

MEMOIRE DE MAGISTERE

INTRODUCTION A LA PERCOLATION DE PREMIER PASSAGE

Marie THERET

sous la direction de Raphaël Cerf

Mon domaine général de recherche est la mécanique statistique. Il s'agit de l'étude probabiliste des modèles issus de la physique statistique. Pour comprendre l'enjeu de telles études, il faut d'abord se souvenir de ce qu'est la physique statistique : son principe est d'essayer d'expliquer les phénomènes macroscopiques, i.e. à l'échelle de l'homme, en regardant ce qui se passe à l'échelle microscopique. Bien sûr, le nombre d'atomes en jeu étant considérable, il faut recourir aux probabilités pour moyenniser ce qui se passe sur l'ensemble des particules, c'est le but de la mécanique statistique. Pour se fixer les idées, voyons trois exemples de modèles étudiés en mécanique statistique.

Le premier est le modèle de percolation, un des plus simples, et qui pose encore pourtant de nombreuses questions ouvertes. Il peut modéliser par exemple une roche poreuse. On considère un ensemble de sites (classiquement le réseau \mathbb{Z}^d) associé à un ensemble d'arêtes reliant entre eux certains de ces sites (les plus proches voisins dans \mathbb{Z}^d), et on enlève aléatoirement soit certaines arêtes (percolation par arêtes) soit certains sites (percolation par sites) du graphe. On s'intéresse alors aux propriétés du graphe obtenu : existence de chemins ouverts (c'est à dire passant uniquement par des arêtes ou des sites ouverts) entre certaines parties du graphe, géométrie des composantes connexes du graphe, en particulier finitude de la composante connexe contenant l'origine du graphe, existence et unicité d'une éventuelle composante connexe infinie, etc...

Le deuxième est le modèle d'Ising. Il a été créé pour modéliser les métaux ferromagnétiques, c'est-à-dire des métaux qui ont une aimantation à basse température, et qui perdent subitement cette aimantation au dessus d'une certaine température critique. On considère la projection suivant un axe donné du moment magnétique de chaque atome du métal, appelé spin de l'atome. Grâce à la mécanique quantique, on sait que la projection du spin a une valeur fixée, seule son orientation (haut ou bas) peut varier. Ainsi on modélise le métal par un ensemble de sites, ses atomes, auxquels on donne la valeur $+1$ (pour haut) ou -1 (pour bas) selon la direction de la projection de leur spin. On associe ensuite à chaque configuration de $+1$ et de -1 sur le graphe une certaine probabilité, qui tient compte des deux forces opposées qui agissent sur les spins, d'une part l'agitation thermique - dépendant de la température - qui a tendance à les désordonner, d'autre part l'interaction entre dipôles magnétiques - dépendant de l'éloignement entre les sites - qui a tendance à tous les ordonner dans le même sens. Par souci de simplicité, on considère que les sites sont ceux de \mathbb{Z}^d et que l'interaction entre dipôles est à portée très limitée, i.e. se limite aux seuls plus proches voisins : c'est le modèle d'Ising. Un des enjeux dans l'étude de ce modèle est de prouver l'existence

d'une température critique, et surtout de la calculer, ce qui n'a été fait que dans certains cas très particuliers. Le but de mon mémoire de maîtrise, réalisé sous la direction de Vincent Beffara, était de comprendre le calcul de la température critique mené par Onsager ([6]) en dimension deux en l'absence de champ magnétique extérieur.

Le troisième modèle est le modèle de percolation de premier passage, celui auquel je m'intéresse actuellement dans mes recherches. C'est un raffinement du modèle de percolation. Cette fois, au lieu de considérer comme en percolation par arêtes qu'une arête est soit présente, soit absente, on va lui associer un temps de passage positif qui va quantifier à quel point l'arête est ouverte. Définissons proprement le modèle : on se place dans le graphe $(\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$ de sites \mathbb{Z}^d et d'arêtes \mathbb{E}^d reliant les plus proches voisins de \mathbb{Z}^d en norme L^1 . À chaque arête e de \mathbb{E}^d , on associe une variable aléatoire positive $t(e)$ telle que la famille des variables $(t(e), e \in \mathbb{E}^d)$ est indépendante et identiquement distribuée. On note F la fonction de répartition de $t(e)$. La variable $t(e)$ est appelée temps de passage ou capacité de l'arête. En effet, on peut lui donner deux interprétations, non sans lien l'une avec l'autre.

