Introduction au domaine de recherche : Structures de Hodge non-commutatives.

Jean-Baptiste Teyssier,
sous la direction de Claude Sabbah.

Table des matières

Introduction.

La symétrie miroir correspond en physique à une relation définie au sein d'une classe d'algèbres appelées $N = 2$-super théories conformes des champs, [KO05]. Les physiciens conjecturent qu'à toute variété de Calabi-Yau peut être associée une $N = 2$-SCFT. Si l'existence d'un tel procédé était mis à jour, on pourrait chercher à savoir à quelles conditions deux telles variétés X et Y donnent des $N = 2$-SCFT miroirs l'une de l'autre.

Toutefois, le phénomène de symétrie miroir s'observe déjà mathématiquement, à travers par exemple la possibilité pour certaines variétés de Calabi-Yau X d'en associer une seconde dont le diamant de Hodge s'obtienne à partir de celui de X via une réfléxion par rapport à la première bissectrice. C'est en particulier l'origine de la terminologie. Une des façons de contourner la construction hypothétique des physiciens consiste à prendre le problème à rebours en cherchant à définir le phénomène de symétrie miroir d'une manière suffisament unificatrice pour en rendre compte de toutes les manifestations connues ou attendues.

C'est ainsi qu'en 1994, M.Kontsevich formule dans [Kon94] une tentative de définition en terme d'équivalence de catégories liées aux variétés X et Y. L'article [KKP08] donne une généralisation de cette conjecture en terme de structures de Hodge non-commutatives, dépassant le cadre des variétés de Calabi-Yau.

Ce texte se donne pour objectif d'expliquer les notions de structure de Hodge et structure de Hodge non-commutative, puis d'en donner quelques exemples et stratégies de construction.

Mes remerciements vont à Claude Sabbah, à la fois pour la portée de ce sujet ainsi que la patience et la disponibilité dont il a fait preuve durant mes pérégrinations.

1 De la théorie de Hodge à la théorie de Hodge non-commutative.

La théorie de Hodge fournit originellement un outil d'étude de la topologie de certaines variétés compactes fondé sur la détermination de représentants particuliers des classes de cohomologie de De Rham de ces variétés. Le point remarquable est que cet outil soit forgé à l'aide de structures exclusivement liées à leur géométrie différentielle.

Les variétés pour lesquelles on dispose des premiers résultats sont les variétés riemanniennes compactes orientées. Une structure riemannienne g sur une variété X consiste simplement en la donnée d'un produit scalaire g_x sur chaque espace tangent à X, la collection de ces produits scalaires devant vérifier une certaine condition de régularité.

Dans le cas où X est compacte orientée, g permet de munir l'espace des k-formes différentielles $\mathcal{A}^k_X$ de X d'une structure pré-hilbertienne $< \, , \, >$. Dans cet espace, la classe de cohomologie γ d'une forme fermée constitue un espace affine. Modulo certaines difficultés techniques liées à la non-complétude de $(\mathcal{A}^k_X, < \, , \, >)$, un représentant particulier est donc donné par la forme de γ de norme minimale.

On montre alors que cette forme vit dans le noyau d'un opérateur Δ appelé *Laplacien*, construit à partir de g, motivant ainsi la relation de cet opérateur avec la cohomologie de X. Appelons formes harmoniques les formes dans $Ker\ \Delta$. Remarquant qu'une forme harmonique est nécessairement fermée, on peut toujours en regarder la classe de cohomologie. Le résultat central est le *théorème de Hodge* :

Theorem 1.1. *Soit X variété riemannienne compacte orientée, Δ le laplacien associé. Alors l'application de passage à la cohomologie $Ker\ \Delta \to H^k(X, \mathbb{R})$ est un isomorphisme.*

Regardons maintenant l'intéret de ce résultat pour la géométrie complexe.

