Introduction au domaine de recherche
Les équations de Navier-Stokes avec surface libre

Robert Thai
Ecole Normale Supérieure
sous la direction d'Isabelle Gallagher

27 février 2008

Table des matières

Motivation

Le début de ma thèse portera sur quelques résultats sur les équations de Navier-Stokes avec surface libre en dimension 3 : étant donnée u_0 la vitesse initiale d'un fluide et Ω un domaine initial borné dont le fond et la surface sont supposés proches de l'horizontal à l'infini (par exemple, l'océan), on veut trouver $\{\Omega(t)\}_{t\geq 0}$ une famille de domaines bornés de $\mathbb{R}^3$ et un champ de vitesse $v(\cdot,t)$ tel que $v(\cdot,t)$ satisfait les équations de Navier-Stokes sur $\Omega(t)$ avec conditions au bord dépendant de $\Omega(t)$ et de $v(\cdot,t)$.

L'objectif de mon mémoire de Master 2 était d'établir des résultats d'existence de solutions pour le système de Navier-Stokes en dimension n ($n = 2$ ou 3) sur un domaine dépendant du temps, noté $(NSNC)_\nu$. Ce dernier constitue en effet, une étape naturelle pour comprendre les équations de Navier-Stokes à surface libre puisque l'on suppose connaître en tout temps t, le domaine $\Omega(t)$. La stratégie est alors de transporter le domaine non cylindrique $Q_\infty = \bigcup_{t\geq 0}\Omega(t)\times\{t\}$ dans un domaine cylindrique $\widetilde{Q}_\infty = \widetilde{\Omega}\times[0,+\infty[$ où $\widetilde{\Omega}$ est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$. Les propriétés des solutions seront compatibles avec cette transformation au sens où avoir une solution dans $(NSNC)_\nu$ est équivalent à avoir une solution dans le système transformé $(NSC)_\nu$. On se ramène alors à un problème d'équations sur un domaine borné : on s'intéressera alors à l'existence de solutions (au sens faible et au sens fort) de $(NSNC)_\nu$ en passant par $(NSC)_\nu$.

1 Problème de Navier-Stokes sur un domaine dépendant du temps

Soit $\{\Omega(t)\}_{t\geq 0}$ une famille de domaines bornés de $\mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ou 3) à bord régulier $\partial\Omega(t)$. On considère alors le domaine non cylindrique :

$$Q_\infty = \bigcup_{t\geq 0} \Omega(t) \times \{t\}$$

Dans Q_∞, on considère le problème de Cauchy avec donnée au bord pour les équations de Navier-Stokes :

$$(NSNC)_\nu \left\{ \begin{array}{rcll} \partial_t u - \nu\Delta u + (u.\nabla)u - \nabla p & = & f & \text{sur } \Omega(t),\ t > 0 \\ \text{div } u & = & 0 & \text{sur } \Omega(t), t \geq 0 \\ u & = & \beta & \text{sur } \partial\Omega(t),\ t > 0 \\ u|_{t=0} & = & u_0 & \text{sur } \Omega(0) \end{array} \right.$$

où f désigne la force extérieure exercée sur le fluide, β sa vitesse au bord, u_0 sa vitesse intiale et ν son coefficient de viscosité cinématique.
f, β, u_0 et ν sont supposées connues.
Les champs de vitesse $u = (u^1, \dots, u^n)$ et de pression p sont les inconnues du système de $(NSNC)_\nu$.
Etudier l'existence de solutions d'un tel système d'équations aux dérivées partielles nécessite l'introduction d'espaces fonctionnels. Dans ce problème, on va considérer une famille d'espaces dépendant du temps. L'idée est alors d'établir une relation entre ce domaine Q_∞ et un autre domaine qui sera cette fois-ci, cylindrique et qui nous permettra de nous ramener à des équations sur un domaine borné de $\mathbb{R}^n$.