La première interprétation possible est de définir $t(e)$ comme le temps nécessaire pour traverser l'arête e . Une manière imagée de voir ce modèle est de considérer que les sites du graphe sont des villes et les arêtes des routes dont l'encombrement par les voitures est aléatoires : $t(e)$ est alors effectivement le temps nécessaire en voiture pour traverser la route e . Il est naturel d'introduire la notion de chemin sur le graphe comme étant une séquence alternée $r = (x_1, e_1, x_2, \dots, e_{n-1}, x_n)$ de sites x_1, \dots, x_n et d'arêtes e_1, \dots, e_{n-1} les reliant deux à deux, et de définir le temps de traversée d'un chemin r par

$$T(r) = \sum_{e \in r} t(e).$$

La distance (aléatoire) entre deux sites fixés x et y est alors

$$T(x, y) = \inf_{r: x \rightarrow y} T(r),$$

où la borne inférieure porte ici sur l'ensemble des chemins $r = (x_1, e_1, x_2, \dots, e_{n-1}, x_n)$ avec $x_1 = x$ et $x_n = y$. Le résultat fondamental concernant cette interprétation de $t(e)$ est dû à Harry Kesten ([4]). Il affirme que, sous une condition de moments sur la fonction F , l'ensemble formé des sites atteints en un temps t à partir de l'origine du graphe grandit linéairement en t et une fois renormalisé il admet une enveloppe asymptotique non aléatoire. Plus formellement, on note 0 l'origine du graphe, et on définit

$$\tilde{B}(t) = \{x \in \mathbb{Z}^d \mid T(0, x) \leq t\}.$$

Cet ensemble est un ensemble discret de points, on préfère travailler avec une version modifiée

$$B(t) = \{x + U \mid x \in \tilde{B}(t)\},$$

où U est le cube unité, $U = \{x \in \mathbb{Z}^d \mid -1/2 \leq x_i \leq 1/2, i = 1 \dots d\}$. Kesten a montré en 1984 le théorème suivant :

Théorème .1. *On suppose que pour t_1, \dots, t_{2d} des variables indépendantes de même loi, de fonction de répartition F , on a :*

$$\mathbb{E} \left[\min(t_1^d, \dots, t_{2d}^d) \right] < \infty.$$

Alors il existe un ensemble convexe non aléatoire $B_0 \subset \mathbb{R}^d$ qui est invariant par permutation des coordonnées et réflexion suivant les hyperplans des coordonnées, qui est d'intérieur non vide, qui est soit compact soit égal à \mathbb{R}^d et qui vérifie :

- si B_0 est compact, pour tout $\varepsilon > 0$, p.s. il existe t_0 tel que pour tout $t \geq t_0$ on a

$$(1 - \varepsilon)B_0 \subset \frac{1}{t}B(t) \subset (1 + \varepsilon)B_0,$$

- si $B_0 = \mathbb{R}^d$, pour tout $\varepsilon > 0$, p.s. il existe t_0 tel que pour tout $t \geq t_0$ on a

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^d \mid |x| \leq \frac{1}{\varepsilon} \right\} \subset \frac{1}{t}B(t).$$

Le symbole $|\cdot|$ désigne ici la norme L^1 . Ce théorème est en quelque sorte une loi des grands nombres, il donne le comportement asymptotique de $T(0, x)$ pour un site x fixé avec $|x|$ grand. Il est naturel dès lors de chercher quelles sont les variations de cette variable aléatoire par rapport à ce comportement moyen. C'est ce qu'ont fait Benjamini, Kalai et Schramm, et ils ont publié en 2003 le résultat suivant (voir [2]) :

