Marches aléatoires et réseaux électriques

Matthieu Solnon, Nicolas Tholozan
École Normale Supérieure

Mémoire de M1 encadré par Mathilde Weill,
soutenu le mercredi 25 juin 2008.

2 décembre 2008

Table des matières

Introduction

Le but de cet exposé est de présenter les liens entre les chaînes Markov réversibles et la théorie des réseaux électriques, puis de les appliquer à certaines marches aléatoires sur des arbres.

Physiquement, un réseau électrique est un réseau de résistances, soumis à un potentiel, et sur lequel circule un courant. On peut modéliser le mouvement d'un électron dans un réseau électrique par une marche aléatoire telle que la probabilité d'aller de x à y est inversement proportionnelle à la résistance entre x et y. Cette modélisation, bien qu'un peu simpliste du point de vue physique, permet d'intepréter de façon probabiliste certains courants et potentiels possibles. Notamment, un courant d'énergie finie peut circuler dans un réseau infini si et seulement si la marche aléatoire de l'électron est transiente.

Un arbre pondéré, quant à lui, peut être vu non pas comme un réseau électrique mais comme un réseau de tuyaux de différentes tailles, dans lesquels circule un flot dont le débit est inférieur à la taille du tuyau. Le théorème du max-flow = min-cut donne alors un critère pour qu'un flot non nul puisse circuler dans un arbre infini. Dans le cas particulier où la taille des tuyaux décroît exponentiellement avec la hauteur dans l'arbre, la circulation d'un flot non nul dépend d'une constante caractéristique de l'arbre appelée indice de branchement, qui correspond aussi à la valeur critique pour laquelle une certaine marche aléatoire paramétrée devient récurrente.

Les résultats que nous présenterons (notamment les deux théorèmes principaux) proviennent des travaux de Russell Lyons. La théorie des réseaux électriques est exposée dans le livre de Russell Lyons et Yuval Peres [1], et les résultats sur les arbres proviennent d'un article de Lyons [2].

1 Réseaux électriques

1.1 Définitions et notations

1.1.1 Graphes et résaux électriques

Définition 1.1. Un graphe est un couple $G = (V, E)$, où V est un ensemble dénombrable et E un sous-ensemble quelconque de $V \times V$. On appelle les éléments de V des sommets, et ceux de E des arêtes. On notera $V = V(G)$ et $E = E(G)$. Si (x, y) est dans E, on dira que y est un voisin de x, et on notera $x \sim y$.

Un chemin dans le graphe est une suite de sommets (x_n), finie ou infinie, tel que pour tout i, $x_i \sim x_{i+1}$.

Un graphe est dit non orienté si la relation $\sim$ est symétrique.

Définition 1.2. Un graphe est dit connexe s'il existe un chemin fini entre chaque paire de sommets de ce graphe. Il est dit localement fini si tout sommet a un nombre fini de voisins.

Définition 1.3. Un *réseau électrique* est un graphe non orienté, connexe, localement fini, muni d'une fonction $c : E \to \mathbb{R}_+^*$ vérifiant $c(x,y) = c(y,x)$ pour tout (x,y) dans E. On appelle $c(x,y)$ la *conductance* de l'arête (x,y).

1.1.2 Marches aléatoires sur les réseaux électriques

Définition 1.4. Sur un réseau électrique (G,c), on définit la chaîne de Markov suivante, de fonction de transition Q :

$$Q(x,y) = \mathbf{1}_{y\sim x} \frac{c(x,y)}{\sum_{z\sim x} c(x,z)}$$

On appelle cette chaîne de Markov la marche aléatoire sur le réseau électrique.

Remarque 1.1. Un réseau électrique étant connexe et les conductances étant non nulles, la marche aléatoire sur le réseau électrique est irréductible.

Proposition 1.1. *La marche aléatoire sur un réseau électrique (G,c) est une chaîne de Markov réversible. En effet, si on définit, pour x dans $V(G)$,*

$$\pi(x) = \sum_{x\sim y} c(x,y)$$

la fonction π vérifie $\pi(x)Q(x,y) = \pi(y)Q(y,x)$ pour $x,y \in V(G)$.

Réciproquement, soit G un graphe non orienté connexe localement fini. Soit Q la fonction de transition d'une chaîne de Markov irréductible sur $V(G)$, telle que si $Q(x,y) \neq 0$ alors $x \sim y$. S'il existe $\pi : V(G) \to \mathbb{R}_+^*$ telle que $\pi(x)Q(x,y) = \pi(y)Q(y,x)$ pour $(x,y) \in V(G)^2$, posons $c(x,y) = \pi(x)Q(x,y) = c(y,x)$. Alors (G,c) est un réseau électrique, et Q est la fonction de transition de la marche aléatoire sur le réseau (G,c).

Démonstration. En posant $\pi(x) = \sum_{z\sim x} c(x,z)$, on a $\pi(x)Q(x,y) = c(x,y) = c(y,x) = \pi(y)Q(y,x)$. Réciproquement, posons $c(x,y) = \pi(x)Q(x,y)$. Alors

$$\frac{c(x,y)}{\sum_{z\sim x} c(x,z)} = \frac{\pi(x)Q(x,y)}{\sum_{z\sim x} \pi(x)Q(x,z)} = Q(x,y).$$

$\square$

1.2 Courants et potentiels

1.2.1 Fonctions harmoniques

Soit G un réseau, et $c(x,y)$ les conductances des arêtes.

Définition 1.5. Une fonction $f : V(G) \to \mathbb{R}$ est dite *harmonique* en x si elle vérifie

$$f(x) = \frac{1}{\pi(x)} \sum_{y \sim x} c(x,y) f(y) = \sum_{y \sim x} Q(x,y) f(y)$$

Elle est dite harmonique sur $W \subset V(G)$ si elle est harmonique en tout point de W.

Rappelons les propriétés classiques des fonctions harmoniques.

Principe du maximum. *Soit G un réseau et $H \subset G$ connexe. Soit $f : V(G) \to \mathbb{R}$ une fonction harmonique sur $V(H)$. Supposons que f atteint son maximum en un point de $V(H)$. Alors, en notant $\overline{V(H)}$ l'ensemble des points de V et de leurs voisins, $f_{|\overline{V(H)}}$ est constante égale à* $\max f$.

Démonstration. Soit $K = \left\{ y \in \overline{V(H)} : f(y) = \max f \right\}$. L'ensemble K est non vide. Soit $x \in K$. On a

$$\max f = f(x) = \sum_{y \sim x} Q(x,y) f(y)$$

Donc

$$0 = f(x) - \sum_{y \sim x} Q(x,y) f(y) = \sum_{y \sim x} Q(x,y)(\max f - f(y))$$

et tous les termes de la somme sont positifs. Donc pour tout y voisin de x, on a $Q(x,y)(\max f - f(y)) = 0$, d'où $y \in K$. Comme H est connexe, on a donc $K = \overline{V(H)}$ □

On en déduit également le Principe d'unicité :

Principe d'unicité. *Soit G un réseau, et $W \subsetneq V(G)$. Soient f et $g : V(G) \to \mathbb{R}$ deux fonctions harmoniques sur W et qui coïncident sur $V(G) \backslash W$. Alors $f = g$.*

