{R}_{23}\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{12} \tag{47}$$

et

$$(\epsilon \otimes Id)(\mathcal{R}) = 1 = (Id \otimes \epsilon)(\mathcal{R})(5) \tag{48}$$

Si de plus S *est inversible on a :*

$$(S \otimes Id)(\mathcal{R}) = \mathcal{R}^{-1} = (Id \otimes S^{-1})(\mathcal{R}) \tag{49}$$

$$(S \otimes S)(\mathcal{R}) = \mathcal{R} \tag{50}$$

Démonstration. (47) Par la définition de $\mathcal{R}$ et d'une algèbre de Hopf tressée, on a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{12}\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23} &= \mathcal{R}_{12}(\Delta \otimes Id)(\mathcal{R}) \\
&= (T \circ \Delta \otimes Id)(\mathcal{R})\mathcal{R}_{12} \\
&= (T \otimes Id)(\Delta \otimes Id)(\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23})\mathcal{R}_{12} \\
&= \mathcal{R}_{23}\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{12}
\end{aligned}$$

(48) Puisque $(\epsilon \otimes Id)\Delta = Id$ on déduit que :

$$\mathcal{R} = (\epsilon \otimes Id \otimes Id)(\Delta \otimes Id)(\mathcal{R}) = (\epsilon \otimes Id \otimes Id)(\mathcal{R}_{13}R_{23}) = \sum_{i,j} \epsilon(s_i)(s_j \otimes t_i t_j) = (1 \otimes (\epsilon \otimes Id)(\mathcal{R}))\mathcal{R}$$

Puisque $\mathcal{R}$ est inversible on en déduit le résultat.
(49) Par définition de l'élément antipodal, on a $M(S \otimes Id)\Delta(x) = \epsilon(x)1$, d'où on déduit que :

$$(M \otimes Id)(S \otimes Id \otimes Id)(\Delta \otimes Id)(R) = (u \circ \epsilon \otimes Id)(R) = 1 \otimes 1$$

Puis on a :

$$\begin{aligned}
1 \otimes 1 &= (M \otimes Id)(S \otimes Id \otimes Id)(\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23}) \\
&= \sum_{i,j} (S(s_i)s_j) \otimes t_i t_j \\
&= (S \otimes Id)(\mathcal{R})\mathcal{R}
\end{aligned}$$

Ce qui nous permet d'écrire $(S \otimes Id)(\mathcal{R}) = \mathcal{R}^{-1}$
(50) De la même manière en utilisant l'algèbre de Hopf $(H, M, u, T \circ \Delta, \epsilon, S^{-1}, T(\mathcal{R}))$ on prouve que $(Id \otimes S^{-1})(\mathcal{R}) = \mathcal{R}^{-1}$. Enfin on a :

$$\begin{aligned}(S \otimes S)(\mathcal{R}) &= (Id \otimes S)(S \otimes Id)\mathcal{R}) \\ &= (Id \otimes S)(\mathcal{R}^{-1}) \\ &= (Id \otimes S)(Id \otimes S^{-1})(\mathcal{R}) \\ &= (Id \otimes Id)(\mathcal{R}) = \mathcal{R}\end{aligned}$$

□

Proposition 3.1.3. *Soit $(H, M, u, \Delta, \epsilon, S, \mathcal{R})$ une algèbre de Hopf tressée avec une antipode inversible. On pose alors $u = \sum_i S(t_i)s_i$ où $\mathcal{R} = \sum_i s_i \otimes t_i$. On prendra aussi $\mathcal{R}^{-1} = \sum_i s'_i \otimes t'_i$. Sous ces hypothèses, on a alors :*

$$\forall x \in H \quad S^2(x) = uxu^{-1} \tag{51}$$

De plus l'élément u est inversible et on a :

$$u^{-1} = \sum_i S^{-1}(t'_i)s_i \tag{52}$$

Démonstration. On démontre d'abord que pour tout $x \in H$ on a $S^2(x)u = ux$.
Pour y dans $H \otimes H$, on a par définition de $\mathcal{R}$:

$$(T \circ \Delta \otimes Id)(y)(\mathcal{R} \otimes Id) = (\mathcal{R} \otimes Id)(\Delta \otimes Id)(y)$$

Pour $y = \Delta(x)$ on obtient :

$$\sum_{i,(x)} x_2 s_i \otimes x_1 t_i \otimes x_3 = \sum_{i,(x)} s_i x_1 \otimes t_i x_2 \otimes x_3$$

A l'égalité précédente, on applique $(I \otimes M)(M \otimes I)(S^2 \otimes S \otimes I) \circ T_3$ où
$T_3(a \otimes b \otimes c) = c \otimes b \otimes a$. On obtient alors (en utilisant le fait que S soit un antimorphisme) :

$$\sum_{i,(x)} S^2(x_3)S(t_i)S(x_1)x_2 s_i = \sum_{i,(x)} S^2(x_3)S(x_2)S(t_i)s_i x_1$$

Par définition de l'élément antipodal on a :

$$\sum_{(x)} S(x_1)x_2 \otimes x_3 = \sum_{(x)} \epsilon(x_1) \otimes x_2 = 1 \otimes x$$