Théorème .2. *On suppose que t suit une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$ à valeurs dans $\{a, b\}$. Il existe une constante C , dépendant de d , a et b uniquement, telle que pour tout site $x \in \mathbb{Z}^d$ tel que $|x| > 2$, on a*

$$\text{Var}(T(0, x)) \leq C \frac{|x|}{\ln |x|}.$$

L'idée de ce théorème est que, pour un cas particulier de fonction de répartition F du moins, la variance de la distance entre deux sites est sous-linéaire. Pourquoi un tel résultat est-il intéressant ? Il met en évidence la complexité du problème de distance entre deux points. Si entre 0 et un site x donné il existait un chemin de temps de traversée nettement inférieur à celui de n'importe quel autre chemin, on sait par la démonstration de la loi des grands nombres précédemment établie par Kesten que ce chemin ne s'éloignerait guère de la ligne droite (par un argument de sous-additivité), donc la variance serait linéaire, car elle se comporterait comme la somme des variances des $|x|$ arêtes qui composeraient ce chemin. Ce n'est pas le cas, ce qui signifie que la compétition entre les différents chemins de moindre temps de traversée existe bel et bien. On conjecture que comme dans de nombreux autres problèmes la variance de $T(0, x)$ est en fait de l'ordre de $|x|^{2/3}$, mais ceci n'a pu être démontré jusqu'à présent. Je ne vais pas m'étendre plus avant sur les autres résultats connus, et ils sont nombreux, concernant cette interprétation de $t(e)$, car mes recherches actuelles se portent sur la deuxième. Je me suis néanmoins intéressée à ce point de vue pendant mon M2, et le but de mon mémoire de M2, réalisé sous la direction de Wendelin Werner, était de comprendre la démonstration des deux théorèmes que je viens d'énoncer.

Passons maintenant à la deuxième interprétation de $t(e)$. On considère désormais que $t(e)$ est la capacité de l'arête e . On peut voir le graphe comme un réseau de fils électriques, et $t(e)$ comme la conductance du fil e , ou comme un réseau de tuyaux, et $t(e)$ est alors la quantité maximale de fluide qui peut traverser le tuyaux e par unité de temps. Il en découle une notion de flux à travers un cylindre du graphe. Soit B un cylindre dans le graphe $(\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$

$$B(\vec{k}, m) = \prod_{i=1}^{d-1} [0, k_i] \times [0, m],$$

où $\vec{k} = (k_1, \dots, k_{d-1}) \in \mathbb{Z}^{d-1}$, de base

$$F_0 = \prod_{i=1}^{d-1} [0, k_i] \times \{0\}$$

et de sommet

$$F_m = \prod_{i=1}^{d-1} [0, k_i] \times \{m\}.$$

On empêche le fluide de sortir du cylindre B par ses faces verticales, et on regarde la quantité maximale de fluide qui peut traverser B de sa base à son sommet par unité de temps. Pour ce faire, on associe à chaque arête e une orientation $o(e)$ et une valeur $g(e)$ telles que

– pour toute arête e , on a

$$0 \leq g(e) \leq t(e).$$

– pour tout site v dans $B \setminus (F_0 \cup F_m)$ on a

$$\sum_{\rightarrow v} g(e) = \sum_{v \rightarrow} g(e),$$

où la première somme (respectivement la deuxième) porte sur les arêtes e dans B adjacentes à v , dirigées vers v (respectivement en sens contraire).

Ces critères traduisent d'une part le fait que la quantité de fluide circulant dans une arête doit être inférieure à sa capacité, d'autre part qu'il n'y a pas de perte de fluide dans le cylindre. Le flux associé à ce choix d'orientation o et de fonction g est

$$flux(o, g) = \sum_{+} g(e) - \sum_{-} g(e),$$

où les sommes portent sur les arêtes verticales e de B ayant une extrémité dans F_m et orientées vers l'extérieur de B (respectivement vers l'intérieur). Le flux maximal dans le cylindre est alors défini par

$$\phi_B = \sup_{o, g} flux(o, g).$$

Je vais présenter les deux outils de base qui permettent d'étudier le flux maximal. Le premier nous donne une autre définition du flux maximal, plus facilement manipulable. Il s'agit du théorème du max-flow min-cut. Pour l'énoncer, j'ai besoin d'introduire encore quelques définitions. Soit $E \subset \mathbb{E}^d$ un ensemble d'arêtes. On définit son poids $T(E)$ par

$$T(E) = \sum_{e \in E} t(e).$$

Pour un ensemble d'arêtes $E \subset B$, on dit que E coupe F_0 de F_m dans B si et seulement si il n'existe aucun chemin de F_0 à F_m dans $B \setminus E$. On dit que ce même E est un (F_0, F_m) -cut s'il coupe F_0 de F_m dans B et s'il est minimal pour cette propriété, au sens où aucun sous-ensemble de E distinct de E et de l'ensemble vide ne vérifie cette propriété. Le théorème du max-flow min-cut est le suivant :