Démonstration. Posons $h = f - g$. La fonction h est harmonique et $h_{|V \backslash W} = 0$. Supposons que $\sup h > 0$. Alors h atteint son maximum sur W. Par le principe du maximum, il existe $x \in \overline{W} \backslash W$ tel que $h(x) = \max h > 0$. C'est absurde car $h_{|V \backslash W} = 0$. Donc $\sup h = 0$. De même, $\inf h = \sup -h = 0$. Donc $h = 0$ et $f = g$. □

Principe d'existence. *Soit G un graphe et $W \subset V(G)$ fini. Soit $f_0 : V(G)\backslash W \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Alors il existe une fonction $f : V \to \mathbb{R}$ harmonique sur W, et telle que $f_{|V\backslash W} = f_0$.*

Démonstration. Ce théorème se prouve grâce aux chaînes de Markov. Soit $a \in V(G)$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov de fonction de transition Q issue de a. Soit $T_a = \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n \in V(G)\backslash W\}$. La variable aléatoire T_a est un temps d'arrêt, presque sûrement fini. Posons $f(a) = \mathbb{E}_a(f_0(X_{T_a}))$. Remarquons que si $a \in V(G)\backslash W$, alors $T_a = 0$ et fonc $f(a) = f_0(a)$. Il reste à prouver que f est harmonique sur W. Supposons que $a \in W$. Alors $T \geq 1$. On a

$$f(a) = \mathbb{E}_a(f_0(X_{T_a})) = \sum_{y\sim a} \mathbb{E}_a(\mathbf{1}_{X_1=y} f_0(X_{T_a})).$$

D'où

$$f(a) = \sum_{y\sim a} Q(x,y)f(y),$$

d'après la propriété de Markov faible. □

1.2.2 Définitions

Définissons maintenant un potentiel et un courant sur un réseau électrique. Sur un réseau électrique G, on considère un ensemble Z de sommets.

Définition 1.6. On appelle potentiel sur le réseau G toute fonction $v : V(G) \to \mathbb{R}$ harmonique sur $V(G)\backslash Z$, et dont la valeur est fixée sur Z. Le courant associé à un potentiel v est alors la fonction $i : E(G) \to \mathbb{R}$ définie par $i(x,y) = c(x,y)(v(x) - v(y))$ (la relation liant i et v correspond à la loi d'Ohm en physique).

Le courant ainsi défini vérifie les deux lois suivantes (appelées en physique lois de Kirchhoff).

Loi des mailles : Pour tout lacet $x_0 \sim x_1 \sim \ldots \sim x_{n-1} \sim x_n = x_0$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{i(x_{k-1}, x_k)}{c(x_{k-1}, x_k)} = 0.$$

En particulier, $i(x,y) = -i(y,x)$.
Cette propriété est évidente car, d'après la loi d'Ohm,

$$\frac{i(x_{k-1}, x_k)}{c(x_{k-1}, x_k)} = v(x) - v(y).$$

Loi des noeuds : Pour tout $x \in V(G)\backslash Z$, on a

$$\sum_{y \sim x} i(x,y) = 0.$$

Autrement dit, il n'y a pas de création ni d'absorption de charge ailleurs qu'au niveau des sommets de Z. Physiquement, les points de Z sont des point connectés à des générateurs, de sorte que les charges peuvent y être créées ou absorbées.

Démonstration. Soit $x \in V(G)\backslash Z \cup \{a\}$. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{y \sim x} i(x,y) &= \sum_{y \sim x} c(x,y)(v(x) - v(y)) \\
&= v(x) \sum_{y \sim x} c(x,y) - \sum_{y \sim x} c(x,y) v(y) \\
&= \pi(x) v(x) - \sum_{y \sim x} c(x,y) v(y) \\
&= 0
\end{aligned}$$

car v est harmonique en x. □

Ces deux lois caractérisent en fait un courant, comme on le voit dans la proposition suivante :

Proposition 1.2. *Soit i une fonction de $E(G) \to \mathbb{R}$ vérifiant les deux lois de Kirchhoff. Alors il existe un potentiel v tel que i soit le courant associé à v, et v est unique à une constante additive près.*

On a ainsi une définition intrinsèque de courant.

Démonstration. Soit x_0 un sommet quelconque du réseau. Soit $x_0 \sim x_1 \sim x_2 \sim \ldots \sim x_n = x$ un chemin de x_0 à x. S'il existe un potentiel v adapté à i, alors, d'après la loi d'Ohm, on doit avoir

$$v(x) - v(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i(x_{i-1}, x_i)}{c(x_{i-1}, x_i)}$$

donc ce potentiel est unique à la constante $v(x_0)$ près.

D'autre part, d'après la loi des mailles, $\sum_{i=1}^{n} \frac{i(x_{i-1}, x_i)}{c(x_{i-1}, x_i)}$ ne dépend pas du chemin choisi pour aller de x_0 à x. Posons donc

$$v(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i(x_{i-1}, x_i)}{c(x_{i-1}, x_i)}$$

où $x_0 \sim x_1 \sim x_2 \sim \ldots \sim x_n = x$ est n'importe quel chemin de x_0 à x. Le potentiel v est bien défini et on a bien $i(x,y) = c(x,y)(v(x) - v(y))$ pour tout $x \sim y$. Enfin, pour tout $x \in V(G)\backslash Z$, on a d'après la loi des noeuds,

$$\begin{aligned} v(x) - \sum_{y \sim x} Q(x,y)v(y) &= \frac{1}{\sum_{y \sim x} c(x,y)} \sum_{y \sim x} c(x,y)(v(x) - v(y)) \\ &= \frac{1}{\sum_{y \sim x} c(x,y)} \sum_{y \sim x} i(x,y) \\ &= 0 \end{aligned}$$

d'après la loi des noeuds. Par conséquent, v est bien harmonique sur $V(G)\backslash Z$. □

1.2.3 Interprétation probabiliste des courants et potentiels

On considère maintenant un réseau G, et on considère que l'ensemble Z est la réunion d'un sommet s (qu'on appellera la source de courant), et d'un ensemble de sommets M (qu'on appellera la masse). Enfin, on suppose que $W = V(G)\backslash(M \cup \{s\})$ est fini, de sorte que si $f_0 : M \cup \{s\} \to \mathbb{R}$, il existe un unique potentiel (i.e. une unique fonction harmonique sur W) dont la restriction à $M \cup \{s\}$ est f_0. On va maintenant s'intéresser aux potentiels qui sont nuls sur M. L'ensemble des potentiels nuls sur M forme un espace vectoriel de dimension 1, et chaque potentiel est caractérisé par sa valeur en s.

Potentiel et courant unitaires : Nous allons interpréter certains courants et potentiels possibles en termes probabilistes. On considère donc $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la marche aléatoire sur le réseau G. On pose $\tau_s = \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n = s\}$, et $\tau_M = \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n \in M\}$. Les variables τ_s et τ_M sont des temps d'arrêt.

Proposition 1.3. *L'unique potentiel v sur G tel que $v_{|M} = 0$ et $v(s) = 1$ est donné pour tout $x \in V(G)$ par*

$$v(x) = \mathbb{P}_x(\tau_s < \tau_M).$$

On l'appellera le potentiel unitaire.

Démonstration. Cela découle directement de la démonstration du principe d'existence, dans le cas particulier où $f_0(s) = 1$ et $f_{0|M} = 0$. □

Proposition 1.4. *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une marche aléatoire issue de s. Posons T_{xy} le nombre de transitions de (X_n) de x à y avant de rencontrer M. Alors l'unique courant i sur G vérifiant $\sum_{x\sim s} i(s,x) = 1$ est donné pour tout $x \sim y$ par*

$$i(x,y) = \mathbb{E}_s(T_{xy} - T_{yx}).$$

On l'appellera le courant unitaire.