Hypothèse 1.1 *Q_∞ est difféomorphe à un domaine cylindrique $\widetilde{Q}_\infty = \widetilde{\Omega} \times [0, +\infty[$ où $\widetilde{\Omega}$ désigne un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ et si on note ϕ ce difféomorphisme, ϕ conserve les volumes.*

Cette hypothèse est raisonnable au sens où le fluide considéré est supposé incompressible.
Le difféomorphisme ϕ est alors le changement de variable du domaine non cylindrique vers le domaine cylindrique.

Notations 1. Si (x, t) désigne les coordonnées dans le domaine non cylindrique Q_∞, on notera (y, s) les coordonnées associées au domaine cylindrique $\widetilde{Q}_\infty$.
2. Soit $u = (u^1, \dots, u^n)$. On note $\tilde{u} = J_\phi.u \circ \phi^{-1}$ où J_ϕ désigne la matrice jacobienne de ϕ. Plus précisément, si $\tilde{u} = (\tilde{u}^1, \dots, \tilde{u}^n)$, alors

$$\tilde{u}^i = \sum_j \frac{\partial y^i}{\partial x^j} u^j \circ \phi^{-1}$$

Hypothèse 1.2 *La donnée au bord β est nulle.*

On considère maintenant le problème avec donnée initiale $\tilde{u}_0$ et donnée au bord $\tilde{\beta}$ d'inconnues $\{\tilde{u}, \tilde{p}\}$ sur $\widetilde{Q}_\infty$:

$$(NSC)_\nu \left\{ \begin{array}{rcll} \partial_s \tilde{u} - \nu L\tilde{u} + M\tilde{u} + N\tilde{u} - \nabla_g \tilde{p} & = & \tilde{f} & \text{sur } \widetilde{Q}_\infty \\ \text{div } \tilde{u} & = & 0 & \text{sur } \widetilde{Q}_\infty \\ \tilde{u} & = & \tilde{\beta} & \text{sur } \partial\widetilde{\Omega} \\ \tilde{u}|_{t=0} & = & \tilde{u}_0 & \text{sur } \widetilde{\Omega} \end{array} \right.$$

où

$$
\begin{aligned}
[L\tilde{u}]^i &= \sum_{j,k} g^{jk}\nabla_j \nabla_k \tilde{u}^i \\
[M\tilde{u}]^i &= \sum_{j} \frac{\partial y^j}{\partial t}\nabla_j \tilde{u}^i + \sum_{j,k} \frac{\partial y^i}{\partial x^k}\frac{\partial^2 x^k}{\partial s \partial y^j}\tilde{u}^j \\
[N\tilde{u}]^i &= \sum_{j} \tilde{u}^j \nabla_j \tilde{u}^i \\
[\nabla_g \tilde{p}]^i &= \sum_{j} g^{ij}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y^j}
\end{aligned}
$$

Interprétation de chaque terme dans $(NSC)_\nu$

• L'opérateur L est un opérateur différentiel linéaire du second ordre dans $\widetilde{Q}_\infty$ qui correspond au laplacien Δ.

• M est un opérateur linéaire qui provient de la dérivation par rapport au temps ; autrement dit, $\partial_s + M$ correspond à ∂_t.

• N est associé au terme non linéaire du système de départ $(NSNC)_\nu$.

• ∇_g correspond au gradient ∇ avec le changement de variable ϕ.

Sous les hypothèses précédentes, on obtient alors un premier théorème qui nous assure un lien entre les solutions du système $(NSC)_\nu$ et les solutions du système $(NSNC)_\nu$.

Théorème 1.1 *Soit (u,p) une solution de $(NSNC)_\nu$ dans Q_∞ pour la donnée (u_0, f). On pose $\tilde{u} = J_\phi . u \circ \phi^{-1}$ et $\tilde{p} = p \circ \phi^{-1}$. Alors $(\tilde{u}, \tilde{p})$ est une solution de $(NSC)_\nu$ dans $\widetilde{Q}_\infty$ pour les données $(\tilde{u}_0, \tilde{f})$ où*

$$\tilde{u}_0 = J_\phi|_{t=0} . u_0 \circ \phi^{-1}|_{t=0} \text{ et } \tilde{f} = J_\phi . f \circ \phi^{-1}$$

Réciproquement, si $(\tilde{u}, \tilde{p})$ est une solution de $(NSC)_\nu$ pour la donnée $(\tilde{u}_0, \tilde{f})$, alors (u,p) est une solution de $(NSNC)_\nu$ pour la donnée (u_0, f).