Théorème .3.

$$\phi_{B(\vec{k},m)} = \min\{T(E) \mid E \text{ est un } (F_0, F_m)\text{-cut dans } B(\vec{k}, m)\}.$$

La démonstration de ce théorème relève de la théorie des graphes, on peut la trouver dans [3], je ne vais pas en parler. En revanche on peut essayer de comprendre en quoi ce résultat est naturel. Prenons E un (F_0, F_m) -cut. Puisque E coupe F_0 de F_m dans B , le flux maximal dans B passe nécessairement par les arêtes e de E de capacité $t(e)$: le flux maximal est donc inférieur à $T(E)$, pour tout tel E . D'autre part, le flux est limité par certaines arêtes qui sont saturées, c'est à dire que la quantité de fluide qui les traverse est égale à leur capacité. L'ensemble de ces arêtes saturées coupe F_0 de F_m dans B , car sinon il existe un chemin de F_0 à F_m dans B constitué d'arêtes non saturées, et la quantité de fluide qui passe par ce chemin peut être augmentée, ce qui contredit la maximalité du flux. On regarde alors les différents sous-ensemble de ces arêtes saturées formant un (F_0, F_m) -cut : en effet, plusieurs arêtes peuvent être saturées sur une même voie de circulation du fluide à travers le graphe, et regarder les (F_0, F_m) -cuts permet d'éliminer ces doublons non informatifs pour la valeur du flux parmi les arêtes saturées. Le flux maximal est donc égal au poids d'un de ces (F_0, F_m) -cuts, d'où le théorème. Plus globalement, l'idée est que la valeur du flux maximal est donnée par la valeur des capacités des arêtes qui vont limiter ce flux.

Regardons un instant le cas particulier de la percolation de Bernoulli, c'est à dire que la capacité des arêtes suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = \mathbb{P}[t = 1]$. C'est en fait la percolation simple par arêtes, on retire les arêtes de capacité nulle pour obtenir un nouveau graphe G . Le théorème de Menger (voir [3]) affirme que le nombre d'arêtes qu'on doit retirer dans $G \cap B(\vec{k}, m)$ pour couper F_0 de F_m est égal au nombre maximal de chemins disjoints (i.e. sans arêtes communes) reliant F_0 à F_m dans $G \cap B$. Reprenons le graphe initial $(\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$. Grâce au théorème du max-flow min-cut, on en déduit que le flux maximal à travers le cylindre B est égal au nombre maximal de chemins ouverts (i.e. composé uniquement d'arêtes de capacité 1) reliant F_0 à F_m (voir figure 1). La définition du flux maximal est donc ici très simple.

Le théorème du max-flow min-cut permet également de faire le lien entre les deux interprétations de $t(e)$, du moins en dimension deux. En effet, la dimension deux offre également l'avantage de la symétrie entre le graphe initial et son dual. Le dual d'un graphe G plan est un graphe G^* plan également tel qu'à chaque face du graphe G correspond exactement un site dans G^* , et tel que deux sites sont reliés par une arête dans G^* si et seulement si les faces correspondantes dans G sont adjacentes. Ainsi chaque arête de G coupe une et une seule arête de G^* : on leur attribue la même capacité. Trivialement le graphe dual de $(\mathbb{Z}^2, \mathbb{E}^2)$ est simplement ce même graphe translaté par le vecteur $(1/2, 1/2)$. On remarque que si $B(k, m)$ est un cylindre dans $(\mathbb{Z}^2, \mathbb{E}^2)$, un (F_0, F_m) -cut dans B correspond simplement dans le graphe dual à un chemin entre le bord gauche et le bord droit de B^* (l'équivalent de B dans le graphe dual). Ainsi le flux maximal dans B , suivant la deuxième interprétation de $t(e)$, est égal à la distance aléatoire, correspondant à la première interprétation de $t(e)$, entre le bord gauche et le bord droit de B^* dans le graphe dual. Cette propriété est illustrée par la figure 2. Malheureusement, en dimension supérieure, un (F_0, F_m) -cut est beaucoup plus difficile à décrire. En dimension 3 par exemple, une arête du graphe va être intersectée par une "plaquette" du graphe dual, c'est à dire un carré de dimension 2 orthogonal à l'arête initiale.