Démonstration. On a par définition

$$T_{xy} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{1}_{\{n<\tau_M\}} \mathbf{1}_{\{X_n=x\}} \mathbf{1}_{\{X_{n+1}=y\}}$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_s(T_{xy}) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}_s(n<\tau_M, X_n = x, X_{n+1} = y) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}_s(n<\tau_M, X_n = x) \frac{c(x,y)}{\pi(x)} \end{aligned}$$

Posons $i(x,y) = \mathbb{E}_s(T_{xy} - T_{yx})$. La fonction i s'écrit alors $i(x,y) = (v(x) - v(y))c(x,y)$, où

$$v(x) = \frac{1}{\pi(x)} \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}_s(n<\tau_M, X_n = x)$$

Une fois le courant écrit sous cette forme, la loi des maille est évidente, et la loi des noeuds est équivalente à l'harmonicité de v. Pour montrer que v est harmonique nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 1.5. *Pour tout $x, y \in V(G)$, posons $N(x,y)$ l'espérance du nombre de passages en y d'une marche aléatoire issue de x avant de rencontrer M. Alors*

$$\pi(x)N(x,y) = \pi(y)N(y,x)$$

Démonstration. On montre par récurrence que :

$$\pi(x)Q(x,x_1)\dots Q(x_n,y) = \pi(y)Q(y,x_n)\dots Q(x_1,x)$$

Pour $n = 0$, c'est la définition d'une mesure réversible. Si la propriété est vraie au rang n, alors :

$$\begin{aligned} & [\pi(x)Q(x,x_1)\dots Q(x_n,x_{n+1})]Q(x_{n+1},y) \\ =\ & \pi(x_{n+1})Q(x_{n+1},x_n)\dots Q(x_1,x)Q(x_{n+1},y) \\ =\ & Q(x_{n+1},x_n)\dots Q(x_1,x)\pi(x_{n+1})Q(x_{n+1},y) \\ =\ & Q(x_{n+1},x_n)\dots Q(x_1,x)\pi(y)Q(y,x_{n+1}). \end{aligned}$$

On en déduit le résultat du lemme 1.5. En effet

$$\begin{aligned}
\pi(x)N(x,y) &= \pi(x)\mathbb{E}_x\Big[\sum_{n<T}\mathbf{1}_{X_n=y}\Big] \\
&= \sum_{n\geq 0}\pi(x)\mathbb{P}_x(T>n, X_n=y) \\
&= \sum_{n\geq 0}\sum_{x_1\notin M,\ldots,x_{n-1}\notin M}\pi(x)Q(x,x_1)\ldots Q(x_{n-1},y) \\
&= \sum_{n\geq 0}\sum_{x_1\notin M,\ldots,x_{n-1}\notin M}\pi(y)Q(y,x_{n-1})\ldots Q(x_1,x) \\
&= \sum_{n\geq 0}\pi(y)\mathbb{P}_y(T>n, X_n=y) \\
&= \pi(y)N(y,x).
\end{aligned}$$

□

On a alors $v(x)=N(s,x)/\pi(x)=N(x,s)/\pi(s)$. Il reste à prouver l'harmonicité de la fonction $x\mapsto N(x,s)$ sur $V(G)\backslash(\{s\}\cup M)$, ce qui s'obtient en appliquant la propriété de Markov au rang 1 :

$$\begin{aligned}
N(x,s) &= \mathbb{E}_x\left[\sum_{n<T}\mathbf{1}_{X_n=s}\right] \\
&= \sum_{n\geq 0}\mathbb{P}_x(X_n=s, T>n) \\
&= \sum_{n\geq 1}\mathbb{P}_x(X_n=s, T>n) \\
&= \sum_{n\geq 1}\sum_{y\sim x}\mathbb{P}_x(X_1=y, X_n=s, T>n) \\
&= \sum_{n\geq 1}\sum_{y\sim x}Q(x,y)\mathbb{P}_y(X_{n-1}=s, T>n-1) \\
&= \sum_{y\sim x}Q(x,y)\sum_{n\geq 1}\mathbb{P}_y(X_{n-1}=s, T>n-1) \\
&= \sum_{y\sim x}Q(x,y)N(y,s).
\end{aligned}$$

□

Résistance effective Considérons maintenant un potentiel u quelconque nul sur M. Alors $v(x) = u(x)/u(s)$ est le potentiel unitaire, et on a

$$\frac{u(x)}{u(s)} = \mathbb{P}_x(\tau_s < \tau_M).$$

Soit $\mathbb{P}(s \to M)$ la probabilité qu'une marche aléatoire issue de s rencontre M avant de revenir en s. On a alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(s \to M) &= \sum_{x \sim s} \frac{c(s,x)}{\pi(s)}(1 - \mathbb{P}_x(\tau_s < \tau_M)) \\
&= \sum_{x \sim s} \frac{c(s,x)}{\pi(s)}\left(1 - \frac{u(x)}{u(s)}\right) \\
&= \frac{1}{\pi(s)u(s)} \sum_{x \sim s} c(s,x)(u(s) - u(x)) \\
&= \frac{1}{\pi(s)u(s)} \sum_{x \sim s} i(s,x).
\end{aligned}$$

On en déduit une équation reliant le potentiel la source et le courant total entrant dans le circuit.

Proposition 1.6. *Appelons $\pi(s)\mathbb{P}(s \to M)$ la conductance effective du réseau (notée C_{eff}) et son inverse la résistance effective (notée R_{eff}). Alors pour tout couple courant-potentiel (i,u) sur le réseau, on a*

$$\sum_{x \sim s} i(s,x) = C_{\text{eff}} u(s)$$

Cas des réseaux infinis On suppose maintenant que $M = \varnothing$ et que G n'est pas nécessairement fini. L'existence et l'unicité d'un potentiel étant donnée sa valeur en s n'est alors plus garantie. On considère $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une exhaustion de G, c'est-à-dire une famille de sous-graphes finis de G tels que $s \in V(G_0)$, $G_n \subset G_{n+1}$ et $\bigcup G_n = G$. Posons $M_n = V(G) \backslash V(G_n)$. On peut appliquer les résultats précédents aux sous-graphes finis G_n. On définit C_n la conductance effective du réseau G_n où M_n est pris comme masse. On sait que $C_n = \pi(s)\mathbb{P}(s \to M_n)$ qui décroît car $M_{n+1} \subset M_n$. Posons $C_{\text{eff}} = \lim_{n \to \infty} C_n$ et R_{eff} son inverse. Alors C_{eff} ne dépend pas de l'exhaustion choisie, et on a plus précisément :

$$\begin{aligned}
C_{\text{eff}} &= \pi(s)\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{s \to M_n\}\right) \\
&= \pi(s)\mathbb{P}_s(\{\tau_s = +\infty\}).
\end{aligned}$$

On a donc le théorème suivant :

Théorème 1. *Soit G un réseau. La marche aléatoire sur G est transiente si et seulement si la conductance effective de G est non nulle pour un certain point source s.*

1.3 Flots et énergies

Le but de cette partie est de relier le critère de transience précédent à l'existence d'un courant d'énergie finie sur le réseau.

Dans cette partie, on fixe toujours s un sommet de G (la source), et $M \subset V(G) \backslash \{s\}$ (la masse).

Commençons par introduire quelques notations.