Pour $X = \mathbb{C}^n$, l'espace tangent à X vu comme variété réelle en un point donné est l'espace vectoriel $T_{\mathbb{R}}X = \mathbb{C}^n$ vu comme espace vectoriel réel, muni de l'opérateur réel de multiplication par i noté J. Une base de cet espace est donnée par les $(e_1, ie_1, \cdots e_n, ie_n)$. Notons $(dx_1, dy_1, \cdots dx_n, dy_n)$ la base duale. les combinaisons à coefficients dans $\mathbb{C}$ de ces formes peuvent alors être vues comme une base des formes $\mathbb{C}$-linéaires du complexifié $T_{\mathbb{C}}X = T_{\mathbb{R}}X \otimes \mathbb{C}$. Une autre base est donnée par les $dz_k := dx_k + idy_k$ et les $d\overline{z}_k := dx_k - idy_k$, fournissant une décomposition des formes réelles sur $T_{\mathbb{R}}X$ en une unique partie $\mathbb{C}$-linéaire dite de type $(1,0)$ et une unique partie $\mathbb{C}$-antilinéaire dite de type $(0,1)$. Une combinaison linéaire d'un wedge de p formes de type $(1,0)$ et q formes de type $(0,1)$ sera dite de type (p,q). Par exemple $dz_k \wedge d\bar{z}_k$ est de type $(1,1)$. On a bien sûr $\Lambda^k T_{\mathbb{C}}X = \bigoplus_{p+q=k} \Lambda^{p,q}$.

Si X est maintenant une variété complexe quelconque, on peut appliquer ceci à chaque fibre de $T_{\mathbb{C}}X$, et si $\mathcal{A}_X^k$ désigne l'espace des k-formes à coefficients complexes sur X, obtenir une décomposition en type

$$\mathcal{A}_X^k = \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{A}_X^{p+q}$$

Si de plus X est compacte munie d'une métrique g, on sait que l'on dispose sur $\mathcal{A}_X^k$ du laplacien Δ. Celui-ci n'est pas en général compatible avec la structure complexe de X, dans la mesure où il ne préserve pas en général le type d'une forme. Il faut pour cela une compatibilité entre g et la structure complexe, conduisant à la notion de *variété kählérienne.*

Definition 1.2. Soit X est une variétés complexe, h une métrique hermitienne sur TX. Alors les parties réelle et imaginaire de h fournissent respectivement une métrique riemannienne g et une 2-forme ω sur le fibré réel sous-jacent à TX. De plus l'opérateur réel de multiplication par i induit par la structure complexe est orthogonal pour g. On dira alors que (X,h) *est kählérienne* si ω est fermée.

Exemple 1.3. $\mathbb{C}^n$ muni de son produit hermitien standard est kählérienne. Du fait que l'on peut munir les espaces projectifs d'une structure de variété kählérienne via la métrique de Fubini-Study (voir exemple 3.1.9 de [Huy05]) et que toute sous-variété d'une variété kählérienne est kählérienne pour la métrique induite, toute variété projective est en particulier kählérienne.

Le point crucial est que dans le cas kählérien Δ préserve aussi le type des formes, de sorte que si ω est une forme harmonique et $\sum \omega_{p,q}$ sa décomposition par le type, alors $\sum \Delta\omega_{p,q} = 0$, avec $\Delta\omega_{p,q}$ de type (p,q) donc nulle. Donc chaque $\omega_{p,q}$ est harmonique, et l'espace des formes harmoniques récupère ainsi une bi-graduation par le type, que l'on peut transporter par théorème de Hodge au niveau de la cohomologie de De Rham. On a ainsi (cor. 3.2.12 de [Huy05])

Theorem 1.4. *Soit X variété kählérienne compacte. On a une décomposition*

$$H^k(X,\mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}$$

indépendante de la structure kählérienne et telle que la conjugaison complexe induite sur $H^k(X,\mathbb{C}) = H^k(X,\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}$ par la conjugaison sur $\mathbb{C}$ échange $H^{p,q}$ et $H^{q,p}$, c'est-à-dire $\overline{H^{p,q}} = H^{q,p}$.