Ce théorème nous assure que s'il existe une solution pour l'un des deux systèmes, celle-ci nous fournit une solution pour l'autre.

2 Espaces fonctionnels

Nous allons tout d'abord rappeler les définitions de certains espaces fonctionnels.

Rappels Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On note $H_0^1(\Omega)$, l'adhérence de l'espace $C_0^\infty(\Omega)$ des fonctions de classe C^∞ à support compact dans Ω, pour la topologie de l'espace $H^1(\Omega)$. Alors $(H_0^1(\Omega), (\cdot,\cdot)_{H^1(\Omega)})$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$\forall u, v \in H_0^1(\Omega),\ (u,v)_{H^1(\Omega)} = (u,v) + (\nabla u, \nabla v)$$

où $(\cdot,\cdot)$ désigne le produit scalaire usuel sur $L^2(\Omega)$.
On note $C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)$, l'espace des fonctions de classe C^∞ à support compact dans Ω et à divergence nulle sur Ω.

Nous allons donc introduire les espaces fonctionnels nécessaires pour étudier les problèmes $(NSNC)_\nu$ et $(NSC)_\nu$.

Espaces fonctionnels associés à $(NSNC)_\nu$ et $(NSC)_\nu$
On note $\widetilde{H}$ (resp. H_t), l'adhérence des champs de vecteurs à composantes $C^\infty_{0,\sigma}(\widetilde{\Omega})$ (resp. $C^\infty_{0,\sigma}(\Omega(t))$) dans $L^2(\widetilde{\Omega},\mathbb{R}^n)$ (resp. dans $L^2(\Omega(t),\mathbb{R}^n)$).
On munit l'espace H_t d'un produit scalaire qui est le produit scalaire L^2 usuel :

$$\forall u,v \in H_t,\ (u,v)_t = \sum_j \int_{\Omega(t)} u^j(x)v^j(x)dx$$

$(H_t,(\cdot,\cdot))$ est un espace de Hilbert.
Ensuite, on munit l'espace $\widetilde{H}$ d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle_t$ de telle sorte qu'on puisse avoir

$$\langle \tilde{u},\tilde{v}\rangle_t = (u,v)_t$$

avec les notations précédentes.
On note $\widetilde{V}$ (resp. V_t), l'adhérence des champs de vecteurs à composantes $C^\infty_{0,\sigma}(\widetilde{\Omega})$ (resp. $C^\infty_{0,\sigma}(\Omega(t))$) dans $(H^1_0(\widetilde{\Omega}),\mathbb{R}^n)$ (resp. dans $H^1_0(\Omega(t),\mathbb{R}^n)$.
Alors V_t est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$\forall\, u,v \in V_t,\ (\nabla u,\nabla v)_t = \sum_{i,j} \int_{\Omega(t)} \frac{\partial u^i}{\partial x^i}(x)\frac{\partial v^j}{\partial x^j}(x)dx$$

De la même manière, on munit l'espace $\widetilde{V}$ d'un produit scalaire de telle sorte qu'on ait l'égalité suivante :

$$\langle \nabla_g\tilde{u},\nabla_g\tilde{v}\rangle_t = (\nabla u,\nabla v)_t$$

toujours avec les notations précédentes.
Pour tout $t \geq 0$, on note V_t^* le dual topologique de V_t. On munit V_t^* de sa norme duale usuelle $\|.\|_t^*$:

$$\forall f \in V_t^*,\ \|f\|_t^* = \sup_{\|\nabla v\|_t \leq 1} (f,v)_t$$

De la même manière, on note $\widetilde{V}^*$, le dual topologique de $\widetilde{V}$ que l'on munit de la norme $|.|_t^*$ donnée par :

$$\forall \tilde{f} \in \widetilde{V}^*,\ |\tilde{f}|_t^* = \sup_{|\nabla_g\tilde{v}|_t \leq 1} \langle \tilde{f},\tilde{v}\rangle_t$$

3 Solutions faibles

Le Théorème 1.1 nous permet alors de définir la notion de solutions faibles de $(NSNC)_\nu$ comme étant l'image d'une "solution faible" du système transformé $(NSC)_\nu$.