En appliquant à l'égalité précédente l'opérateur $I \otimes S$ on obtient
$\sum_{(x)} S(x_1)x_2 \otimes S^2(x) = 1 \otimes S^2(x)$. On multiplie maintenant cette relation par $\sum_i s_i \otimes S(t_i)$, puis en appliquant $M \circ T$ on obtient :

$$\sum_{i,(x)} S^2(x_3)S(t_i)S(x_1)x_2 s_i = \sum_i S^2(x)S(t_i)s_i = S^2(x)u$$

De la même façon on a :

$$\sum_{(x)} x_1 \otimes S(x_2 S(x_3)) = \sum_{(x)} x_1 \otimes S^2(x_3)S(x_2))$$

$$S(\epsilon(x_2)1) = \sum_{(x)} \epsilon(x_2)x_1 \otimes 1 = x \otimes 1$$

En multipliant à gauche par $u \otimes 1$ et en appliquant $T \otimes M$ on obtient :

$$\sum_{i,(x)} S^2(x_3)S(x_2)S(t_i)s_i x_1 = ux$$

En utilisant (51) on obtient par les égalités précédentes $S^2(x)u = ux$.
Il ne reste plus qu'à prouver que u est inversible. Soit $v = \sum_i S^{-1}(t'_i)s'_i$ où $\mathcal{R}^{-1} = \sum_i s'_i \otimes t'_i$.

On a alors :

$$\begin{aligned}
uv &= \sum_i uS^{-1}(t'_i)s'_i \\
&= \sum_i S(t'_i)us'_i (\text{car on a vu que} S^2(x)u = ux) \\
&= \sum_{i,j} S(t_j t'_i)s_j s'_i \\
&= S(1)1 \quad (car \sum s_j s'_i \otimes t_j t'_i) \\
&= \mathcal{R}\mathcal{R}^{-1} \\
&= 1 \otimes 1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que $1 = uv = S^2(v)u$ et que u a un inverse à gauche et à droite qui est v.
On observe que $S^2(u) = u$ et $S^2(u^{-1}) = u^{-1}$, car $(S \otimes S)(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$, donc

$$\begin{aligned}
u &= \sum_i S(t_i)s_i \\
&= \sum_i S^2(t_i)S(s_i) \\
&= \sum_i S^3(t_i)S^2(s_i) \\
&= S^2(u)(\text{car } S^2 \text{ est un morphisme})
\end{aligned}$$

□

Proposition 3.1.4. *Sous les hypothèses de la proposition précédente, on a $uS(u) = S(u)u$, et cet élément est central.*

Démonstration. Soit x un élément de H. On a $ux = S^2(x)u$ donc $S(x)S(u) = S(u)S^3(x)$. en prenant $x = S^{-1}(y)$ on obtient $yS(u) = S(u)S^2(y) = S(u)uyu^{-1}$. Par conséquent, pour tout $y \in H$: $yS(u)u = S(u)uy$. Pour $y = 1$ on obtient $S(u)u = uS(u)$ puis la relation précédente montre que cet élément est central dans H. □

Proposition 3.1.5. *Soit H une algèbre de Hopf tressée et posons $v_2 = uS(u) = S(u)u$ où u est l'élément défini précédemment. On a alors les relations suivantes :*

$$\epsilon(u) = 1 \tag{53}$$

$$\Delta(u) = (\mathcal{R}_{21}\mathcal{R})^{-1}(u \otimes u) = (u \otimes u)(\mathcal{R}_{21}R)^{-1} \tag{54}$$

où $\mathcal{R}_{21} = T(\mathcal{R})$

$$\Delta(S(u)) = (\mathcal{R}_{21}\mathcal{R})^{-1}(S(u) \otimes S(u)) = (S(u) \otimes S(u))(\mathcal{R}_{21}\mathcal{R})^{-1} \tag{55}$$

$$\Delta(v_2) = (\mathcal{R}_{21}\mathcal{R})^{-2}(v_2 \otimes v_2) = (v_2 \otimes v_2)(\mathcal{R}_{21}\mathcal{R})^{-2} \tag{56}$$

$$S(v_2) = v_2 \tag{57}$$

$$\epsilon(v_2) = 1 \tag{58}$$

Démonstration. (53) D'après la relation (48) on a :

$$\sum_i \epsilon(s_i)t_i = \sum_i s_i \epsilon(t_i) = 1$$

on en déduit immédiatement que $\epsilon(u) = 1$.
(54) cf [Oths]
(55) Par la formule (39), $(S \otimes S) \circ \Delta = T \circ \Delta \circ S$, et on a vu que $S \otimes S(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$ donc en appliquant $S \otimes S$, on obtient $\Delta(S(u)) = (\mathcal{R}_{21}\mathcal{R})^{-1}(S(u) \otimes S(u)) = (S(u) \otimes S(u))(\mathcal{R}_{21}\mathcal{R})^{-1}$.
(56) S'obtient facilement à partir des deux résultats précédent et du fait que $uS(u)$ est central.
(57) On a $S(v_2) = S(S(u)u) = S(u)S^2(u) = S(u)u = v_2$.
(58) De même $\epsilon(v_2) = \epsilon(S(u))\epsilon(u) = 1$.