Exemple 1.5. On sait que les nombres de betti b_k de l'espace projectif $\mathbb{P}^n$ sont nuls pour k impair et valent 1 si k est pair compris entre 0 et $2n$. Dans ce dernier cas, c'est-à-dire $k = 2m$ la symétrie $\overline{H^{p,q}} = H^{q,p}$ force $H^{p,2m-p}$ à être nul dès que p est distinct de m. Autrement dit $H^{2m}(X, \mathbb{C}) = H^{m,m}$.

Ceci motive alors la

Definition 1.6. Soit V espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ et k un entier. Notons $V_{\mathbb{C}} = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ le complexifié de V. On appelle *structure de Hodge réelle de poids k sur V* toute décomposition

$$V_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=k} V^{p,q}$$

telle que $\overline{V^{p,q}} = V^{q,p}$, où la conjugaison sur $V_{\mathbb{C}}$ est induite par la conjugaison usuelle sur $\mathbb{C}$. Les dimensions des $V^{p,q}$ constituent les nombres de Hodge de $(V, V^{p,q})$, et se notent $h^{p,q}$.

Remarque 1.7. Une définition analogue peut bien sûr être donnée en remplaçant $\mathbb{R}$ par $\mathbb{Q}$. On parle alors de structure de structure de Hodge rationelle. En particulier, sachant par théorème de De Rham que $H^k(X, \mathbb{C}) = H^k(X, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$, $(H^k(X, \mathbb{Q}), H^{p,q})$ est une structure de Hodge rationnelle de poids k.

Dans le cas d'une structure de Hodge provenant de la cohomologie d'une variété kählérienne compacte X, ces nombres renferment des informations précieuses sur la géométrie de X. On dispose par exemple de la proposition 6.2.10 de [Huy05] :

Proposition 1.8. *Soit X variété complexe compacte. Alors les déformations locales du premier ordre de X sont en bijection avec $H^1(X, TX)$.*

Cela signifie que si l'on imagine la structure complexe de X comme un point d'un certain germe de variété $Def(X)$ qui décrirait les structures complexes possibles sur la variété réelle sous-jacente à X proches de la structure complexe initiale, alors dans les bons cas $H^1(X, TX)$ peut se voir comme l'espace tangent à $Def(X)$ en la structure complexe de X. Par conséquent si X est une variété de Calabi-Yau de dimension n, la dualité de Serre assure que $Def(X)$ est de dimension $h^{1,n-1}$.

Exemple 1.9. Si X est une courbe elliptique, la trivialité de son fibré tangent assure qu'il s'agit d'une variété de Calabi-Yau. On montre que sa cohomologie s'identifie comme structure de Hodge au complexifié des formes sur $\mathbb{C}$, munies de la décompositions par le type. En particulier $H^{1,1} = \mathbb{C}dz \wedge d\overline{z}$, d'où $h^{1,n-1} = h^{1,1} = 1$. Ceci est cohérent avec le fait que les structures complexes sur le tore soient classifiées à biholomorphisme près par $\mathbb{C}$.

On en vient alors au cas non-commutatif. La terminologie s'explique par l'existence (encore conjecturale : voir 2.41 de [KKP08]) d'une structure de Hodge non-commutative canonique sur un objet de la géométrie non-commutative associé à une algèbre lisse A : l'homologie cyclique periodique, se spécialisant par

1.14.1 de [Kon08] en la cohomologie de De Rham habituelle dans le cas où A est l'algèbre de fonction d'une variété algébrique affine lisse.