Définition 3.1 *Soit $u_0 \in H_0$ et $F \in L^2([0,T],V_t^*)$ pour $T > 0$ fixé. On dit que $u \in L^2([0,T],V_t) \cap L^\infty([0,T],H_t)$ est une solution faible du problème $(NSNC)_\nu$ si pour tout $\tilde{v}(t) = h(t)\tilde{w}$ où $\tilde{w} \in \tilde{V}$ et $h \in C^1([0,T],\mathbb{R})$ tel que $h(T) = 0$, on a :*

$$-\int_0^T \langle \tilde{u}(t),\tilde{v}'(t)\rangle_t dt + \int_0^T \langle \tilde{u}(t),M\tilde{v}(t)\rangle_t dt + \int_0^T \langle \nabla_g\,\tilde{u}(t),\nabla_g\,\tilde{v}(t)\rangle_t dt$$

$$+\int_0^T \langle N\tilde{u}(t),\tilde{v}(t)\rangle_t dt = \langle \tilde{u_0},\tilde{v}(0)\rangle_0 + \int_0^T \langle \tilde{F}(t),\tilde{v}(t)\rangle_t dt$$

Notation Pour tous u, v, $w \in V_t$, on définit

$$b(u,v,w) = ((u.\nabla)v, w)_t$$

On remarque alors que si div$u = 0$, alors pour tout $v \in V_t$, $b(u,v,v) = 0$ et donc le terme en p peut être éliminé dans les équations prédécentes et on peut donc se ramener à l'étude d'équations aux dérivées partielles avec une inconnue, le champ de vitesse u. On obtient alors un théorème d'existence de solutions faibles (Miyakawa et Teramoto, [6]).

Théorème 3.1 *Soit $u_0 \in H_0$ et $F \in L^2([0,T]; V_t^*)$ pour $T > 0$ fixé. Alors il existe une solution faible u de $(NSNC)_\nu$ sur $[0,T]$ au sens de la Définition 1.1 qui satisfait l'inégalité d'énergie. Autrement dit, pour tout $t \in [0,T]$,*

$$\|u(t)\|_t^2 + 2\nu \int_0^t \|\nabla u(\tau)\|_\tau^2 d\tau \leq \|u_0\|_0^2 + 2\int_0^t (F(\tau), u(\tau))_\tau d\tau$$

Stratégie pour démontrer le Théorème 3.1.
On va construire une suite de solutions approchées du système $(NSNC)_\nu$ et utiliser des arguments de compacité sur celle-ci.
On considère une suite $(\tilde{\phi}_j)_{j\geq 1}$ de vecteurs linéairement indépendants dans $C^\infty_{0,\sigma}(\widetilde{\Omega})$, totale dans $\tilde{V}$. Par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt, on peut obtenir une suite $(\tilde{w}_j(t))_{j\geq 1}$ qui forme un système orthonormé.
On définit des solutions approchées de $(NSNC)_\nu$ de la façon suivante : pour tout $m \geq 1$,

$$\begin{aligned} \tilde{u}_m(t) &= \sum_{j=1}^m h_{jm}(t)\tilde{w}_j(t) \\ \tilde{u}_m(0) &= \sum_{j=1}^m h_{jm}^0 \tilde{w}_j(0) \end{aligned}$$

où $h_{jm}^0 = \langle \tilde{a}, \tilde{w}_j(0)\rangle_0$ et $(h_{jm}(t))_{1\leq j\leq m}$ vérifie le système d'équations $(E_m) = (E_{jm})_{1\leq j\leq m}$ suivant : pour tout $j \in \{1, ..., m\}$,

$$(E_{jm}) \left\{ \begin{aligned} \langle \tilde{u}'_m(t), \tilde{w}_j(t)\rangle_t &= \nu\langle L\tilde{u}_m(t), \tilde{w}_j(t)\rangle_t - \langle M\tilde{u}_m(t), \tilde{w}_j(t)\rangle_t \\ &\quad \langle N\tilde{u}_m(t), \tilde{w}_j(t)\rangle_t + \langle \tilde{F}(t), \tilde{w}_j(t)\rangle_t \end{aligned} \right.$$