Définition 3.1.12. *On appelle algèbre de Hopf rubanée une algèbre de Hopf tressée $(H, M, u, \Delta, \epsilon, \mathcal{R})$ avec un élément $v \in H$ vérifiant :*

$$v \quad \textit{est central} \tag{59}$$

$$v^2 = S(u)u \tag{60}$$

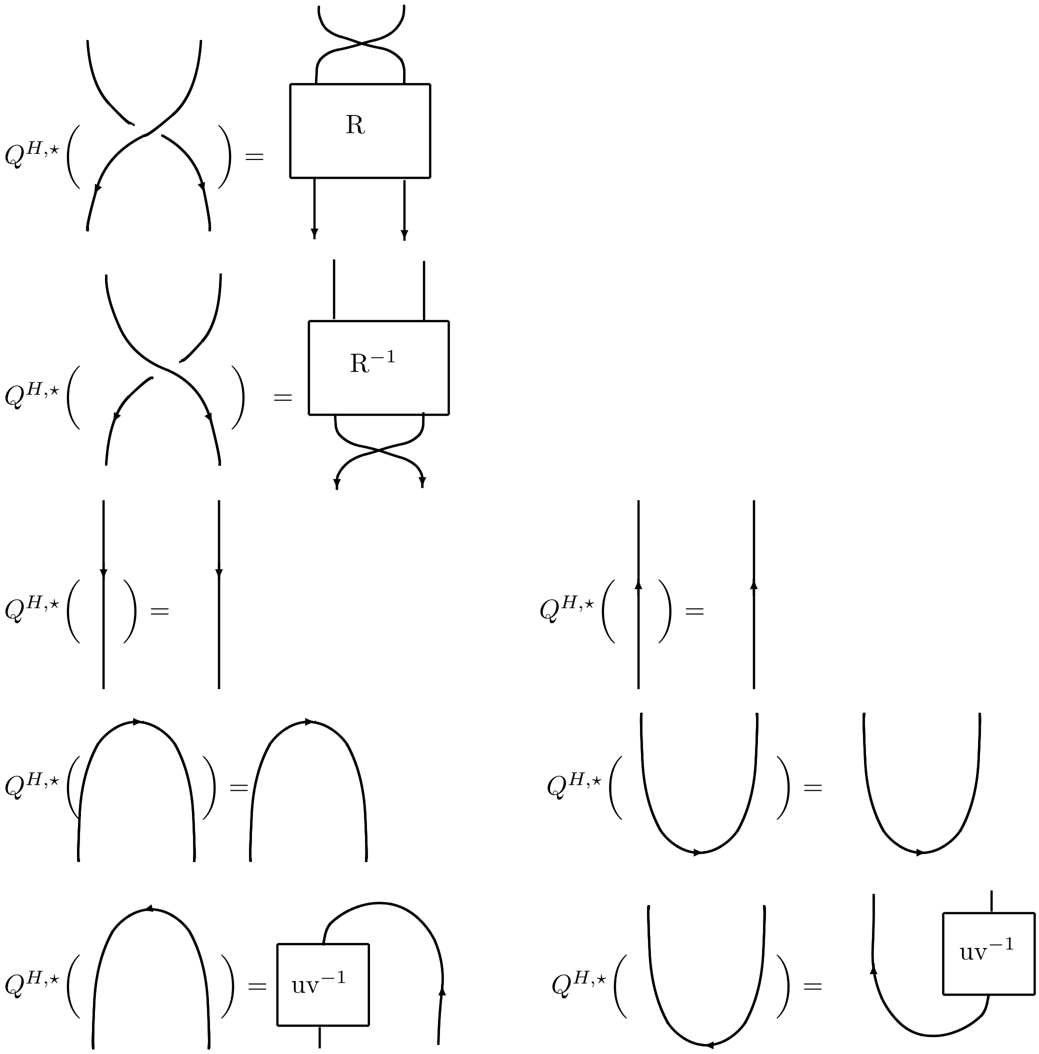
$$\Delta(v) = (v \otimes v)(\mathcal{R}_{21}\mathcal{R})^{-1} \tag{61}$$

$$S(v) = v \tag{62}$$

$$\epsilon(v) = 1 \tag{63}$$

3.2 invariant universel d'enchevêtrement orienté

On considère dorénavant une algèbre de Hopf rubanée $(H, M, u, \Delta, \epsilon, S, \mathcal{R}, v)$ avec S inversible. On introduit alors l'invariant universel de H , dont la valeur sur un diagramme d'enchevêtrement D est un élément de H et se note $Q^{H,\star}(D)$. Définissons d'abord les valeurs de $Q^{H,\star}$ pour les diagrammes élémentaires d'enchevêtrement :



Soit D un diagramme d'enchevêtrement orienté. On décompose D en enchevêtrements élémentaires. La valeur de $Q^{H,\star}$ sur D s'obtient en multipliant le long de l'enchevêtrement les valeurs de $Q^{H,\star}$ sur les enchevêtrements élémentaires, un point de départ du parcourt étant fixé à l'avance. Si D est un diagramme comportant l composantes alors on sélectionne sur chaque composantes un point, puis on fait sur chaque composante le produit des éléments de H sur chaque brin dans le sens de l'orientation du noeud : on obtient alors un élément de $(H/I)^{\otimes l}$ où I est le sous-espace vectoriel de H engendré par les éléments de la forme $xy - yx$ $(x, y \in H)$. Notons qu'il est nécessaire de quotienté en raison de l'ambiguité laissée par le choix d'un point de départ du parcours de chaque composante de D. Le théorème suivant stipule que $Q^{H,\star}$ est un invariant d'isotopie.