Initialement motivée par des problèmes décrits dans [Sab09], on dispose aujourd'hui de la

Definition 1.10. Une structure de Hodge non-commutative rationnelle $\mathcal{H}$ est la donnée $(H, \nabla, \mathcal{E}_B)$ d'un fibré vectoriel H algébrique sur $\mathbb{C}$ muni d'une connexion ∇ , ainsi que la donnée d'un $\mathbb{Q}$-réseau dans chaque fibre de H, ces réseaux s'organisant en un fibré de $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels dont les sections sont parallèles pour ∇, c'est-à-dire annulées par ∇. On impose de plus :

1. **Axiome de filtration non-commutative.**
   ∇ est méromorphe à pôle d'ordre inférieur ou égal à 2 en l'origine. Cela signifie ici qu'on dispose d'un opérateur associant à toute section de H une 1-forme sur $\mathbb{C}^*$ à valeur dans H suffisamment régulière en 0. Plus concrètement, il existe un choix de trivialisation de H l'identifiant au fibré trivial sur $\mathbb{C}$ de fibre $\mathbb{C}^n$ et via lequel ∇ agit par une matrice à coefficients du type fdz, avec f méromorphe en 0 à pôle d'ordre au plus 2 en 0.
2. **Axiome de $\mathbb{Q}$-structure.**
   Il s'agit d'une condition un peu technique de compatibilité entre ∇ et le fibré $\mathcal{E}_B$ ne jouant pas de rôle dans la suite. On en passera donc les détails sous silence.
3. **Axiome d'opposition.**

On construit à partir de $\mathcal{E}_B$ un fibré holomorphe $\widehat{H}$ sur $\mathbb{P}^1$ dont on demande qu'il soit trivial.

Plus précisément, regardons $\mathbb{P}^1$ comme la sphère de Riemann, sur laquelle on note γ la symétrie par rapport à l'équateur. Sa restriction à $\mathbb{P}^1 \setminus \{0\}$ est donnée par $z \to \frac{1}{\bar{z}}$, et ainsi γ est anti-holomorphe. Si $g_{\alpha\beta}$ fonction de transition de H sur un ouvert $U \subset \mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\}$, $\overline{g_{\alpha\beta} \circ \gamma}$ est une fonction de transition du fibré holomorphe $\overline{\gamma^* H}$ sur $\gamma(U)$, et pour $z \in S^1$, $\left(\overline{\gamma^* H}\right)_z = \overline{H}_z$.

Pour $z \in S^1$, le $\mathbb{Q}$-réseau de H_z fourni par $\mathcal{E}_B$ induit donc un isomorphisme de $\mathbb{C}$-espace vectoriel

$$\tau_z : H_z \xrightarrow{\sim} \overline{H}_z$$

recollant ainsi la restriction de H à l'hémisphère sud de $\mathbb{P}^1$, avec la restriction de $\overline{\gamma^* H}$ à l'hémisphère nord. Le point est que $\widehat{H}$ *peut être muni d'une structure de fibré holomorphe*, et l'axiome d'opposition consiste à demander qu'il soit trivial.

Le lien avec les structures de Hodge classiques est donné par la

Proposition 1.11. *Il existe un foncteur pleinement fidèle de la catégorie des structures de Hodge vers la catégorie des structures de Hodge non-commutatives.*

Etant donné une structure de Hodge $(V, V^{p,q})$, la construction explicite de ce foncteur permet de voir en particulier que l'axiome d'opposition est la généralisation non-commutative de l'axiome identifiant $V^{p,q}$ à $V^{q,p}$ via la conjugaison. Pour ce qui est de l'axiome de filtration non-commutative, il semble s'imposer de lui-même quand on en vient à faire des calculs explicites.

Cette proposition suggère que la structure de Hodge non-commutative associée à une structure de Hodge se souvienne en particulier des nombres de Hodge de cette dernière. Une question qui m'intéresse est la possibilité de formuler cette réminescence en des termes qui fassent sens pour n'importe qu'elle structure de Hodge non-commutative, et ainsi obtenir des "nombres de Hodge non-commutatifs".

Il s'agit en fait de l'indice supersymétrique, déjà découvert par les physiciens dans les années 90 (voir [CFIV92]) et faisant l'objet d'études récentes dans [Sab08]. Il se présente sous la forme d'une collection de fonctions analytiques correspondant aux valeurs propres d'une famille d'opérateurs auto-adjoints (Q_z) sur la fibré H intervenant dans 1.10. Le point est que $\mathcal{H}$ est "classique" de poids n si et seulement si chacune de ces fonctions est constante à un entier p, cet entier correspondant justement à un facteur $H^{p,n-p}$ non nul dans la décomposition de Hodge de $\mathcal{H}$. $h^{p,n-p}$ se lit alors comme la dimension de l'espace propre de Q_z correspondant à la valeur propre p.