Le deuxième outil que je vais présenter s'appuie sur le premier. Il consiste à comparer le (F_0, F_m) -cut qui donne la valeur du flux maximal à un autre objet dont on comprend mieux le comportement. Quelques définitions sont encore nécessaires. Soit $S = \prod_{i=1}^{d-1} [k_i, l_i]$ avec $k_i \leq l_i \in \mathbb{Z}$ un hyper-

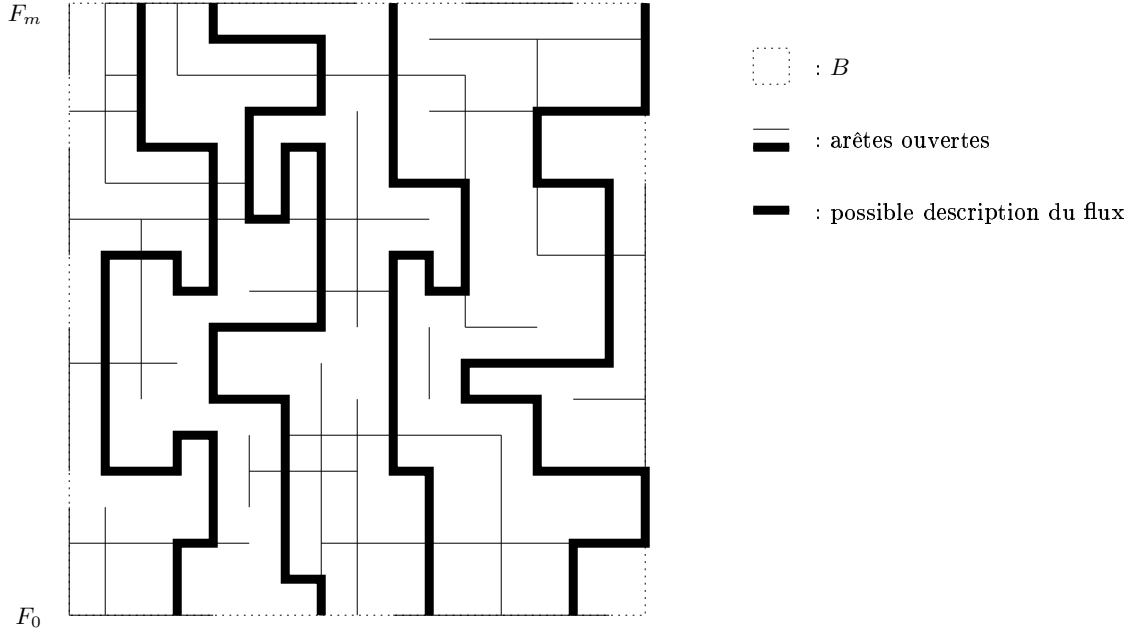


FIG. 1 – Cas de la percolation de Bernoulli par arêtes : exemple de visualisation du flux ($\phi_B = 4$)

rectangle. Soit $E \subset \mathbb{E}^d$ un ensemble d'arêtes inclu dans $S \times \mathbb{Z}$. On dit que E coupe $-\infty$ de $+\infty$ sur S s'il existe un N tel qu'il n'existe aucun chemin de $S \times \{-N\}$ à $S \times \{+N\}$ dans $(S \times \mathbb{Z}) \setminus E$. On dit que E est un cut sur S s'il coupe $-\infty$ de $+\infty$ sur S et s'il est minimal pour cette propriété. On dit que E satisfait les conditions au bord (*) si les seules arêtes de E qui sont incluses dans les parois verticales du cylindre $S \times \mathbb{Z}$ sont les arêtes verticales qui coupent le périmètre du rectangle $S \times \{1/2\}$. Cela signifie grossièrement que le bord de E est localisé sur la base du cylindre infini. A présent on peut définir la variable

$$\tau(S) = \inf\{T(E) \mid E \text{ est un cut over } S \text{ et satisfait } (*)\}.$$