Définition 1.7. Si f est une fonction de V dans $\mathbb{R}$, on définit

$$df : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x)-f(y) \end{array}.$$

Si f est une fonction antisymétrique de E dans $\mathbb{R}$, on définit

$$d^*f : \begin{array}{ccc} V & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sum_{y\sim x} f(x,y) \end{array}.$$

Remarque 1.2. La loi d'Ohm s'écrit alors : $i = c\,dv$. La loi des noeuds de Kirchhoff s'écrit aussi : $d^*i(x) = 0$ si x n'est pas source de courant.

Définition 1.8. Un flot de $\{s\}$ à M est une fonction $\theta : E \to \mathbb{R}$, antisymétrique, vérifiant la loi des noeuds hors de $\{s\} \cup M$.

Définition 1.9. On appelle énergie d'un flot θ la quantité

$$\mathcal{E}(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{(x,y)\in E} c(x,y)^{-1}\theta^2(x,y)$$

Définition 1.10. On définit la *force* d'un flot θ par

$$str(\theta) = d^*\theta(s).$$

Définition 1.11. Un flot *unitaire* est un flot θ tel que

$$str(\theta) = 1.$$

Définition 1.12. Supposons le réseau G fini. On définit $\mathcal{L}^2(V)$ comme l'espace euclidien classique des fonctions sur V à valeurs dans $\mathbb{R}$, muni du produit scalaire :

$$\langle f, g\rangle = \sum_{x\in V} f(x)g(x).$$

On définit $\mathcal{L}^2_a(E)$ comme l'espace des fonctions antisymétriques à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{L}^2_a(E) = \{f : E \to \mathbb{R} : \forall (x,y) \in E, f(x,y) = -f(y,x)\},$$

sur lequel on définit deux produits scalaires :

$$(f, f') = \frac{1}{2}\sum_{(x,y)\in E} f(x,y)f'(x,y)$$

et

$$(f, f')_c = \frac{1}{2}\sum_{(x,y)\in E} f(x,y)f'(x,y)c^{-1}(x,y).$$

Pour tout $f \in \mathcal{L}^2_a(E)$, on note $\|f\|_c = \sqrt{(f,f)_c}$.

Proposition 1.7. *Si G est fini, les opérateurs $d : \mathcal{L}^2(V) \to \mathcal{L}^2_a(E)$ et $d^* : \mathcal{L}^2_a(E) \to \mathcal{L}^2(V)$ sont adjoints pour les produits scalaires $(\ ,\ )$ et $\langle\ ,\ \rangle$. C'est-à-dire que*

$$\forall f \in \mathcal{L}^2(V), \forall g \in \mathcal{L}^2_a(E), (df, g) = \langle f, d^*g\rangle.$$

Démonstration. En effet,

$$\begin{aligned}(df, g) &= \frac{1}{2}\sum_{(x,y)\in E}(f(x) - f(y))g(x,y)\\ &= \sum_{x\in V}\sum_{y\sim x} f(x)g(x,y)\\ &= \sum_{x\in V} f(x)d^*g(x) = (f, d^*g).\end{aligned}$$

□

Remarque 1.3. Si le réseau est fini, l'énergie d'un flot θ est alors $\|\theta\|_c$.

Lemme 1.8. *Supposons G fini. Soit θ un flot de $\{s\}$ à M. Alors :*

$$d^*\theta(s) = -\sum_{m\in M} d^*\theta(m)$$

Démonstration. Pour tout $x \notin \{s\} \cup M$ on a $d^*\theta(x) = 0$. Donc :

$$d^*\theta(s) + \sum_{x \in M} d^*\theta(x) = \sum_{x \in V} d^*\theta(x) = \langle d^*\theta, \mathbf{1} \rangle = (\theta, d\mathbf{1}) = (\theta, \mathbf{0}) = 0$$

□

Lemme 1.9. *Supposons $V(G)\backslash(\{s\} \cup M)$ fini. On se donne i le courant unitaire de s à M. Alors*

$$\mathcal{E}(i) = \frac{1}{\pi(s)\mathbb{P}(s \to M)}.$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(i) &= (c^{-1}i, i) \\ &= (dv, i) \\ &= \langle v, d^*i \rangle \\ &= \sum_{x \in V} v(x) d^*i(x) \\ &= v(s)d^*i(s) + \sum_{x \in V\backslash\{s\}} v(x) d^*i(x). \end{aligned}$$

Or d^*i est nul sur $V\backslash(\{s\} \cup M)$, et v est nul sur M. Ainsi $\mathcal{E} = v(s)d^*i(s) = v(s)$. D'après la proposition 1.6, on conclut que

$$\mathcal{E}(i) = \frac{1}{\pi(s)\mathbb{P}(s \to M)}.$$

□

Principe de Thomson. *Supposons $V(G)\backslash(\{s\} \cup M)$ fini. Soit θ un flot de $\{s\}$ à M, et i le courant de $\{s\}$ à M vérifiant $d^*\theta = d^*i$. Alors :*

$$\theta \neq i \Rightarrow \mathcal{E}(\theta) > \mathcal{E}(i)$$

Démonstration.

$$\mathcal{E}(\theta) = \|\theta\|_r^2 = \|\theta - i + i\|_r^2 = \|i\|_r^2 + \|\theta - i\|_r^2 + 2(i, \theta - i)_r$$

Or :

$$(i, \theta - i)_c = (c^{-1}i, \theta - i) = (dv, \theta - i) = \langle v, d^*(\theta - i) \rangle = 0$$

□

Lemme 1.10. *Soit* (θ_n) *une suite d'éléments de* $\mathcal{L}_a^2(E)$ *telle que*

$$\sup_{n\geq 0} \mathcal{E}(\theta_n) < +\infty$$

et telle que

$$\theta_n(x,y) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \theta(x,y)$$

pour tout (x,y) *dans* E.

Alors $\theta \in \mathcal{L}_a^2(E)$, $\mathcal{E}(\theta) \leq \liminf_n \mathcal{E}(\theta_n)$ *et*

$$\forall x \in V, d^*\theta_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} d^*\theta(x).$$

Démonstration. Pour tout $(x,y) \in E$, on a $\theta_n(x,y) \longrightarrow_{n\to+\infty} \theta(x,y)$. Or on a $\theta_n(x,y) = -\theta_n(y,x)$ pour tout n dans $\mathbb{N}$. Donc $\theta(x,y) = -\theta(y,x)$, c'est à dire que la fonction θ est antisymétrique. Comme le graphe est localement fini, on a aussi

$$\sum_{y\sim x} \theta_n(x,y) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{y\sim x} \theta(x,y)$$

soit

$$d^*\theta_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} d^*\theta(x).$$

Enfin, comme $\mathcal{E}(\theta_n) = \sum_{e\in E} c(x,y)^{-1}\theta_n^2(x,y)$, le lemme de Fatou implique que $\mathcal{E}(\theta) \leq \liminf \mathcal{E}(\theta_n)$. On a donc $\theta \in \mathcal{L}_a^2(E)$. □

On a maintenant tous les outils en mains pour démontrer le théorème suivant :

Théorème 2. *Soit* G *un réseau électrique, avec* $M = \varnothing$. *La marche aléatoire sur* G *est transiente si et seulement s'il existe un flot unitaire d'énergie finie.*

Démonstration. Soit s dans V. On se donne une exhaustion (G_n) de G telle que $s \in G_0$. On construit un nouveau graphe G_n^W de la façon suivante. Les sommets de G_n^W sont les sommets de G_n et un point m_n (c'est à dire que tous les points de M_n sont identifiés à un unique point). Les arêtes de G_n^W sont les (x,y) où $x \in V(G_n)$, $y \in V(G_n)$, et $(x,y) \in E$, et les (x, m_n) où $x \in V(G_n)$ a un voisin dans M_n. Les conductances sur ce nouveau graphes sont définies par :

$$c_n(x,y) = c(x,y) \quad \text{si } x \in V(G_n),\ y \in V(G_n) \text{ et } (x,y) \in E$$

$$c_n(x,m_n) = \sum_{y\in M_n, y\sim x} c(x,y)$$

On se donne i_n le courant unitaire de s à m_n dans G_n^W. D'après le lemme 1.9, on a

$$\mathcal{E}(i_n) = \frac{1}{\pi(s)\mathbb{P}(s \to M)}.$$

Ainsi, d'après la proposition 1.6, la chaîne de Markov est transiente si et seulement si $\limsup \mathcal{E}(i_n) < +\infty$.