L'existence de chaque $\tilde{u}_m$ est garantie par le théorème de Cauchy-Lipschitz puisque chaque équation (E_m) est une équation différentielle ordinaire satisfaisant les hypothèses de ce dernier. De plus, $\tilde{u}_m$ est unique sur un intervalle $[0, T_m]$ où $T_m \leq T$.
En fait, le lemme suivant nous garantit que $T_m = T$.

Lemme 3.1 *$(u_m)_{m\geq 1}$ est bornée dans $L^\infty([0,T], H_t) \cap L^2([0,T], V_t)$.*

Un autre lemme (Lemme 3.2) nous apporte une information supplémentaire sur la possibilité d'extraire une sous-suite convergente de $(u_m)_{m\geq 1}$.

Lemme 3.2 *$(u_m)_{m\geq 1}$ est précompacte dans $L^2([0,T], H_t)$.*

Ces deux lemmes nous permettent alors d'affirmer qu'à extraction près, (u_m) converge vers $u \in L^\infty([0,T], H_t) \cap L^2([0,T], V_t)$ aux sens suivants :
- faiblement dans $L^2([0,T], V_t)$;
- *-faiblement dans $L^\infty([0,T], H_t)$;

• fortement dans $L^2([0,T],H_t)$.
A partir des équations (E_{jm}) et des relations entre produit scalaire de deux champs dans Q_∞ et le produit scalaire des deux champs associés dans $\widetilde{Q}_\infty$, on obtient pour tout $\tilde{v}(t)=h(t)\tilde{w}$ où $\tilde{w}\in\tilde{V}$ et $h\in C^1([0,T],\mathbb{R})$ tel que $h(T)=0$,

$$-\int_0^T(u_m(t),v'(t))_t dt+\int_0^T(\nabla u_m(t),\nabla v(t))_t dt+\int_0^T b(u_m(t),u_m(t),v(t))dt$$

$$=(u_m(0),v(0))_0+\int_0^T(F(t),v(t))_t dt$$

Les convergences précédemment énoncées nous permettent alors de passer à la limite dans le terme non linéaire et grâce aux relations entre produits scalaires, on peut conclure la fin de la preuve du Théorème 3.1.

4 Solutions régulières

Pour alléger les notations dans cette sous-section, tous les champs de vecteurs définis sur $\widetilde{Q}_\infty$ seront notés sans $\widetilde{}$, et les variables d'espace seront notées x au lieu de y et la variable de temps, t au lieu de s.
Le Théorème 1.1 nous affirme qu'il suffit donc de résoudre le problème $(NSC)_\nu$:

$$(NSC)_\nu\left\{\begin{array}{rcll}\partial_t u-\nu Lu+Mu+Nu-\nabla_g p&=&f&\text{sur }\widetilde{Q}_\infty\\ \text{div }u&=&0&\text{sur }\widetilde{Q}_\infty\\ u&=&0&\text{sur }\partial\widetilde{\Omega}\\ u|_{t=0}&=&u_0&\text{sur }\widetilde{\Omega}\end{array}\right.$$

On considère la matrice positive $h(t)=(h_{ij})$ définie par

$$h_{ij}=\sum_k\frac{\partial x^k}{\partial y^i}\frac{\partial x^k}{\partial y^j}$$