Pourquoi introduire un tel objet ? On voit qu'il ressemble au (F_0, F_m) -cut défini précédemment, en substituant les conditions aux bords (*) à la contrainte d'avoir une hauteur inférieure à m . Ces deux objets sont donc assez semblables, et on espère par l'étude du comportement de l'un avoir des informations sur le comportement de l'autre. Or $\tau(S)$ est beaucoup plus facile à étudier : $\tau(S)$ est sous-additif, au sens où si S_1 et S_2 sont deux hyper-rectangles ayant exactement un bord commun et à l'extérieur l'un de l'autre, on a $\tau(S_1 \cup S_2) \leq \tau(S_1) + \tau(S_2)$. Par le théorème ergodique sous-additif (voir [1]), on sait que la limite suivante existe presque sûrement :

$$\nu(F) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\tau([0, k]^{d-1})}{k^{d-1}},$$

où $\nu(F)$ est déterministe grâce à la loi du 0 – 1 et l'invariance de τ par translation du graphe. On peut donc s'attendre à ce que le flux ait le même comportement limite que τ .

Ce résultat fondamental est encore une fois dû à Kesten (1987, voir [5]). Il s'énonce ainsi, en dimension $d = 3$:

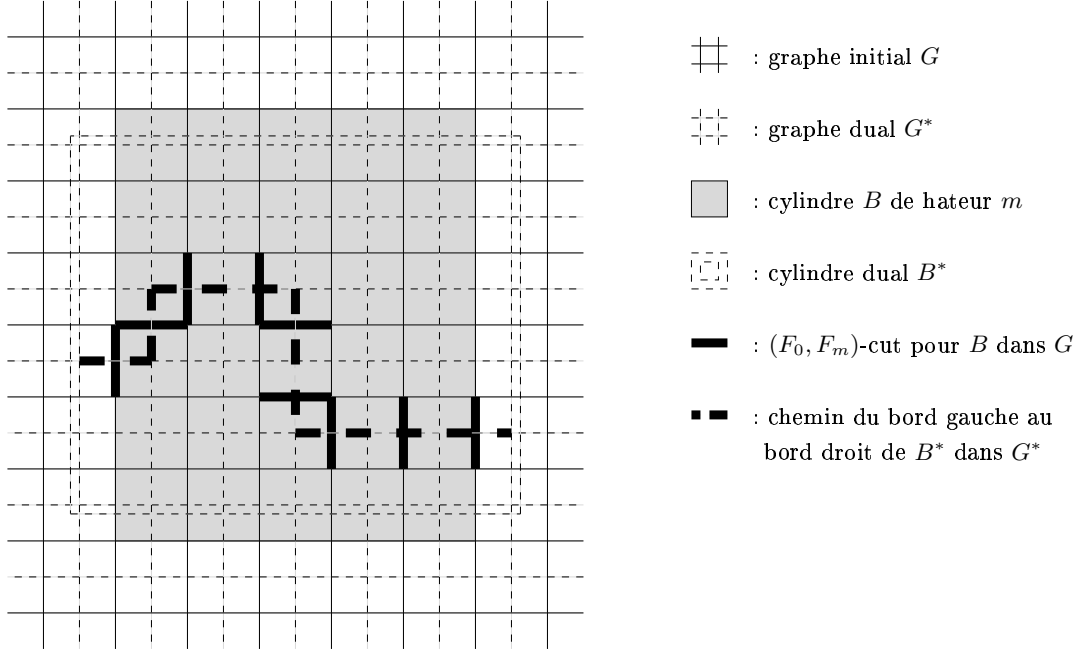


FIG. 2 – Dualité en dimension deux : lien entre flux maximal et temps minimal

Théorème .4. *Il existe $p_0 > 0$ tel que si F satisfait les conditions suivantes*

$$F(0) < p_0 \text{ et } \mathbb{E} [e^{\gamma t}] < \infty \text{ pour un } \gamma > 0,$$

pour une fonction $m(k, l)$ qui vérifie pour $k \geq l$

$$\lim_{k, l \rightarrow \infty} m(k, l) = +\infty \text{ et } \lim_{k, l \rightarrow \infty} \frac{\ln m}{k^{1-\delta}} = 0 \text{ pour un } \delta > 0,$$

on a

$$\lim_{k, l \rightarrow \infty} \frac{\phi_{B((k, l), m)}}{kl} = \nu(F) \text{ p.s. et dans } L^1.$$

Ce théorème montre bien que le flux et τ ont le même comportement, et sa démonstration repose d'ailleurs sur la comparaison, difficile, entre ces deux variables. Il s'agit d'une loi des grands nombres pour le flux maximal. Le problème sur lequel je travaille en thèse actuellement, sous la direction de Raphaël Cerf, est la détermination de l'ordre de grandeur des variations du flux maximal par rapport à son comportement moyen, en d'autres termes c'est l'étude des grandes déviations pour le flux maximal.