Théorème 3.2.1. *Soit D le diagramme d'un enchevêtrement orienté L comportant l composantes.Alors $Q^{H,\star}(D) \in (A/I)^{\otimes l}$ est inchangé par isotopie de l'enchevêtrement L. On apelle cet invariant le H-invariant universel de L, et on le note $Q^{H,\star}(L)$.*

Démonstration. Il suffit de vérifier que $Q^{H,\star}$ est inchangé par les mouvements de Turaev définis en partie 2. Pour les mouvements (2.1), (2.2) et (2.8), c'est évidemment le cas par définition de $Q^{H,\star}$. l'invariance sous le mouvement (2.3) de $Q^{H,\star}$ provient de la commutativité de R et de $u \otimes u$, et du fait que v est central dans H.
En ce qui concerne l'invariance sous le mouvement (2.7), on calcul $Q^{H,\star}$ pour les deux types de boucles possibles. B_1 désigne ici la boucle supérieure du diagramme de droite de (2.7).

$$\begin{aligned} Q^{H,\star}(B_1) &= \sum_i t_i u v^{-1} s_i \\ &= v^{-1} u \sum_i S^{-2}(t_i) s_i \\ &= v^{-1} \end{aligned}$$

Par la relation (51) et le fait que v soit central dans H on obtient l'avant dernière égalité. Dans la dernière égalité on utilise le fait que $u^{-1} = \sum_i S^{-2}(t_i)s_i$ (obtenu à partir des identités (43) et (46)). De façon similaire, si B_2 désigne la boucle inférieure du diagramme de droite de (2.7), on a :

$$\begin{aligned} Q^{H,\star}(B_1) &= \sum_i s'_i u v^{-1} t'_i \\ &= v^{-1} u \sum_i S^{-2}(s'_i) t'_i \\ &= v^{-1} u \sum_i S^{-1}(s_i) t_i \\ &= v^{-1} u S(u) \\ &= v \end{aligned}$$

La troisième égalité étant toujours obtenue par (51) et le fait que v soit central. La quatrième égalité s'obtient à partir de (49). Quant à la cinquième égalité, il suffit d'écrire la définition de u en utiliser deux fois la relation (49) pour avoir $S(u) = \sum_i S(s_i)S^2(t_i) = \sum_i S^{-1}(s_i)t_i$.
Ainsi par les deux calculs précédents, on en déduit la stabilité par le mouvement (2.7).
L'invariance sous le mouvement (2.4) provient simplement du fait que $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}^{-1}$ sont inverses l'un de l'autre.
De plus, on obtient l'invariance de $Q^{H,\star}$ sous (2.5) par le calcul suivant (D désigne le

diagramme non trivial de (2.5) :

$$\begin{aligned}
Q^{H,\star}(D) &= \sum_{i,j} t'_j t_i \otimes uv^{-1} s_i v u^{-1} s'_j \\
&= \sum_{i,j} t'_j t_i \otimes S^2(s_i) s'_j \\
&= \sum_{i,j} t'_j t_i \otimes S(S^{-1}(s'_j) S(s_i)) \\
&= (Id \otimes S)((Id \otimes S^{-1})\mathcal{R}^{-1}.(Id \otimes S)\mathcal{R}) \\
&= (Id \otimes S)(\mathcal{R}.\mathcal{R}^{-1}) \\
&= 1 \otimes 1
\end{aligned}$$

Pour la deuxième égalité, on a utilisé la centralité de v et la relation (51). Pour la troisième égalité, on a utilisé le fait que S est un antimorphisme. Enfin, pour la cinquième égalité, on a utilisé la relation (51).
Enfin, l'invariance sous le mouvement (2.6) découle immédiatement de la relation l'équation de Yang-Baxter.

3.3 Opérateurs invariants dérivés d'une algèbre de Hopf rubannée.

Soit H une algèbre de Hopf rubanée. Une représentation de H sur un espace vectoriel V est simplement la donnée d'un morphisme d'algèbres $\rho : H \to End(V)$. On rapelle qu'une représentation est dite irréductible si aucun sous espace stricte non nul n'est stable par tous les $\rho(h)$ lorsque h parcourt H.
Soit ρ une représentation irréductible de H sur V. On définit alors les deux endomorphismes $R \in End(V \otimes V)$ et $h \in End(V)$ par :

$$R = T \otimes ((\rho \otimes \rho)(\mathcal{R})), \quad h = \rho(uv^{-1})$$

Avec les notations utilisées dans tout le chapitre, on a donc :

$$R(x \otimes y) = \sum_i \rho(t_i) y \otimes \rho(s_i) x \tag{64}$$

D'après la partie précédente, si R et h vérifient les relations données par le théorème 2.2.1, alors ces deux endomorphismes permettent de définir un invariant d'enchevêtrement orienté.

Théorème 3.3.1. *R et h vérifient les conditions données par le théorème 2.2.1, et par conséquent on obtient à partir de R et h un invariant d'enchevêtrement orienté noté $Q^{H,V}(T)$.*

Démonstration. Puisque les éléments R et uv^{-1} sont inversibles, il en va de même des endomorphismes $\mathcal{R}$ et h. Il faut maintenant vérifier que $\mathcal{R}$ et h vérifient les conditions de 2.2.1. Montrons tout d'abord la relation (8) de 2.2.1. On applique (50) et le fait que $S^2(x) = uxu^{-1}$ pour obtenir :

$$(u \otimes u)(R) = (S^2 \otimes S^2)(R)(u \otimes u) = (S \otimes S)^2(R)(u \otimes u) = R(u \otimes u) \tag{65}$$

le caractère central de v donne alors le résultat.