Soit $\mathbb{P}$ la projection orthogonale de $L^2(\widetilde{\Omega},\mathbb{R}^n)$ sur le sous-espace fermé $\widetilde{H}$.
On peut alors prouver que l'opérateur $\mathbb{P}h(t)$ est un opérateur linéaire borné bijectif et symétrique de $\widetilde{H}$ dans lui-même.
Il est alors intéressant de remarquer que l'opérateur $-\mathbb{P}h(t)^{-1}\mathbb{P}h(t)L$ est, comme le laplacien, positif sur les champs de vecteurs $\tilde{u}\in H^2(\widetilde{\Omega},\mathbb{R}^n)$ tel que div $\tilde{u}=0$ et $\tilde{u}|_{\partial\widetilde{\Omega}}=0$.
Notation On note $A(t)$, l'opérateur autoadjoint positif sur $(\widetilde{H},|.|_t)$ défini par

$$A(t)=-\mathbb{P}h(t)^{-1}\mathbb{P}h(t)L$$

Plus précisément, $A(t)$ est l'extension de Friedrichs de l'opérateur symétrique

$$-(\mathbb{P}h(t))^{-1}\mathbb{P}h(t)L$$

sur $(\widetilde{H},|.|_t)$ de domaine égal à l'ensemble des $u\in C^2(\widetilde{\Omega})\cap C^1(\overline{\widetilde{\Omega}})$ satisfaisant div $u=0$ et $u|_{\partial\widetilde{\Omega}}=0$.
On se ramène alors au problème d'évolution suivant

$$(E_\nu)\left\{\begin{array}{rcll}u'(t)&=&-\nu A(t)u+B(t)u+F(t,u)+(\mathbb{P}h(.,t))^{-1}\mathbb{P}h(t)f(t)&\text{pour }t>0\\ u(0)&=&u_0&\end{array}\right.$$

où u' désigne la dérivée de u par rapport à t, $B(t)u = -(\mathbb{P}h(t))^{-1}\mathbb{P}h(t)Mu$ et $F(t,u) = -(\mathbb{P}h(t))^{-1}\mathbb{P}h(t)Nu$.

Existence d'un opérateur d'évolution

Introduisons tout d'abord, la notion de semi-groupes d'opérateurs.

Définition 4.1 *Soit X un espace de Banach. Une famille d'opérateurs bornés de X, $(U(t))_{t\geq 0}$ est appelée semi-groupe d'opérateurs fortement continue si*

1. *$U(0) = Id$*
2. *Pour tout $s,\ t \geq 0$, $U(t+s) = U(t)U(s)$;*
3. *Pour tout $x \in X$, l'application $t \mapsto U(t)x$ est continue sur $[0, +\infty[$.*

Pour obtenir une solution régulière du système $(NSC)_\nu$, on va utiliser un résultat qui découle du théorème de Hille-Yosida-Philipps et qui va nous permettre de nous ramener à un problème de point fixe. Il s'agit du lemme suivant.

Lemme 4.1 *Soit A un opérateur linéaire fermé dans un espace de Banach X, de domaine $D(A)$ dense dans X. On suppose qu'il existe $\omega \in \mathbb{R}$, tels que si $\lambda > \omega$, alors $\lambda \in \rho(A)$, l'ensemble résolvant de A et*

$$\|R(\lambda, A)\| \leq (\lambda - \omega)^{-1}$$

Alors A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu $(U(t))_{t\geq 0}$ qui vérifie

$$\forall t \geq 0,\ \|U(t)\| \leq e^{t\omega}$$

On pose alors $L(t) = -\nu A(t) + B(t)$.

Proposition 4.1 *Soit $\rho(L(t))$ l'ensemble résolvant de l'opérateur $L(t)$. Il existe des constantes γ_0 et $C > 0$ telles que*

$$\left\{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, Re(\lambda) \geq \frac{\gamma_0^2}{2\nu}\right\} \subset \rho(L(t))$$

et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $Re(\lambda) \geq \frac{\gamma_0^2}{2\nu}$, on a

$$|\lambda| \|(\lambda - L(t))^{-1}\| \leq C$$

La Proposition 4.1 nous permet alors d'appliquer le lemme 4.1 pour affirmer qu'il existe un semi-groupe d'opérateurs $(U_\nu(t,s))_{s\geq 0}$ dont le générateur infinitésimal est $L(t)$.