Cette étude s'articule bien sûr en deux temps : l'étude des déviations supérieures et celles des déviations inférieures. Le premier cas est le plus simple. J'ai obtenu à ce sujet dans le début de ma thèse les résultats suivants, en dimension $d \geq 2$:

Théorème .5. *Soit $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h(n)}{\ln n} = +\infty.$$

Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^+$, la limite

$$\psi(\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n^{d-1}h(n)} \ln \mathbb{P} \left[\phi_{(n, \dots, n), h(n)} \geq \lambda n^{d-1} \right]$$

existe et est indépendante de h . De plus ψ est convexe sur \mathbb{R}^+ , finie et continue sur l'ensemble $\{\lambda \mid \mathbb{P}[t(e) \geq \lambda] > 0\}$, et s'annule sur $[0, \nu]$. Si on suppose que $\mathbb{E}[e^{\theta t}]$ est finie pour un θ strictement positif, la fonction ψ est strictement positive sur $] \nu, +\infty[$.

Théorème .6. Soit $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h(n)}{\ln n} = +\infty.$$

On suppose qu'il existe un θ strictement positif tel que

$$\mathbb{E}[e^{\theta t}] < \infty.$$

Alors la suite

$$\left(\frac{\phi_{(n, \dots, n), h(n)}}{n^{d-1}} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

satisfait un principe de grandes déviations, de vitesse $n^{d-1}h(n)$, et gouverné par la bonne fonction de taux ψ .

En notant $\beta = \inf\{v \mid \mathbb{P}[t(e) \leq v] > 0\}$, on remarque que $\phi_{(n, \dots, n), h(n)}/n^{d-1}$ prend ses valeurs dans $D = [\beta, +\infty[$. Le principe de grandes déviations s'énonce alors comme suit :

– pour tout fermé $F \subset D$, on a

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{d-1}h(n)} \ln \mathbb{P} \left[\frac{\phi_{(n, \dots, n), h(n)}}{n^{d-1}} \in F \right] \leq -\inf_F \psi,$$

– pour tout ouvert $O \subset D$, on a

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{d-1}h(n)} \ln \mathbb{P} \left[\frac{\phi_{(n, \dots, n), h(n)}}{n^{d-1}} \in O \right] \geq -\inf_O \psi.$$

Ces théorèmes montrent que la probabilité que le flux renormalisé soit anormalement grand décroît exponentiellement vite en fonction du volume du cylindre quand la queue de distribution de F n'est pas trop grosse. C'est assez logique puisque pour que le flux soit anormalement grand il faut soit que toutes les arêtes aient une capacité supérieure à la moyenne, événement dont la probabilité décroît exponentiellement vite en fonction du nombre d'arêtes, soit qu'il y ait un chemin composé d'arêtes à très grosse capacité, événement dont la probabilité est négligeable par rapport à l'autre lorsque la queue de probabilité de F est mince. Les démonstrations de ces deux théorèmes sont données dans la suite de ce mémoire. La condition $\lim_{n \rightarrow \infty} h(n)/\ln n = +\infty$ qui apparaît au cours de la preuve est mal comprise. Dans le cas de capacités bornées, cette condition peut être affaiblie, il suffit que la fonction h vérifie $\lim_{n \rightarrow \infty} h(n) = +\infty$. C'est aussi le cas lorsque la capacité d'une arête a pour loi la valeur absolu d'une gaussienne. Malheureusement je n'ai pas encore trouvé de conditions nécessaires et suffisantes pour pouvoir affaiblir la condition sur h .