Supposons que la marche aléatoire est transiente. Soit $M = \limsup \mathcal{E}(i_n)$. Alors $M < +\infty$. On a alors, pour tout $(x, y) \in E(G)$,

$$|i_n(x, y)| \leq \sqrt{c(x, y)\mathcal{E}(i_n)} \leq \sqrt{Mc(x, y)}.$$

Ainsi, pour tout $(x, y) \in E(G)$, la suite $(i_n(x, y))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Par extraction diagonale, on peut en extraire i_{n_k} qui converge simplement, et sa limite est un flot unitaire d'énergie finie d'après le lemme 1.10

Supposons maintenant qu'il existe θ un flot unitaire d'énergie finie. On définit θ_n comme le flot θ restreint à G_n^W de la façon suivante :

$$\theta_n(x, y) = \theta(x, y) \quad \text{si } x \in V(G_n),\ y \in V(G_n) \text{ et } (x, y) \in E$$

$$\theta_n(x, m_n) = \sum_{y \in M_n, y \sim x} c(x, y) \quad \text{et} \quad \theta_n(m_n, x) = \theta_n(x, m_n).$$

On voit que θ_n est un flot unitaire de s à m_n. Il reste à montrer qu'il est d'énergie finie. On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(\theta_n) &= \frac{1}{2} \sum_{(x,y) \in E_n} c_n^{-1}(x, y)\theta_n^2(x, y) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{(x,y) \in E_n \cap (V(G_n) \times V(G_n))} c_n^{-1}(x, y)\theta_n^2(x, y) \\
&\quad + \sum_{x \sim M_n} c_n^{-1}(x, m_n)\theta_n^2(x, m_n) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{(x,y) \in E_n \cap (V(G_n) \times V(G_n))} c_n^{-1}(x, y)\theta_n^2(x, y) \\
&\quad + \sum_{x \sim M_n} \frac{\left(\sum_{y \in M_n, y \sim x} \theta(x, y)\right)^2}{\left(\sum_{y \in M_n, y \sim x} c(x, y)\right)}
\end{aligned}$$

Or, pour $x \sim M_n$, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{y \in M_n, y \sim x} \theta(x,y) \right)^2 &= \left(\sum_{y \in M_n, y \sim x} c^{1/2}(x,y) c^{-1/2}(x,y) \theta(x,y) \right)^2 \\
&\leq \sum_{y \in M_n, y \sim x} c(x,y) \sum_{y \in M_n, y \sim x} c^{-1}(x,y) \theta^2(x,y)
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(\theta_n) &= \frac{1}{2} \sum_{(x,y) \in E_n \cap (V(G_n) \times V(G_n))} c^{-1} \theta^2(x,y) \\
&\quad + \sum_{x \sim M_n} \sum y \in M_n, y \sim x c^{-1}(x,y) \theta^2(x,y) \\
&\leq \mathcal{E}(\theta)
\end{aligned}$$

Par ailleurs on a $d^* i_n(x) = d^* \theta_n(x) = 0$ pour $x \notin \{s, m_n\}$, $d^* i_n(s) = d^* \theta_n(s) = 1$, $d^* i_n(m_n) = -d^* i_n(s) = -1$ et $d^* \theta_n(m_n) = -d^* \theta_n(s) = -1$. On peut donc appliquer le principe de Thomson au couple (i_n, θ_n) pour obtenir $\mathcal{E}(i_n) \leq \mathcal{E}(\theta_n)$. Ainsi la suite $(\mathcal{E}(i_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée par $\mathcal{E}(\theta)$. On en déduit que $\limsup \mathcal{E}(i_n) < +\infty$, puis que la marche aléatoire est transiente.

□

2 Marches aléatoires sur des arbres

Nous allons maintenant appliquer le théorème 2 à des marches aléatoires particulières sur des arbres.

2.1 Quelques définitions sur les arbres

Un arbre est un graphe connexe qui ne contient pas de cycles (i.e. pour tout $n \geq 2$, il n'existe pas $x_1 \neq x_2 \neq \ldots x_n$ tels que $x_1 \sim x_2 \sim \ldots \sim x_n \sim x_1$). Un arbre enraciné est un arbre muni d'un sommet particulier que l'on nomme racine. Ainsi, les résultats de la section 1 s'appliquent aux arbres enracinés. De même que dans la partie 1, on ne considèrera que des arbres symétriques localement finis. Rappelons quelques propriétés des arbres, qui rendent leur étude plus facile.

Soit A un arbre enraciné, de racine s. Pour tous $x, y \in V(A)$, il existe un unique chemin injectif (qui ne passe pas deux fois par le même point) de x à y. Pour tout $x \in V(A)$, on appellera hauteur de x (notée $|x|$) la longueur du chemin injectif de s à x.

Étant donné un arbre A de racine s, pour tout $x \neq s$, il existe un unique y connecté à x tel que $|y| = |x| - 1$, appelé le père de x. Les autres sommets z connectés à x vérifent $|z| = |x| + 1$ et sont appelés les fils de x.

Soit e une arête. Il existe un unique sommet x tel que e relie x à son père. On identifiera maintenant e et x, de sorte qu'on ne considèrera plus que des fonctions sur $V(A)$.

Soit x et y deux sommets. On dit que $x \leq y$ si le chemin injectif de la racine à y passe par x (i.e. si on passe par x en "descendant" de la racine à y). C'est une relation d'ordre partiel. Soit a un sommet d'un arbre A. Alors l'ensemble des $x \in A$ tels que $a \leq x$ est muni naturellement d'une structure d'arbre dont a est la racine. On l'appellera le sous-arbre de A partant de a, et on le notera A_a.

Ces propriétés ne font que décrire la structure des arbres tels qu'on les imagine.

2.2 Théorème du max-flow = min-cut

On considère maintenant des arbres pondérés, c'est-à-dire des couples (A, c) où A est un arbre et $c : V(A) \to \mathbb{R}_+^*$. La notion est la même que celle réseau électrique, sauf que, puisque chaque arête s'identifie à un sommet, les poids ne sont plus attribués aux arêtes mais aux sommets.

Intuitivement, on ne verra plus un arbre pondéré comme un réseau électrique, mais comme un réseau de tuyaux descendant de la racine. Si x est un sommet, on appellera $c(x)$ la capacité de x. Elle représente le diamètre du tuyau arrivant en x.

2.2.1 Flots circulant dans un arbre

Définissons maintenant un flot circulant dans un arbre pondéré.