Le problème d'évolution $(E)_\nu$ est alors équivalent à l'équation intégrale non linéaire suivante $(IE)_\nu$:

$$\begin{aligned}(IE)_\nu : \forall t > 0,\ u(t) &= U_\nu(t,0)u_0 + \int_0^t U_\nu(t,s)F(s,u(s))\,ds \\ &\quad + \int_0^t U_\nu(t,s)(\mathbb{P}h(s))^{-1}\mathbb{P}h(s)f(s)\,ds\end{aligned}$$

Notation Soit $\alpha \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$. On note $H^{2\alpha}$ le domaine de l'opérateur $A(t)^\alpha$.

On peut prouver que $H^{2\alpha}$ est égal à $D(A_0^\alpha) \cap \widetilde{H}$ où A_0 est la réalisation de l'opérateur $-\Delta$ avec condition de Dirichlet au bord, c'est-à-dire de domaine

$$D(A_0) = H^2(\widetilde{\Omega}, \mathbb{R}^n) \cap H_0^1(\widetilde{\Omega}, \mathbb{R}^n)$$

On peut munir $H^{2\alpha}$ de la norme suivante

$$\forall u \in H^{2\alpha}, \ \|u\|_{2\alpha} = \|A(t)^{\alpha} u\|$$

Comme pour le problème concernant l'existence de solutions faibles, on construira une suite de solutions approchées du système et la difficulté résidera dans le passage à la limite dans le terme non linéaire. On dispose du lemme suivant.

Lemme 4.2 *Soit $u, v \in H^1 \cap H^{\frac{3}{2}}$. Alors pour tout $t \geq 0$, $F(t,u) \in \widetilde{H}$ et*

$$\|F(t,u)\| \leq C\|u\|_1 \|u\|_{\frac{3}{2}}$$

$$\|F(t,u) - F(s,u)\| \leq C|t-s| \|u\|_{L^4}^2$$
$$\|F(t,u) - F(t,v)\| \leq C(\|u\|_1 \|u-v\|_{\frac{3}{2}} + \|u-v\|_1 \|v\|_{\frac{3}{2}})$$

On peut alors exposer un théorème d'existence locale pour le système de Navier-Stokes sur $\widetilde{Q}_\infty$, $(NSC)_\nu$ ([5], Inoue et Wakimoto).

Théorème 4.1 *Soit $u_0 \in H^{\frac{1}{2}}$ et f une force extérieure telle que*

$$\|f(t)\| = o(t^{-\frac{3}{4}})$$

quand $t \to 0$. Alors il existe un temps $T > 0$ tel qu'il existe une solution u de $(IE)_\nu$ telle que

1. *$u \in C(]0,T[, \widetilde{H})$;*
2. *Pour tout $\frac{1}{4} < \alpha < 1$, $u \in C(]0,T[, H^{2\alpha})$ et $\|u(t)\|_{2\alpha} = o(t^{\frac{1}{4}-\alpha})$ quand $t \to 0$.*

Stratégie pour démontrer le Théorème 4.1
Nous allons construire une suite $(u_k)_{k\geq 0}$ de solutions approchées de l'équation intégrale $(IE)_\nu$. On procède de la manière suivante : on pose

$$u_0(t) = U_\nu(t,0)u_0 + \int_0^t U_\nu(t,s)(\mathbb{P}h(s))^{-1}\mathbb{P}h(s)f(s)\,ds$$

et pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$u_{k+1}(t) = u_0(t) + \int_0^t U_\nu(t,s)F(s,u_k(s))\,ds$$

L'étape suivante de la preuve de ce résultat d'existence locale consiste à étudier le caractère borné de cette suite dans les espaces $H^{2\alpha}$.