On obtient la relation (9) de 2.2.1 de la façon suivante : par définition de Tr_2 on a

$$\begin{aligned}
Tr_2((Id\otimes h)R)(x) &= \sum_k (Id\otimes e_k^\star)(Id\otimes H)R(x\otimes e_k)\\
&= \sum_k (Id\otimes e_k^\star)\sum_i \rho(t_i)e_k\otimes\rho(uv^{-1})\rho(s_i)x\\
&= \sum_{i,k} e_k^\star(\rho(uv^{-1})\rho(s_i)x)\rho(t_i)(e_k)\\
&= \sum_{i,k} \rho(t_i)(e_k^\star(\rho(uv^{-1})\rho(s_i)x)e_k)\\
&= (\sum_i \rho(t_i)\rho(uv^{-1})\rho(s_i))x
\end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$Tr_2((Id\otimes h)) = \sum_i \rho(t_i)\rho(uv^{-1})\rho(s_i) = \rho(\sum_i t_iuv^{-1}s_i)$$

Or dans la preuve du fait que $Q^{H,\star}$ est un invariant d'isotopie, on a rencontré l'égalité $\sum_i t_iuv^{-1}s_i = v^{-1}$. Comme v^{-1} est central et V irréductible, le lemme de Schur nous donne que $\rho(v^{-1}) = c.Id$, d'où le résultat (le cas avec $\mathcal{R}^{-1}$ se traite de la même manière). Pour la relation (11) de 2.2.1, on transforme les deux membres :

$$\begin{aligned}
(R\otimes Id)(Id\otimes R)(R\otimes Id) &= T_{12}\rho\otimes\rho\otimes\rho(\mathcal{R}_{12})T_{23}\rho\otimes\rho\otimes\rho(\mathcal{R}_{23})T_{12}\rho\otimes\rho\otimes\rho(\mathcal{R}_{12})\\
&= T_{12}T_{23}\rho\otimes\rho\otimes\rho(\mathcal{R}_{13})T_{12}\rho\otimes\rho\otimes\rho(\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{12})\\
&= T_{12}T_{23}T_{12}\rho\otimes\rho\otimes\rho(\mathcal{R}_{23}\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}12)\\
&= T_{13}\rho\otimes\rho\otimes\rho(\mathcal{R}_{23}\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}12)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
(Id\otimes R)(R\otimes Id)(Id\otimes R) &= T_{23}\rho\otimes\rho\otimes\rho(\mathcal{R}_{23})T_{12}\rho\otimes\rho\otimes\rho(\mathcal{R}_{12})T_{23}\rho\otimes\rho\otimes\rho(\mathcal{R}_{23})\\
&= T_{23}T_{12}\rho\otimes\rho\otimes\rho(\mathcal{R}_{13})T_{23}\rho\otimes\rho\otimes\rho(\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23})\\
&= T_{23}T_{12}T_{23}\rho\otimes\rho\otimes\rho(\mathcal{R}_{12}\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23})\\
&= T_{13}\rho\otimes\rho\otimes\rho(\mathcal{R}_{12}\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23})
\end{aligned}$$

Où T_{12}, T_{23} et T_{13} désignent les endomorphismes définis par

$$T_{12}(x\otimes y\otimes z) = y\otimes x\otimes z$$

$$T_{23}(x\otimes y\otimes z) = x\otimes z\otimes y$$

$$T_{13}(x\otimes y\otimes z) = z\otimes y\otimes x$$

Alors par la relation (47) l'égalité des deux membres est claire.
Enfin, pour obtenir (10) de 2.2.1, le calcul donne :

$$(R^{-1})^{\circlearrowleft}.((Id_V\otimes h)R(h^{-1}\otimes Id_V))^{\circlearrowleft} = (\rho\otimes\rho^\star)(\sum_{i,j} t'_jt_i\otimes uv^{-1}s_ivu^{-1}s'_j)$$

(où $\rho^\star(h) = (\rho(h))^\star$

Comme précédemment, on a déjà rencontré l'égalité $\sum_{i,j} t'_j t_i \otimes uv^{-1}s_ivu^{-1}s'_j = 1 \otimes 1$.
Le résultat en découle immédiatement.

□

Il est possible de relier l'invariant universel à l'opérateur invariant introduit ci-dessus lorsque l'on utilise la même algèbre de Hopf H. On admettra ce résultat.

Théorème 3.3.2. *: Soit L un enchevêtrement orienté à l composantes et H une algèbre de Hopf rubanée. Alors l'opérateur invariant associé $Q^{H,V}(L)$ à une représentation irréductible de H et l'invariant universel $Q^{H,\star}(L) \in (H/I)^{\otimes l}$ dérivé de H sont reliés par :*

$$Q^{H,V}(L) = (Trace_V)^{\otimes l}(Q^{H,\star}(L)) \tag{66}$$

Où $Trace_V(h) = trace(\rho(h))$
(Remarquons que l'ambiguité sur l'élément $Q^{H,\star}(L)$ qui est défini modulo I est levée par la trace).

3.4 Application au groupe quantique $U_q(\mathfrak{sl}_2)$.

On va voir dans cette section que les valeurs du polynôme de Jones en les complexes q qui ne sont pas des racines de l'unité correspondent à l'opérateur invariant issu une déformation à un paramètre $U_q(\mathfrak{sl}(2))$ de l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{sl}(2)$.

Définition 3.4.1. *On appelle $\mathfrak{sl}_2$ le sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{C})$ engendré par les matrices : $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ que l'on munit d'une structure de groupe de Lie via le crochet défini par $[X,Y] = H$, $[X,Y] = 2X$ $[X,Y] = -2Y$.*
On appelle alors algèbre enveloppante de $\mathfrak{sl}(2)$ notée $U(\mathfrak{sl}(2))$ le quotient de l'algèbre tensorielle $T(L)$ par l'idéale bilatère engendré par les éléments de la forme $xy - yx - [x,y]$.