2 Etude d'un exemple.

Soit H le fibré trivial de rang 1 sur $\mathbb{C}$, et $\nabla = d - \frac{a}{z}dz$.

Proposition 2.1. $(H, \mathbb{Q}z^a, inc)$ *est une structure de Hodge non-commutative si et seulement si a est de la forme $\frac{1}{2i\pi}\ln r$, avec r rationnel strictement positif.*

preuve. Si a est tel que le triplet de la proposition définisse une structure de Hodge non commutative, le caractère rationnel de la monodromie de ∇ impose que a soit de la forme $\frac{1}{2i\pi}\ln r + \frac{w}{2}$ où r rationnel strictement positif et w entier. Le $\mathbb{Q}$-réseau fourni par $\mathbb{Q}z^a$ en un point $e^{i\theta}$ de l'équateur est donc $\mathbb{Q}e^{ia\theta}$, déduit de $\mathbb{Q}$ par rotation d'un angle $\frac{w\theta}{2}$ puis dilatation d'un facteur $\frac{\theta}{2\pi}\ln r$. Il subit w renversememnts lors du parcours de S^1.

D'autre part, le fait que ∇ soit à singularité régulière assure que l'axiome de $\mathbb{Q}$-structure est automatiquement vérifié.

Notons C_1 l'hémisphère sud de $\mathbb{P}^1$, C_2 l'hémisphère nord. Une branche donnée de z^a notée s définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}^*$ invariant par γ fournit la trivialisation locale de $\widehat{H}$ sur Ω

$$\widehat{s} : z \longrightarrow \begin{cases} s(z) & \text{si } z \in \Omega \cap C_1 \\ [s(z)] & \text{si } z \in \Omega \cap S^1 \\ s\left(\frac{1}{\overline{z}}\right) & \text{si } z \in \Omega \cap C_2 \end{cases}$$

On définie donc une autre trivialisation locale de $\widehat{H}$ par

$$t = z^{-a} \cdot_{\widehat{H}} \widehat{s} = \begin{cases} 1 & \text{si } z \in \Omega \cap C_1 \\ [1] & \text{si } z \in \Omega \cap S^1 \\ e^{-a\ln z} \cdot_{\overline{H}_{\frac{1}{\overline{z}}}} s\left(\frac{1}{\overline{z}}\right) = e^{-\overline{a}\ln\overline{z}} e^{-a\ln\overline{z}} & \\ = \frac{1}{\overline{z}^w} = \frac{1}{z^w}.1 & \text{si } z \in \Omega \cap C_2 \end{cases}$$

De telles trivialisations t se recollent donc en une section de $\widehat{H}$ sur $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, \infty\}$ admettant un prolongement en une trivialisation de $\widehat{H}$ sur $\mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\}$. Or on dispose sur C_2 de la trivialisation constante à 1 fournissant avec celle qui précède le cocycle $\frac{1}{z^w}$. Ainsi $\widehat{H} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(w)$, et la proposition s'en déduit. □

Remarque 2.2. Le calcul de $\widehat{H}$ fait apparaitre qu'il ne dépend pas de r. Ceci était attendu puisque le recollement ne fait intervenir r qu'en terme du facteur de dilatation $\frac{\theta}{2\pi} \ln r$ du $\mathbb{Q}$-réseau initial au dessus de 1. Or les identifications τ ne dépendent que du $\mathbb{R}$-espace vectoriel que ce réseau engendre, et celui-ci ne dépend pas de r.