Définition 2.1. Soit (A, c) un arbre pondéré de racine s. On appelle flot une fonction $\theta : V(A) \to \mathbb{R}_+$ vérifiant

$$\forall x \in V(A), \quad \theta(x) = \sum_{y \text{ fils de } x} \theta(y).$$

On dit de plus que le flot θ *circule* dans A si pour tout $x \in A$, $\theta(x) \leq c(x)$.

Remarquons que si θ est un flot, alors la fonction $\tilde{\theta} : E(A) \to \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}(x,y) &= \theta(y) \quad \text{si } y \text{ est le fils de } x \\ &= -\theta(x) \quad \text{si } x \text{ est le fils de } y \end{aligned}$$

est un flot au sens défini dans la première partie. Ainsi, la nouvelle définition d'un flot est simplement une définition plus adaptée aux arbres.

On peut voir $\theta(x)$ comme une quantité d'eau arrivant en x. La condition de circulation s'interprète alors comme : "la quantité d'eau arrivant en x doit être inférieure à la capacité du tuyau arrivant en x." La force d'un flot est alors simplement $str(\theta) = \theta(s)$.

Dans un arbre infini, il n'est pas évident qu'un flot non nul puisse circuler. Nous allons établir un critère qui utilise la notion de *coupe* d'un arbre.

Remarque 2.1. Il n'existe pas de flot non nul sur un arbre fini. En effet, si θ est un flot et si x n'a pas de fils, alors on a nécessairement $\theta(x) = 0$. Un raisonnement par récurrence permet alors de conclure que θ est nul si l'arbre est fini.

Maintenant, soit A un arbre quelconque. Comme dans la suite on s'intéresse aux flots sur A, on peut se ramener à étudier l'arbre $\tilde{A}$ obtenu en ôtant à A tous les sommets x tels que A_x est fini. Or, dans $\tilde{A}$, tout sommet a au moins un fils (en particulier, soit $\tilde{A}$ est vide , soit il est infini). Dans la suite, on fixe donc A un arbre pondéré, de racine s, de poids $c(x)$, dans lequel tout sommet a au moins un fils.

2.2.2 Coupe d'un arbre

Définition 2.2. On appelle *coupe* de l'arbre A un ensemble Π de sommets tel que tout chemin injectif infini partant de la racine rencontre Π une et une seule fois.

Un exemple de coupe est $S_n(A) = \{x \in V(A) : |x| = n\}$.

Si Π est une coupe de A, on notera $|\Pi| = \inf\{|x| : x \in \Pi\}$. On écrira également $\Pi \leq S_n(A)$ si pour tout $x \in \Pi$, $|x| \leq n$.

Les propriétés suivantes se voient bien sur un dessin, et se démontrent facilement.

- Soit A un arbre et x un sommet de A. Soit Π une coupe de A. Si $\Pi \cap A_x \neq \emptyset$, alors $\Pi \cap A_x$ est une coupe de A_x.
- Soit A un arbre de racine s, et Π une coupe de A. Si $s \in \Pi$, alors $\Pi = \{s\}$.

– Soit A un arbre de racine s, et Π une coupe de A. Si $s \notin \Pi$, alors pour tout s' fils de s, $\Pi \cap A_{s'}$ est une coupe de $A_{s'}$.

Corollaire 2.1. *Toute coupe est finie.*

Démonstration. Par l'absurde, supposons que Π est une coupe infinie de A. Construisons par récurrence un chemin (x_n) injectif tel que pour tout n, $\Pi \cap A_{x_n}$ est infini.

On pose $x_0 = s$. Supposons x_n construit. L'ensemble $\Pi \cap A_{x_n}$ est une coupe infinie de A_{x_n}, donc $x_n \notin \Pi$. Donc

$$\Pi = \bigcup_{y \text{ fils de } x_n} \Pi \cap A_y$$

On choisit alors x_{n+1} fils de x_n tel que $A_{x_{n+1}} \cap \Pi$ est infini. La suite (x_n) est un chemin injectif dans A, et pour tout n, $x_n \notin \Pi \cap A_{x_n}$. C'est absurde. $\square$

Corollaire 2.2. *Soit θ un flot sur A et Π une coupe de A. Alors*

$$\sum_{x \in \Pi} \theta(x) = \theta(s).$$

Ce résultat n'est en fait qu'une reformulation du lemme 1.8. On peut aussi le redémontrer par récurrence sur la hauteur maximale des sommets de Π.

En particulier, si (A, c) est un arbre pondéré et si θ circule dans A, on obtient :

$$str(\theta) \leq \sum_{x \in \Pi} c(x)$$

et ce pour toute coupe Π de A.

Si Π est une coupe de A, définissons la *capacité totale* de Π, notée $C(\Pi)$ par

$$C(\Pi) = \sum_{x \in \Pi} c(x).$$

On vient de prouver que pour tout flot θ circulant dans A, on a

$$str(\theta) \leq \inf_{\Pi \text{ coupe de } A} C(\Pi).$$

On peut maintenant énoncer le théorème du max-flow = min-cut :

Théorème du max-flow = min-cut. *Il existe un flot θ circulant dans A tel que*

$$str(\theta) = \inf_{\Pi \textit{ coupe de } A} \sum_{x \in \Pi} c(x)$$

et donc
$$\max_{\theta \text{ circulant dans } A} str(\theta) = \inf_{\Pi \text{ coupe de } A} \sum_{x\in\Pi} c(x).$$

En particulier, il existe un flot non nul circulant dans A si et seulement si
$$\inf_{\Pi \text{ coupe de } A} \sum_{x\in\Pi} c(x) > 0$$

Démonstration. Montrons d'abord par récurrence sur n le lemme suivant :

Lemme 2.3. *Il existe un flot θ_n vérifiant*
$$str(\theta_n) = \inf_{\Pi\leq S_n(A)} C(\Pi)$$

et tel que $\theta_n(x) \leq c(x)$ pour tout x de hauteur inférieure à n.

Démonstration. Si $n = 0$, on a $\inf_{\Pi\leq S_n(A)} C(\Pi) = c(s)$, et n'importe flot vérifiant $\theta(s) = c(s)$ convient.
Supposons maintenant la propriété vraie au rang $n-1$. Soient $s_1,\ldots s_k$ les fils de s. Par hypothèse de récurrence, soit θ_i un flot sur A_{s_i} vérifiant $str(\theta_i) = \inf\{C(\Pi), \Pi \text{ coupe de } A_{s_i}, \Pi \leq S_{n-1}(A_{s_i})\}$.
Posons θ le flot sur A tel que θ coïncide avec θ_i sur chaque A_{s_i}. On a alors $\theta(s) = \theta_1(s_1) + \ldots + \theta_n(s_n)$.

