Modules sur l'algèbre de Weyl et division des distributions

Hugues Auvray
Vincent Thouard

Sujet proposé par François Loeser

Juin 2006

Table des matières

Introduction

On s'intéresse à la résolution d'EDP où l'on cherche des solutions au sens des distributions tempérées. Typiquement, si $P(\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_n})$ est un opérateur différentiel portant sur n variables, à coefficients constants, on cherche à résoudre $Pu = v$ où v est une distribution tempérée donnée. On commence par chercher une solution élémentaire, i.e. une distribution E, si possible tempérée, vérifiant :

$$PE = \delta_0 \tag{1}$$

Dès que le produit de convolution $E \star v$ est défini (par exemple v à support compact), $Pu = v$ admet pour solution $u = E \star v$. Puisqu'on travaille avec des distributions tempérées, on peut faire usage de la transformation de Fourier. L'équation (1) est équivalente, après une telle transformation, à l'équation

$$\widehat{P}.\widehat{E} = 1$$

où $\widehat{P}$ est l'opérateur de multiplication par un polynôme en les variables $\xi_1, \ldots, \xi_n$ duales de Fourier de $x_1, \ldots, x_n$. Modulo une transformée de Fourier inverse, la résolution de notre problème se ramène alors à la **division de la distribution constante égale à** 1 **par un polynôme**.

L'existence d'une distribution E solution fondamentale pour un opérateur à coefficients constants a été prouvé dans les années 50 par Malgrange et Ehrenpreis. D'autre part, en 1972, J.N. Berstein publie une autre solution plus algébrique que nous allons développer. A ce stade nous devons introduire la transformation de Mellin dans le but de diviser 1 par un polynôme $f \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$, que l'on suppose ≥ 0 (on peut remplacer f par f^2, car si on sait diviser par f^2, on sait diviser par f). Lorsque $s \in \mathbb{C}$, on peut définir f^s sur $\{f > 0\}$ par $f^s = \exp(s \log f))$, qui se prolonge par continuité par $f^s = 0$ sur $\{f = 0\}$ si Ré(s)>0. Etant donnée une fonction φ C^∞ à support compact, ou plus généralement à décroissance rapide à l'infini, la fonction

$$I_\varphi : s \longmapsto \int_{\mathbb{R}^n} f^s \varphi(x) dx \tag{2}$$

est holomorphe (théorèmes habituels) dans le demi-plan Ré(s)>0. On se pose alors la question suivante : est-il possible de prolonger cette fonction en une fonction méromorphe de s sur un domaine contenant le point $s = -1$? Si la réponse est positive, on vérifie que l'application qui à φ associe le terme constant du développement de Laurent en $s = -1$ de la fonction prolongée est une distribution solution de notre problème de division.
Comment est-il possible d'obtenir un tel prolongement ? Prenons l'exemple de la fonction Γ ; celle-ci est définie par

$$\Gamma(s) = \int_{\mathbb{R}} t^{s-1} e^{-t} dt$$

pour Ré$(s)>0$; sur ce domaine, Γ satisfait à $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$, ce qui permet de poser pour Ré$(s)>-1$, $\Gamma(s) = \frac{1}{s}\Gamma(s+1)$, qui est bien un prolongement méromorphe de Γ ; en itérant le procédé, on prolonge Γ à $\mathbb{C}$ tout entier. Ce phénomène se généralise, on a en effet le :

Théorème 1 *La fonction définie pour Ré(s)>0 par l'expression (2) se prolonge en une fonction mérmorphe sur $\mathbb{C}$ et l'ensemble des pôles est contenu dans une réunion d'ensemble $\{\nu - n, n \in \mathbb{N}\}$, où ν parcourt une ensemble fini de nombres complexes indépendants du choix de la fonction φ.*

Donnons les idées de démonstration de ce théorème, avant de rentrer dans le coeur de l'exposé : l'ingrédient essentiel pour obtenir une équation du type de celle vérifiée par Γ est l'intégration par partie, par rapport à d/dt. Pour la fonction I_φ, on cherche à fabriquer un ersatz de l'opérateur $\partial/\partial f$, qui n'existe *a priori* que si f est une coordonnée. Plus précisément, on cherche un opérateur $Q(s, x, \partial_x)$ qui satisfasse sur $\{f > 0\}$, et pour tout s dans $\mathbb{C}$, à la relation

$$Q(s, x, \partial_x)(f^{s+1}) = (s+1)f^s$$

En général, les coefficients de Q ont des pôles en s et, en éliminant les dénominateurs, on réécrit cette relation sous la forme