On peut munir $U(\mathfrak{sl}(2))$ d'une structure d'algèbre de Hopf cocommutative rubannée via les morphismes définis par : $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$, $\epsilon(x) = 0$, $S(x) = -x$, et en posant
$\mathcal{R} = 1 \otimes 1$ et $u = v = 1$.
Pour toute représentation irréductible V de $U(\mathfrak{sl}(2))$, on obtient $R = \tau_{V \otimes V}$ et $h = id_V$.
D'où pour un enchevêtrement orienté L clôture d'une tresse b à n brins :
$[L] = Tr(h^{\otimes n}\psi_n)(b) = Tr(\psi_n(b)) \in \{-1, 1\}$.
Ainsi, la structure d'algèbre de Hopf naturelle sur $U(\mathfrak{sl}(2))$ ne donne pas d'invariant intéressant. On se retrouve alors dans une situation analogue à celle de la première partie, lorsque qu'on avait définit une représentation du groupe des tresses via T, car cette représentation ne donnait pas non plus d'invariant exploitable. Pour en obtenir un, L'idée avait été de déformer la matrice de T. On va procéder ici de manière similaire en déformant $U(\mathfrak{sl}(2))$ de manière à récupérer une algèbre de Hopf non triviale $U_q(\mathfrak{sl}(2))$. Ce procédé est appellé quantisation. En l'appliquant, on obtient une algèbre qui n'est plus nécessairement l'algèbre enveloppante d'un groupe de Lie. En tout cas, on ne connait pas ce groupe, il est dit quantique. Par abus de langage, le terme de groupe quantique désigne $U_q(\mathfrak{sl}(2))$, et non plus le groupe de Lie dont il pourrait être l'algèbre enveloppante.

Définition 3.4.2. *Pour q non racine de l'unité, on appelle $U_q(\mathfrak{sl}(2))$ la $\mathbb{C}$ algèbre générée par E, F, K, K^{-1} et les relations :*

$$K = 1$$
$$KEK^{-1} = q^2 E$$
$$KFK^{-1} = q^{-2} F$$
$$[E, F] = \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}}$$

Sur la $\mathbb{C}$-algèbre libre à quatres éléments $A = \mathbb{C}\left\langle E, F, K, K^{-1}\right\rangle$, définir un morphisme ou un anti-morphisme d'algèbre se fait en préscrivant ses valeurs en E, F, K et K^{-1}. Soit $\Delta : A \longrightarrow A \otimes A$ et $\epsilon : A \longrightarrow \mathbb{C}$ morphismes d'algèbre définis par :

$$\Delta(E) = 1 \otimes E + E \otimes K$$
$$\Delta(F) = K^{-1} \otimes F + F \otimes 1$$
$$\Delta(K) = K \otimes K$$
$$\Delta(K^{-1}) = K^{-1} \otimes K^{-1}$$
$$\epsilon(E) = \epsilon(F) = 0$$
$$\epsilon(K) = \epsilon(K^{-1}) = 1$$

Soit S l'antimorphisme sur A définit par :

$$S(E) = -EK^{-1}$$
$$S(F) = -KF$$
$$S(K) = K^{-1}$$
$$S(K^{-1}) = K$$

Ces applications munissent A d'une structure d'algèbre de Hopf pour laquelle l'idéal bilatère de A engendré par les relations précédentes est un idéal de Hopf. On récupère ainsi une structure d'algèbre de Hopf sur le quotient $U_q(\mathfrak{sl}(2))$ dont la comultiplication, la counité et l'antipode sont données par les équations précédentes. Toutefois, $U_q(\mathfrak{sl}(2))$ ne possède pas de R-matrice non triviale qui en fasse une algèbre de Hopf rubannée. Il faut se placer dans une structure plus riche qui fait l'objet de la définition suivante.
Notons $\mathbb{C}[[h]]$ l'algèbre des séries formelles à coefficient dans $\mathbb{C}$ et considérons la $\mathbb{C}[[h]]$-algèbre $A[[h]]$des séries formelles à coefficients dans la $\mathbb{C}$-algèbre libre à trois éléments $A = \mathbb{C}\langle X, Y, H\rangle$. Un élément de cette algèbre est inversible si et seulement si son terme constant est non nul. On définit sur cette algèbre une structure métrique complète pour la distance :

$$d(f, g) = 0 \quad \text{si} \quad f = g$$

$$d(f, g) = \frac{1}{2^{Min\{k/f_k = g_k\}}} \quad \text{sinon}$$

On désigne alors par $\overline{I}$ la fermeture de l'idéal bilatère engendré par les éléments $HX - XH - 2X$, $HY - YH + 2Y$ et $XY - YX - \frac{sinh(hH/2)}{sinh(h/2)}$, en remarquant que le dernier élément est bien défini puisque $\frac{sinh(hH/2)}{sinh(h/2)}$ s'exprime à l'aide d'une série formelle de terme constant H non nul.