- Si $\theta_1(s_1) + \ldots + \theta_k(s_k) \leq c(s)$, comme $\theta(s) = \theta_1(s_1) + \ldots + \theta_k(s_k) \leq c(s)$, on a bien $\theta(x) \leq c(x)$ pour tout x de hauteur inférieure à n. Maintenant, puisque toute coupe de A distincte de $\{s\}$ s'écrit comme la réunion de coupes de chaque A_{s_i}, on a :
$$\begin{aligned}
& \inf\{C(\Pi), \Pi \text{ coupe de } A, \Pi \leq S_n(A)\} \\
= \;& \min\left(c(s), \inf\{C(\Pi_1\cup\ldots\cup\Pi_k) : \Pi_i \text{ coupe de } A_{s_i}, \Pi_i \leq S_{n-1}(A_{s_i})\}\right) \\
= \;& \min\left(c(s), \sum_{i=1}^{k} \inf\{C(\Pi_i), \Pi_i \text{ coupe de } A_{s_i}, \Pi_i \leq S_{n-1}(A_{s_i})\}\right) \\
= \;& \min\left(c(s), \sum_{i=1}^{k} str(\theta_i)\right) = \theta_1(s_1) + \ldots + \theta_k(s_k) = \theta(s)
\end{aligned}$$

  On a bien
$$str(\theta) = \inf\{C(\Pi), \Pi \text{ coupe de } A, \Pi \leq S_n(A)\}$$

– Si $c(s) \leq \theta_1(s_1) + \ldots + \theta_k(s_k)$, posons

$$\theta' = \frac{c(s)}{\theta_1(s_1) + \ldots + \theta_k(s_k)}\,\theta$$

On a alors $\theta'(s) = c(s)$, et pour tout $x \in A_{s_i}$ de hauteur inférieure à n dans A, $\theta'(x) \leq \theta_i(x) \leq c(x)$. Maintenant, si $\Pi \leq S_n(A)$ est une coupe distincte de $\{s\}$, on a vu que $C(\Pi) \geq \theta_1(s_1) + \ldots + \theta_k(s_k)$ Donc $C(\Pi) \geq c(s)$. Par conséquent, $\inf\{C(\Pi), \Pi \text{ coupe de } A, \Pi \leq S_n(A)\} = c(s) = \theta'(s) = str(\theta')$

ce qui clot la preuve. □

Pour tout n, soit donc θ_n un flot sur A vérifiant

$$str(\theta_n) = \inf_{\Pi \leq S_n(A)} C(\Pi)$$

et tel que $\theta_n(x) \leq c(x)$ pour tout x de hauteur inférieure à n. Il est clair que pour tout n, pour tout x, on a $\theta_n(x) \leq \theta_n(s) \leq c(s)$. La suite θ_n est uniformément bornée. Comme A est dénombrable, on peut extraire par un procédé diagonal une sous-suite θ_{n_k} qui converge simplement. Soit f sa limite. Comme A est localement fini, la loi des noeuds passe à la limite simple : f est bien un flot sur A. De plus, Si $x \in A$ est tel que $|x| = N$ alors et donc

$$\forall k \geq N, \theta_k(x) \leq c(x)$$

d'où $f(x) \leq c(x)$. Ainsi f circule dans A.
Enfin, pour toute coupe Π, il existe n tel que $\Pi \leq S_n(A)$ car Π est finie. On a donc

$$\begin{aligned} f(s) &= \lim_{k \to +\infty} \theta_k(s) \\ &= \lim_{k \to +\infty}\downarrow \inf\{C(\Pi), \Pi \text{ coupe de } A, \Pi \leq S_k(A)\} \\ str(f) &= \inf\{C(\Pi), \Pi \text{ coupe de } A\} \end{aligned}$$

□

2.3 Indice de branchement

Nous allons ici introduire une notion particulièrement importante dans l'étude de la géométrie des arbres.

2.3.1 Définition et propriétés

Pour $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, on définit

$$\begin{aligned} m(\lambda) &= \liminf_{\substack{\Pi \text{ coupe de } A \\ |\Pi| \to +\infty}} \sum_{x \in \Pi} \lambda^{-|x|} \\ &= \lim_{n \to +\infty} \inf \left\{ \sum_{x \in \Pi} \lambda^{-|x|} : \Pi \text{ coupe de } A, |\Pi| \geq n \right\}. \end{aligned}$$

La fonction m est décroissante, à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}_+}$.

Soit α tel que $m(\alpha) < +\infty$. Pour tout $\lambda > \alpha$, pour tout Π tel que $|\Pi| \geq n$, on a

$$\sum_{x \in \Pi} \lambda^{-|x|} = \sum_{x \in \Pi} \left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^{|x|} \alpha^{-|x|} \leq \left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^n \sum_{x \in \Pi} \alpha^{-|x|}$$

et donc

$$m(\lambda) \leq \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^n m(\alpha) = 0.$$

De même, soit β tel que $m(\beta) > 0$. Pour tout $\lambda < \beta$, on a $m(\lambda) = +\infty$.

Il existe donc au plus un λ tel que $0 < m(\lambda) < +\infty$. On peut maintenant définir l'indice de branchement d'un arbre :

Définition 2.3. Soit A un arbre. On appelle *indice de branchement* de A, noté $br(A)$, le nombre

$$\begin{aligned} br(A) &= \sup \left\{ \lambda \mid \liminf_{\substack{\Pi \text{ coupe de } A \\ |\Pi| \to +\infty}} \sum_{x \in \Pi} \lambda^{-|x|} = +\infty \right\} \\ &= \inf \left\{ \lambda \mid \liminf_{\substack{\Pi \text{ coupe de } A \\ |\Pi| \to +\infty}} \sum_{x \in \Pi} \lambda^{-|x|} = 0 \right\} \end{aligned}$$

Remarquons que si A est un arbre régulier p-aire (i.e. tous les sommets on le même nombre de fils p), alors l'indice de branchement de A est p. L'indice de branchement décrit en un certain sens le nombre moyen de fils d'un sommet de l'arbre.

2.4 Un cas particulier de marche aléatoire

On s'intéresse maintenant au cas particulier où les capacités des sommets de A valent $c(x) = \lambda^{-|x|}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

La marche aléatoire associée à cet arbre a pour fonction de transition

$$\begin{aligned} Q(x,y) &= \frac{\lambda}{\lambda+n} \quad \text{si } y \text{ est le père de } x \\ &= \frac{1}{\lambda+n} \quad \text{si } y \text{ est un fils de } x \\ &= 0 \quad \text{sinon} \end{aligned}$$

où n est le nombre de fils de x.

Remarque 2.2. On peut remarquer que si λ augmente, la probabilité de "descendre" diminue. Par conséquent, si pour λ_1 la marche aléatoire est récurrente, alors pour $\lambda > \lambda_1$ elle l'est aussi. Réciproquement si pour λ_2 la marche aléatoire est transiente, alors pour $\lambda < \lambda_2$ elle l'est aussi.

On peut maintenant énoncer le théorème principal de ce mémoire :

Théorème 3. *Considérons la marche aléatoire définie précédemment sur l'arbre A. Si $\lambda > brA$, alors la marche aléatoire est récurrente, et si $\lambda < brA$, alors celle ci est transiente.*

Pour le démontrer, énonçons un corollaire du théorème 2.

Lemme 2.4. *Soit A un arbre, avec des conductances c. Si la marche aléatoire sur (A,c) est transiente, alors :*

$$\lim_{\Pi\to\infty} \sum_{\sigma\in\Pi} c(\sigma) = \infty \tag{1}$$

Réciproquement, si on a une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs telle que $\sum_{n\geq 1} w_n < \infty$, et que

$$\liminf_{\Pi\to\infty} \sum_{\sigma\in\pi} w_{|\sigma|} c(\sigma) > 0 \tag{2}$$

alors la marche aléatoire sur (A,c) est transiente.