$$P(s, x, \partial_x)(f^{s+1}) = (s+1)\tilde{b}(s)f^s = b(s)f^s \tag{3}$$

où $b(s) \in \mathbb{R}[s]$ est non nul et P un opérateur différentiel linéaire. On utilise ensuite la notion d'adjoint P^* d'un opérateur différentiel P défini de la manière suivante : si g est suffisamment régulière (de classe C^d où d est l'ordre maximum de dérivation intervenant dans P) et φ C^∞ à support compact, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^n} P(g)\varphi dx = \int_{\mathbb{R}^n} gP^*(\varphi)dx$$

qui est l'analogue de l'intégration par parties, où tous les termes intégrés sont nuls puisque φ est à support compact. P^* est également un opérateur différentiel. On pose alors pour Ré$(s)>-1$:

$$I_\varphi^{(>-1)}(s) = \frac{1}{b(s)} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)^{s+1} P^*(s, x, \partial_x)(\varphi)dx$$

On vérifie que ceci est bien un prolongement méromorphe de I_φ, en réitérant le procédé on obtient un prolongement sur $\mathbb{C}$ tout entier.
Il s'avère que l'existence d'une équation fonctionnelle (3) est un résultat purement algébrique concernant certains modules sur l'algèbre de Weyl.

1 Algèbre de Weyl

1.1 Définition

On travaille sur un corps $\boldsymbol{k}$ de caractéristique 0, par exemple $\boldsymbol{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1 *L'**algèbre de Weyl** à n variables sur $\boldsymbol{k}$, notée $A_n(\boldsymbol{k})$, est l'algèbre des opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux, c'est-à-dire le quotient de l'algèbre libre engendrée par les algèbres de polynômes $\boldsymbol{k}[x_1, \dots, x_n]$ et $\boldsymbol{k}[\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n}]$ par l'idéal bilatère engendré par les relations $[\partial_{x_i}, x_j] = \delta_{ij}$.*

Pour tous multi-indices α et β de $\mathbb{N}^n$, on note classiquement $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ et $\partial_x^\beta = \partial_{x_1}^{\beta_1} \dots \partial_{x_n}^{\beta_n}$. Ainsi tout élément de $A_n(\boldsymbol{k})$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$\sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} x^\alpha \partial_x^\beta$$

avec $a_{\alpha,\beta} \in \boldsymbol{k}$. Il faut prendre garde aux règles de multiplication, on a par exemple

$$\partial_{x_i} \cdot x_i = x_i \cdot \partial_{x_i} + 1$$

L'algèbre $A_n(\boldsymbol{k})$ n'est pas commutative, de plus elle agit naturellement sur elle-même à gauche ou à droite, sur $\boldsymbol{k}[x_1, \dots, x_n, 1/f]$ l'algèbre des fractions rationnelles dont le dénominateur divise une puissance d'un polynôme donné f.

Puisque $A_n(\boldsymbol{k})$ n'est pas commutative, il est nécessaire de considérer trois types d'idéaux.

1.2 Propriétés algébriques

Proposition 1 *Il n'y a pas d'idéal bilatère propre, i.e. l'algèbre $A_n(\boldsymbol{k})$ est simple.*

Preuve. L'idée est d'utiliser la non-commutativité, et de faire chuter le degré puis l'ordre d'un opérateur P d'un tel idéal I non nul en écrivant les crochets $[P, \partial_{x_i}]$, puis $[P, x_i]$, qui sont dans I puisque c'est un idéal bilatère.

On s'intéresse donc aux idéaux à gauche (ou à droite).

Proposition 2 *L'algèbre $A_n(\boldsymbol{k})$ est noethérienne, i.e. les idéaux (à gauche ou à droite) sont de type fini.*

Preuve. Un résultat analogue est vrai pour les algèbres de polynômes, on va donc essayer de s'y ramener.

Il est maintenant utile d'introduire la notion de *filtration* sur $A_n(\boldsymbol{k})$: $F_p(A_n(\boldsymbol{k}))$ est l'ensemble des opérateurs de la forme

$$\sum_{\alpha} \sum_{\beta, |\beta| \leq p} a_{\alpha,\beta} x^\alpha \partial_x^\beta$$

c'est-à-dire le sous-espace des opérateurs d'ordre $\leq p$. On a $F_0 = \boldsymbol{k}[x_1, \dots, x_n]$, $F_p \subset F_q$ pour $p \leq q$, $\bigcup_p F_p = A_n(\boldsymbol{k})$ et enfin

$$F_p \cdot F_q = F_{p+q} \tag{4}$$

où le terme de gauche désigne l'ensemble des sommes de produits d'éléments de F_p et F_q. Ceci implique en particulier que F_p est un module sur F_0 (à gauche et à droite) et on voit qu'il est libre de type fini (de base les ∂_x^β pour $|\beta| \leq p$).