Lemme 4.3 *Pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $\frac{1}{4} < \alpha < 1$, il existe une constante $K_{\alpha,k} > 0$ telle que*

$$\|u_k(t)\|_{2\alpha} \leq K_{\alpha,k} t^{\frac{1}{4}-\alpha}$$

Ensuite, on veut appliquer un argument de type principe de l'application contractante pour avoir la convergence de la suite des solutions approchées et trouver le temps d'existence $T > 0$.
On va estimer la norme $H^{2\alpha}$ de la différence de deux termes consécutifs de la suite de solutions approchées $\|u_{k+1}(t) - u_k(t)\|_{2\alpha}$.
Pour tout $0 < t \leq T$ et $\frac{1}{4} < \alpha < 1$, on obtient une estimation du type

$$\|u_{k+1}(t) - u_k(t)\|_{2\alpha} \leq (C_{T,u_0})^{k-1} t^{\frac{1}{4}-\alpha}$$

On prend alors $T > 0$ de telle sorte que $C_{T,u_0} < 1$ et donc la série de terme général $(u_{k+1} - u_k)$ converge absolument et uniformément sur $[0, T]$.
Ainsi,

$$u(t) := \lim_{k \to +\infty} u_k(t) = \sum_k W_k(t)$$

existe uniformément pour $0 \leq t \leq T$.
De la même manière, il s'ensuit que $\lim_k u_k(t)$ existe dans $H^{2\alpha}$ pour tout $\frac{1}{4} < \alpha < 1$, uniformément pour $\varepsilon \leq t \leq T$ pour tout $\varepsilon > 0$.
On peut démontrer aussi $(K_{\alpha,k})_{k \geq 0}$ est bornée par une certaine constante K_α et pour tous $\frac{1}{4} < \alpha < 1$ et $0 < t \leq T$,

$$\|u(t)\|_{2\alpha} \leq K_\alpha t^{\frac{1}{4} - \alpha}$$

On a donc prouvé *1.* et *2.* Il reste à montrer que u est bien une solution de l'équation intégrale $(IE)_\nu$ pour un certain $T > 0$.
En effet, on a vu que

$$\|F(t, u_k(t))\| \leq C t^{-\frac{3}{4}}$$

Grâce au Lemme 1.4 et au théorème de convergence dominée, la convergence $u_k(t) \to u(t)$ dans $H^{2\alpha}$ pour $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\alpha = \frac{3}{4}$ implique la convergence

$$F(t, u_k(t)) \to F(t, u(t))$$

En passant à la limite quand $k \to +\infty$, on en conclut que u est une solution de $(IE)_\nu$ sur $[0, T]$.

On peut aussi obtenir un théorème d'existence globale pour des petites données : en effet, on peut majorer la constante C_{T,u_0} uniformément en T pour $\|u_0\|_{\frac{1}{2}}$ assez petite.

Théorème 4.2 *Soit $u_0 \in H^{\frac{1}{2}}$ une donnée initiale de norme "assez petite" et f une force extérieure telle que lorsque $t \to 0$,*

$$\|f(t)\| = o(t^{-\frac{3}{4}})$$

Alors il existe une solution globale $u \in C([0, +\infty[, \widetilde{H})$ de l'équation intégrale $(IE)_\nu$.

Références

[1] J. Thomas Beale, *The Initial Value Problem for the Navier-Stokes Equations with a Free Surface*, Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. XXXIV (1981), 359-392.

[2] J. Bergh et J. Löfström, *Interpolation spaces, An Introduction*, Grundlehren des mathematischen Wissenschaften 223, Springer-Verlag.

[3] J.-Y. Chemin, B. Desjardins, I. Gallagher et E. Grenier, *Mathematical Geophysics : An introduction to rotating fluids and to the Navier-Stokes equations*, Oxford University Press (2006).

[4] N. Dunford et J. Schwartz, *Linear Operators, Part I*, Pure and applied mathematics, Vol. VII, (1957).

[5] A. Inoue et M. Wakimoto, *On existence of solutions of the Navier-Stokes equation in a time dependent domain*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec., IA **24** (1977), 303-319.

[6] T. Miyakawa et Y. Teramoto, *Existence and periodicity of weak solutions of the Navier-Stokes equations in a time dependent domain*, Hiroshima Math. J., **12** (1982), 513-528.

[7] J.M. Rodriguez et R. Taboada-Vasquez, *From Navier-Stokes equations to shallow waters with viscosity by asymptotic analysis*, Asymptotic Analysis **43** (2005) 267-285.

[8] R. Temam, *Navier-Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis*, North Holland, Amsterdam (1984).