Démonstration. Si la marche aléatoire est transiente, alors d'après le théorème 2 il existe un flot θ unitaire d'énergie finie. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$1 = \left(\sum_{\sigma\in\Pi} \theta(\sigma)\right)^2 \leq \left(\sum_{\sigma\in\Pi} c(\sigma)\right)\left(\sum_{\sigma\in\Pi} \theta^2(\sigma)c(\sigma)^{-1}\right)$$

Sachant que $\sum_{\sigma\in\Pi} \theta^2(\sigma)c(\sigma)^{-1} \to 0$, car $\sum_{\sigma\in V(G)} \theta^2(\sigma)c(\sigma)^{-1} \to 0$, on obtient l'équation (1).

Réciproquement, si l'équation (2) est vérifiée, alors le théorème du max-flow=min-cut assure l'existence d'un flot θ non nul vérifiant $\theta(\sigma) \leq w_{|\sigma|}c(\sigma)$. Ce flot est d'énergie finie car :

$$\begin{aligned}\sum_{0\neq\sigma\in\Pi} \theta^2(\sigma)c(\sigma)^{-1} &= \sum_{n\geq 1}\sum_{\sigma\in S_n} \theta(\sigma)(\theta(\sigma)c(\sigma)^{-1}) \\ &\leq \sum_{n\leq 1} w_n \sum_{\sigma\in S_n} \theta(\sigma) \\ &\leq \sum_{n\leq 1} w_n < \infty\end{aligned}$$

Ce qui permet de conclure grace au théorème 2. □

Nous pouvons maintenant démontrer facilement le théorème.

Démonstration. Si la marche aléatoire est transiente alors d'après l'équation (1) du lemme précédent, on a

$$\lim_{\Pi\to\infty} \sum_{\sigma\in\Pi} \lambda^{-|\sigma|} = \infty$$

Ainsi $\lambda \leq \mathrm{br}A$.

Réciproquement, si $\lambda < \mathrm{br}A$, prenons λ_0 dans $]\lambda, \mathrm{br}A[$. Alors la suite $w_n = (\lambda\lambda_0^{-1})^n$ vérifie l'équation (2) du lemme précédent. La marche aléatoire est donc transiente. □

En conclusion, nous allons expliquer brièvement le rapport entre l'indice de branchement d'un arbre et sa dimension de Hausdorff.

2.5 Dimension de Hausdorff d'un arbre

Soit A un arbre. On munit l'ensemble $\partial_\infty A$ des chemins injectifs infinis partant de la racine de la distance d définie par

$$d((x_n),(y_n)) = e^{-\sup\{k|x_k=y_k\}}.$$

La distance d est ultramétrique, et $(\partial_\infty A, d)$ est compact. On appelle alors dimension de Hausdorff de l'arbre A la dimension de Hausdorff de $(\partial_\infty A, d)$.

Rappelons ce qu'est la dimension de Hausdorff d'un espace métrique.

Définition 2.4. Pour $s, \varepsilon > 0$ et B borélien de E on pose

$$\mu_s^{(\varepsilon)}(B) = \inf \left\{ \sum_{i \in I} \mathrm{diam}(A_i)^s : (A_i)_{i \in I} \in R_\varepsilon(B) \right\},$$

où $R_\varepsilon(B)$ est l'ensemble des recouvrements de B par des boréliens de E de diamètre inférieur ou égal à ε. La mesure de Hausdorff de dimension s de B est alors définie par

$$\mu_s(B) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mu_s^{(\varepsilon)}(B).$$

Proposition 2.5. *La dimension de Hausdorff de l'espace métrique* $(\partial_\infty A, d)$ *est donnée par*

$$\dim_h(\partial_\infty A) = \ln(br(A)).$$

Démonstration. Montrons tout d'abord que $\dim_h(\partial_\infty A) \leq \ln(br(A))$. On se donne $s > \ln(br(A))$. Soient $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $e^{-n} \leq \varepsilon$. Soient Π_n la coupe composée des sommets de A à distance n de la racine et $(A_i)_{i \in I}$ l'ensemble des boules formées par les chemins passant par ces sommets. On a $(A_i)_{i \in I} \in R_\varepsilon(\partial_\infty A)$. Ainsi

$$\mu_s^{(\varepsilon)}(\partial_\infty A) \leq \sum_{x \in \Pi_n} e^{-sn}.$$

Or par définition de $br(A)$ on a

$$\liminf_{n \to \infty} \sum_{x \in \Pi_n} e^{-sn} = 0.$$

Ainsi $\mu_s(\partial_\infty A) = 0$ c'est-à-dire que $\dim_h(\partial_\infty A) \leq s$. On a donc montré que

$$\dim_h(\partial_\infty A) \leq \ln(br(A)).$$

Montrons à présent que $\dim_h(\partial_\infty A) \geq \ln(br(A))$. Pour cela on énonce le lemme suivant.

Lemme 2.6. *Soient* (E, d) *un espace métrique et* $s > 0$. *On suppose qu'il existe une mesure* ν *sur* (E, d) *telle que* $\nu(E) > 0$ *et telle que pour tout* B *borélien de* E,

$$\nu(B) \leq C\,\mathrm{diam}(B)^s,$$

où C *est une constante strictement positive. Alors* $\dim_h(E) \geq s$.

Admettons le lemme 2.6 pour l'instant et donnons nous un réel $s < \ln(br(A))$. Par définition de $br(A)$ on peut trouver une coupe Π de A telle que

$$\sum_{x\in\Pi} e^{-s|x|} > 0.$$

Ainsi, d'après le théorème du max-flow = min-cut, on peut trouver un flot non nul θ tel que

$$\theta(x) \leq e^{-s|x|}.$$

Pour tout sommet x de A, on note B_x l'ensemble des chemins passant par x. Posons pour tout x sommet de A,

$$\nu(B_x) = \theta(x).$$

La fonction ν est additive sur l'ensemble des B_x. Par la propriété de flot, elle se prolonge donc en une mesure sur $\partial_\infty A$. Soient B un borélien de $\partial_\infty A$ de diamètre $d < 1$ et $c \in B$. Soient $n \in \mathbb{N}$ tel que $e^{-n-1} < d \leq e^{-n}$ et le sommet x du chemin c de hauteur n. Alors $B \subset B_x$. Ainsi

$$\nu(B) \leq \nu(B_x) = \theta(x) \leq e^{-sn} \leq e^s d^s.$$

La mesure ν vérifie donc les hypothèses du lemme 2.6. Ainsi $\dim_h(E) \geq s$. On a donc montré que

$$\dim_h(\partial_\infty A) \geq \ln(br(A)).$$

□

Démonstration. On démontre maintenant le lemme 2.6 : Soient $\varepsilon > 0$ et $(A_i)_{i\in I} \in R_\varepsilon(E)$. On a

$$\sum_{i\in I} \operatorname{diam}(A_i)^s \geq \frac{1}{C}\sum_{i\in I} \nu(A_i) \geq \frac{1}{C}\nu\left(\cup_{i\in I} A_i\right) \geq \frac{\nu(E)}{C}.$$

Ainsi

$$\mu_s^{(\varepsilon)}(E) \geq \frac{\nu(E)}{C}$$

puis

$$\mu_s(E) \geq \frac{\nu(E)}{C}.$$

Cela implique que $\dim_h(E) \geq s$. □

Références

[1] Russel Lyons and Yuval Peres, *Probability on trees and networks*, 2005

[2] Russel Lyon, *Random walks and percolation on trees*, in The Annals of Probability, 1990, Vol.18, No. 3, 931-958

Nous tenons à remercier Mathilde Weill pour nous avoir aidés, soutenus, surveillés, mais pas pour autant tués au travail !