En ce qui concerne les déviations inférieures, le problème est plus complexe. Intuitivement, on se rend compte qu'il suffit que les n^{d-1} arêtes verticales du cylindre $B((n, \dots, n), h(n))$ qui sont à la

même hauteur dans B aient une capacité anormalement basse pour que ϕ_B soit anormalement bas également. On s'attend donc à ce que la probabilité que le flux renormalisé soit trop petit décroisse exponentiellement vite en fonction de la surface de la base du cylindre, soit n^{d-1} . Je n'ai pour l'instant obtenu qu'un résultat très partiel, mais qui est compatible avec ce raisonnement. Il s'agit du résultat suivant, en dimension $d \geq 2$:

Théorème .7. *On suppose que $F(0) < 1 - p_c(d)$, où $p_c(d)$ est la valeur critique du paramètre de la percolation de Bernoulli par arêtes en dimension d . Il existe une constante $\varepsilon_0(d, F) > 0$ et une constante $C(d) > 0$ telles que pour toute fonction $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ vérifiant*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h(n)}{n^{d-1}} = 0$$

et pour tout $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ on a

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n^{d-1}} \ln \mathbb{P} \left[\phi_{(n, \dots, n), h(n)} \leq \varepsilon n^{d-1} \right] \geq C > 0.$$

La condition $F(0) < 1 - p_c$ est pertinente. En effet, Yu Zhang a montré en dimension 3 (voir [7]) que pour une fonction de répartition F telle que $F(0) = 1 - p_c$, on a

$$\lim_{k, l, m \rightarrow \infty} \frac{\phi_{(k, l), m}}{kl} = 0.$$

La démonstration de ce théorème, qu'on retrouve également dans la suite du mémoire, est basée sur un principe de changement d'échelle très intéressant. Il est difficile de prendre en compte ce qui se passe en chaque arête, c'est à dire du point de vue microscopique, parce qu'il y a beaucoup d'arêtes en jeu. Une stratégie est de se placer du point de vue mésoscopique, i.e. un point de vue intermédiaire entre le microscopique et le macroscopique. On regarde alors des ensembles d'arêtes, appelés blocs, et on essaie de comprendre le comportement typique de ces blocs vis à vis du flux. Concrètement, cela signifie qu'on cherche à définir un événement dans un bloc qui soit très probable dès que ce bloc est assez grand. Le problème est de trouver un événement pertinent sur ces blocs, c'est à dire qui décrive suffisamment bien le flux dans le bloc pour qu'en regardant simplement quels blocs réalisent cet événement on puisse avoir les renseignements qui nous intéressent sur le flux. On se ramène ainsi à l'étude d'une percolation de Bernoulli par sites de paramètre proche de 1 : chaque bloc est un site, et il est ouvert si et seulement si l'événement en question y est réalisé, donc avec une très forte probabilité. Ce type de modèle est beaucoup plus facile à étudier que le modèle initial. Malheureusement, il est difficile de trouver l'événement pertinent sur les blocs. On voit un exemple de tel événement dans la démonstration du théorème précédent, mais il ne décrit pas suffisamment bien le flux pour obtenir le même résultat pour un quelconque $\varepsilon < \nu$. Le problème se ramène donc finalement à bien comprendre comment le flux se comporte dans un bloc. Cela revient à étudier les (F_0, F_m) -cut dans une boîte de hauteur m , en particulier à s'intéresser à leurs propriétés géométriques, encore très mal connues.

Références

- [1] M. A. Ackoglu and U. Krengel. Ergodic theorems for superadditive processes. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 323 :53–67, 1981.

-
- [2] Itai Benjamini, Gil Kalai, and Oded Schramm. First passage percolation has sublinear distance variance. *Annals of Probability*, 31(4), 2003.
 - [3] Béla Bollobás. *Graph theory*, volume 63 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1979. An introductory course.
 - [4] Harry Kesten. Aspects of first passage percolation. In *École d'Été de Probabilités de Saint Flour XIV*, number 1180 in *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 1984.
 - [5] Harry Kesten. Surfaces with minimal random weights and maximal flows : a higher dimensional version of first-passage percolation. *Illinois Journal of Mathematics*, 31(1) :99–166, 1987.
 - [6] Barry McCoy and Tai Tsun Wu. *The two dimensional Ising Model*. Harvard University Press, 1973.
 - [7] Yu Zhang. Critical behavior for maximal flows on the cubic lattice. *Journal of Statistical Physics*, 98(3-4) :799–811, 2000.