3 Le cas des espaces projectifs.

On regarde ici comment munir $\mathbb{P}^n$ d'une structure de Hodge non-commutative. On utilise pour cela son miroir supposé, qui dans le cadre de [KKP08] correspond à la fonction :

$$\begin{array}{rcl} F : (\mathbb{C}^*)^n & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longrightarrow & z_1 + \cdots + z_n + \frac{1}{z_1 \cdots z_n} \end{array}$$

La construction se résume de la manière suivante :

On commence par décrire une méthode standard donnant lieu à partir de F à une connexion ∇ sur $\mathbb{C}$ à pôle d'ordre 2 en 0. Pour le calcul de la $\mathbb{Q}$-structure, on regarde notamment la situation en famille en introduisant un paramètre complexe non nul q. On obtient ainsi une connection ∇^{quant} à pôle d'ordre 2 sur le fibré trivial sur $\mathbb{C}^2$ de fibre la cohomologie de $\mathbb{P}^n$.

L'avantage de regarder la situation en famille provient du fait que l'on dispose alors d'une description du noyau $\mathcal{S}$ de ∇^{quant} en terme d'intégrales sur des cycles dits à décroissance rapide, plus généraux que les cycles à support compact. On définit alors la $\mathbb{Q}$-structure $\mathcal{E}_{quant}$ sur $\mathcal{S}$ comme les sections de $\mathcal{S}$ combinaisons à coefficients rationnels des sections obtenues par intégration sur ces cycles.

Enfin, on décrit une procédure donnant un sens à la limite de la situation précédente lorsque $q \to 0$, faisant apparaitre une connexion limite ∇^{cl} sur le fibré trivial sur $\mathbb{C}$ de fibre $H^*(\mathbb{P}^n, \mathbb{C})$ ainsi qu'une $\mathbb{Q}$-structure $\mathcal{E}_{cl}$ sur $\mathcal{S}_{cl}$, a priori cachées si on s'interdit le recours à q . Le point est que (voir [Sab08])

Theorem 3.1. *Les données* $(H^*(\mathbb{P}^n, \mathbb{C}), \nabla^{cl}, \mathcal{E}_{cl})$ *forment une structure de Hodge non-commutative.*

On caractérise alors $\mathcal{E}_{cl}$ et ∇^{cl} en des termes ne faisant pas intervenir le miroir de $\mathbb{P}^n$, mais une nouvelle classe caractéristique $\widehat{\Gamma}$. Ceci permet notamment d'identifier une structure de Hodge non-commutative candidate pour des variétés autres que les espaces projectifs (voir 3.2 de[KKP08]). Le fait qu'il s'agisse bien de structures de Hodge non-commutatives est encore conjectural. Néanmoins une telle structure a été calculé indépendamment par [Iri09] dans le cas des variétés toriques de Fano, et concorde avec la description donnée dans [KKP08].

Références

[CFIV92] S Cecotti, P Fendley, K Intriligator, and C Vafa, *A new supersymmetric index. arxiv :hep-th/9204102v1.*

[Huy05] D. Huybrechts, *Complex geometry*, Springer, 2005.

[Iri09] Hiroshi Iritani, *An integral structure in quantum cohomology and mirror symmetry for toric orbifolds*, 2009.

[KKP08] L Katzarkov, M Kontsevich, and T Pantev, *Hodge theoretic aspects of mirror symmetry. arxiv :0806.0107v1.*

[KO05] A Kapustin and D Orlov, *Lectures on mirror symmetry, derived categories, and d-branes. arxiv :math/0308173v2.*

[Kon94] M Kontsevich, *homological algebra of mirror symmetry. arxiv :alg-geom/9411018v1.*

[Kon08] M. Kontsevich, *Solomon Lefschetz Memorial Lecture Series : Hodge structures in non-commutative geometry*, 2008.

[Sab08] C Sabbah, *Fourier-Laplace transform of a variation of polarized complex hodge structure II*, J. reine angew. Math. 621, 2008.

[Sab09] ———, *Exposé introductif au groupe de travail Vers les structures de Hodge non-commutatives, ENS 2009, http :* $//www.math.polytechnique.fr/sediga/documents/sabbah_ens091007.pdf$.