Définition 3.4.3. *On appelle algèbre enveloppante quantique de* $sl(2)$*, notée* $U_h(\mathfrak{sl}(2))$ *l'algèbre quotient de* $\mathbb{C}\langle X, Y, H\rangle [[h]]$ *par* $\overline{I}$*.*

On munit $U_h(\mathfrak{sl}(2))$ d'une structure d'algèbre de Hopf via
$\Delta_h : U_h(\mathfrak{sl}(2)) \longrightarrow U_h(\mathfrak{sl}(2))\tilde{\otimes} U_h(\mathfrak{sl}(2))$, $S : U_h(\mathfrak{sl}(2)) \longrightarrow U_h(\mathfrak{sl}(2))$, $\epsilon_h : \longrightarrow \mathbb{C}[[h]]$ définis par :

$$\Delta_h(H) = H \otimes 1 + 1 \otimes H$$

$$\Delta_h(X) = X \otimes e^{hH/2} + e^{-hH/2} \otimes X$$

$$\Delta_h(Y) = Y \otimes e^{hH/2} + e^{-hH/2} \otimes Y$$

$$\epsilon_h(X) = \epsilon_h(Y) = \epsilon_h(H) = 0$$

et

$$S_h(H) = -H$$

$$S_h(X) = -e^{hH/2} X$$

$$S_h(H) = -e^{-hH/2} X$$

Où $U_h(\mathfrak{sl}(2))\tilde{\otimes} U_h(\mathfrak{sl}(2))$, $S : U_h(\mathfrak{sl}(2)) \longrightarrow U_h(\mathfrak{sl}(2))$ désigne la complétion de $U_h(\mathfrak{sl}(2)) \otimes U_h(\mathfrak{sl}(2))$ pour la topologie h-adic, isomorphe à $(U_h(\mathfrak{sl}(2)) \otimes U_h(\mathfrak{sl}(2)))[[h]]$.
Remarque : contrairement à la théorie développée précédemment, Δ est à valeur dans un espace a priori plus gros que $U_h(\mathfrak{sl}(2)) \otimes U_h(\mathfrak{sl}(2))$. On admettra dans la suite que les résultats de la section précédente restent valables.

Proposition 3.4.1. $U_h(\mathfrak{sl}(2))$ *est relié à* $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ *par le fait suivant :*
Il existe un morphisme d'algèbre de Hopf injectif $i : U_q(\mathfrak{sl}_2) \longrightarrow U_h(\mathfrak{sl}(2))$ *tel que :*

$$\begin{aligned} i(E) &= Xe^{hH/4} \\ i(F) &= e^{hH/4} Y \\ i(K) &= e^{hH/2} \\ i(K^{-1}) &= e^{-hH/2} \\ i(q) &= e^{h/2} \end{aligned}$$

On pourra donc dans la suite identifier les éléments de $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ à des éléments $U_h(\mathfrak{sl}(2))$.

Proposition 3.4.2. *On note pour* x *dans* $U_h(\mathfrak{sl}(2))$, $exp_q(x) = \displaystyle\sum_{l \geq 0} \frac{q^{l(l-1)/4}}{[l]!} x^l$ *où* $[l]$ *désigne* $\frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}$*. On pose* $\mathcal{R} = e^{h\frac{H \otimes H}{4}} exp_q((q - q^{-1})E \otimes F)$*. Alors* $\mathcal{R}$ *est une R-matrice pour* $U_h(\mathfrak{sl}(2))$*. Son inverse est* $\mathcal{R}^{-1} = exp_{q^{-1}}((q^{-1} - q^1)E \otimes F)e^{-h(H \otimes H)/4}$*.*

Démonstration. Posons $\begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} = \frac{[m]!}{[k]![m-k]!}$. On dispose alors de la relation
$\begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} q^{\pm k} = {}^{m-1}_{\ \ k} + \begin{bmatrix} m-1 \\ k-1 \end{bmatrix} q^{\pm m}$.

Lemme .1. *si $x \in U_h(\mathfrak{sl}(2))$, alors $exp_q(x)exp_{q^{-1}}(-x) = exp_{q^{-1}}(-x)exp_q(x) = 1$.*

Démonstration. En effet, par définition,

$$\begin{aligned} exp_q(x)exp_{q^{-1}}(-x) &= \sum_{l_1,l_2\geq 0} \frac{q^{l_1(l_1-1)/4-l_2(l_2-1)/4}}{[l_1]!\,[l_2]!}(-1)^{n_2}x^{l_1+l_2} \\ &= \sum_{n\geq 0} \frac{q^{n(n-1)/4}}{[n]!}(-x)^n \sum_{n_1=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ n_1 \end{bmatrix} q^{n_1(n-1)/2}(-1)^{n_1} \end{aligned}$$

En posant $\phi_n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} q^{k(n-1)/2}(-1)^k$ et $\phi_0 = 1$, on montre que si $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} (1-q^{n-1})\phi_{n-1} &= \sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} q^{k(n-2)}(-1)^k + \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} q^{(k-1)(n-1)/2}(-1)^k \\ &= (\sum_{k=1}^{n-1} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} q^{k(n-1)/2}(-1)^k \left(\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} q^n \right) + (-1)^n q^{n(n-1)} + 1 \\ &= \phi_n \end{aligned}$$

On en déduit la première formule du lemme. La seconde se démontre de manière analogue. $\square$

$$\text{On a} \quad (\Delta \otimes id)(R) = e^{h(H\otimes 1+1\otimes H)\otimes H/4} exp_q((q^{1/2}-q^{-1/2})(E\otimes K + 1\otimes E)\otimes F).$$

$$\begin{aligned} \text{Or} \quad R_{13}R_{23} &= e^{h(H\otimes 1\otimes H)\otimes H/4} exp_q((q^{1/2}-q^{-1/2})(E\otimes 1\otimes F)) e^{h(1\otimes H\otimes H)\otimes H/4} \\ &\times\ exp_q((q^{1/2}-q^{-1/2})(E\otimes K\otimes F)) \\ &= e^{h(H\otimes 1\otimes H)\otimes H/4} e^{h(1\otimes H\otimes H)\otimes H/4} exp_q((q^{1/2}-q^{-1/2})(E\otimes 1\otimes F)) \\ &\times\ exp_q((q^{1/2}-q^{-1/2})(E\otimes K\otimes F) \end{aligned}$$

Or si x et y dans $U_h(\mathfrak{sl}(2))$ sont tels que $xy = q^2yx$ alors $exp_q(x+y) = exp_q(x)exp_q(y)$ (découle de l'identité $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} q^{k(k-n)}x^k y^{n-k}$ quand $xy = q^2yx$).
Donc via les relations dans $U_h(\mathfrak{sl}(2))$, (43) est vraie. On démontre (44) de la même manière. Prouver (41) revient à l'établir sur la famille génératrice $(K^{\pm}, E, F)$, c'est à dire à prouver :

$$(K^{\pm}\otimes K^{\pm})\mathcal{R} = \mathcal{R}(K^{\pm}\otimes K^{\pm}) \tag{67}$$

$$(K\otimes E + E\otimes 1)\mathcal{R} = \mathcal{R}(E\otimes K + 1\otimes E) \tag{68}$$

$$(1\otimes F + F\otimes K^{-1})\mathcal{R} = \mathcal{R}(F\otimes 1 + 1\otimes E) \tag{69}$$

La relation (67) découle immédiatement du fait que $K^{\pm}\otimes K^{\pm}$ commute avec $E\otimes F$ et $e^{hH\otimes H/4}$. Prouver (68) revient à prouver les relations :

$$(K\otimes E)e^{hH\otimes H/4} = e^{hH\otimes H/4}(1\otimes E) \tag{70}$$

$$(E \otimes 1)e^{hH\otimes H/4} = e^{hH\otimes H/4}(E \otimes K^{-1}) \tag{71}$$

$$(E \otimes K^{-1} + 1 \otimes E)exp_q((q - q^{-1})E \otimes F) = exp_q((q - q^{-1})E \otimes F)(E \otimes K + 1 \otimes E) \tag{72}$$

La relation (70) s'obtient par :
$(K \otimes E)e^{hH\otimes H/4} = e^{hH\otimes(H-2)/4}(K \otimes E) = e^{hH\otimes H/4}e^{-hH/2\otimes 1}(K \otimes E) = e^{hH\otimes H/4}(1 \otimes E)$.
(71) s'obtient de la même manière. (72) s'obtient on montrant par récurrence que
$EF^n - F^nE = \frac{[n]q^{-(n-1)}}{q-q^{-1}}(F^{n-1}K - K^{-1}F^{n-1})$, et la proposition est prouvée.

□

On peut alors montrer (admis) que $u = e^{-hH^2/4}\sum_{n\geq 0}\dfrac{q^{3n(n-1)}}{[n]!}(q-q^{-1})^n F^n K^{-n} E^n$ et que l'élément $v = K^{-1}u$ munissent $U_h(\mathfrak{sl}(2))$ d'une structure d'algèbre de Hopf rubannée.
Or $U_q(\mathfrak{sl}(2))$ admet une représentation irréductible $(\rho, \mathbb{C}^2)$ donnée par :

$$\rho(E) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho(F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho(K) = \begin{pmatrix} q^{1/2} & 0 \\ 0 & q^{-1/2} \end{pmatrix}$$

D'où

$$\begin{aligned} \rho \otimes \rho(e^{hH\otimes H/4}) &= exp(\frac{h}{4}(\rho(H) \otimes \rho(H)) \\ &= exp(\frac{h}{4}(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix})) \\ &= \begin{pmatrix} q^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q^{-1/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^{1/2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho \otimes \rho(exp_q((q - q^{-1}))(E \otimes F))) &= \rho(1) \otimes \rho(1) + (q - q^{-1})\rho(E) \otimes \rho(F) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (q - q^{-1}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & q - q^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc

$$\mathrm{R} = \begin{pmatrix} q^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & q^{-1/2} & 0 \\ 0 & q^{-1/2} & q^{1/2} - q^{-3/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^{1/2} \end{pmatrix}$$

D'où $(q^{-3/2}R)(q=t^{-1/2}) = \begin{pmatrix} t^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & t & 0 \\ 0 & t & t^{1/2}-t^{3/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^{1/2} \end{pmatrix}$

D'autre part, $h = \rho(uv^{-1}) = \rho(K)(q=t^{-1/2})= \begin{pmatrix} t^{-1/2} & 0 \\ 0 & t^{1/2} \end{pmatrix}$, et on retrouve les matrices obtenues en première partie, avec la restriction que le polynôme invariant issu des déformations de $U(\mathfrak{sl}(2))$ n'est pas défini sur les racines de l'unité. Toutefois, ceci n'est pas gênant car un polynôme de Laurent en $t^{1/2}$ est entièrement déterminé par ses valeurs sur les complexes qui ne sont pas des racines de l'unité.
La question légitime qui se pose est alors de savoir ce que l'on peut dire du cas où q est une racine de l'unité. En fait, on montre que $U_q(\mathfrak{sl}(2))$ possède encore une structure d'algèbre de Hopf rubannée, et que pour une représentation convenable, on peut reconstruire via cette algèbre un autre invariant de noeud célèbre, à savoir le polynôme d'Alexander.

Références

C.Kassel, *Quantum Groups*, Springer, 1995.

T.Ohtsuki, *Quantum invariants*, Series on Knots and Everything-Vol.29, 2002.

Dascalescu Sorin-Nastasescu Constantin-Rainu Serban, *Hopf Algebras an introduction*, Pure and applied mathematics, 2001.

E.Abe, *Hopf algebras*, Cambridge Univ. Press, 1977.

V.Chari, *A Guide to quantum groups*, Cambridge Univ. Press, 1994.