Lemme 1 *L'algèbre graduée $gr^F A_n(\boldsymbol{k})$ est égale à l'algèbre des polynômes $\boldsymbol{k}[x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n]$, où ξ_i est la classe de ∂_{x_i} dans le quotient F_1/F_0.*

Preuve du lemme. On définit l'algèbre graduée $gr^F A_n(\boldsymbol{k})$ par $\oplus_p gr_p^F$, avec $gr_p^F = F_p/F_{p-1}$, en convenant que $F_{-1} = 0$. Les propiétés de la filtration en font bien une algèbre, et l'égalité (4) montre qu'elle est engendrée par les ξ_i. La commutativité vient du fait que le classe du commutateur $[\partial_{x_i}, x_i]$ est nulle dans F_1/F_0.

Revenons à la preuve de la proposition 2. Si P est dans $A_n(\boldsymbol{k})$, on définit son ordre relativement à la filtration F comme le plus petit p tel que $P \in F_p$. Son symbole $\sigma(P)$ est alors la classe de P dans F_p/F_{p-1}. C'est un polynôme homogène de degré p en ξ, donc de la forme $\sum_{\{|\beta|=p\}} a_\beta(x)\xi^\beta$. L'ensemble des symboles des éléments de I engendre un idéal $\sigma(I)$ de $\boldsymbol{k}[x,\xi]$ qui a la propriété suivante : un élément est dans $\sigma(P)$ ssi chacun des termes homogènes qui le composent est dans $\sigma(I)$. $\boldsymbol{k}[x,\xi]$ étant noethérien, on peut extraire du système de générateurs $(\sigma(P))_{P\in I}$ une famille finie $(\sigma(P_i))_{i=1,\ldots,r}$ qui engendre $\sigma(I)$. On vérifie alors que I est engendré par $P_1, \ldots, P_r$: si $P \in I$, $\sigma(P)$ s'écrit $\sum_{i=1}^r Q_i(x,\xi)\sigma(P_i)$, où $Q_i \in \boldsymbol{k}[y_1, \ldots, y_{2n}]$ que l'on peut supposer homogène en ses n dernières variables (i.e. $Q_i(x,\xi)$ est homogène en ξ) de degré $d-q_i$, avec q_i le degré de $\sigma(P_i)$. Alors $P(x,\partial_x) - \sum_{i=1}^r Q_i(x,\partial_x)P_i(x,\partial_x)$ est un élément de I qui possède un symbole de degré strictement inférieur à celui de P, ce qui permet de conclure par récurrence. Ceci achève la preuve de la proposition 2.

Introduisons une autre filtration intéressante, celle de Bernstein, qui exploite le fait que l'anneau des coefficients est aussi naturellement filtré par le degré. Pour $p \in \mathbb{N}$, on note $B_p(A_n(\boldsymbol{k}))$ l'ensemble des opérateurs de la forme

$$\sum_{\alpha,\beta,|\alpha|+|\beta|\leq p} a_{\alpha,\beta} x^\alpha \partial_x^\beta$$

Chaque B_p est un $\boldsymbol{k}$-ev de dimension finie et la propriété (4) est encore satisfaite. On montre de plus que le gradué gr^B associé à cette filtration est encore $\boldsymbol{k}[x,\xi]$ pour les mêmes raisons.

2 Modules de type fini sur l'algèbre de Weyl et polynôme de Hilbert associé à une bonne filtration

2.1 Modules de type fini sur l'algèbre de Weyl

On va maintenant s'intéresser aux modules de type fini sur notre algèbre noethérienne $A_n(\boldsymbol{k})$, qui interviennent de façon cruciale pour établir une équation du type (3).
Soit donc M un $A_n(\boldsymbol{k})$-module à gauche. Il n'y a, en général, pas de notion naturelle de symbole d'un élément de M. On peut remédier à ce problème à l'aide de la notion de *bonne filtration* relativement à la filtration F (ou à la filtration B, définition analogue).

Définition 2 *Une* ***bonne filtration*** *de M relativement à F est une filtration croissante exhaustive $(F_kM)_{k\in\mathbb{Z}}$ satisfaisant aux propriétés suivantes :*
- *$F_kM = 0$ pour $k \ll 0$*
- *$F_lA_n(\boldsymbol{k}) \cdot F_kM \subset F_{k+l}M$ pour tous k et l, en particulier F_kM est un module sur $F_0A_n(\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{k}[x]$ et le gradué $gr^F M$ est un module sur l'anneau gradué $gr^F A_n(\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{k}[x, \xi]$*
- *il existe k_0 tel qu'il y ait égalité dans l'inclusion ci-dessus pour tout $k \geq k_0$ et tout $l \geq 0$*
- *F_kM est de type fini sur $F_0A_n(\boldsymbol{k})$*

Remarque 1 *On peut montrer que les deux dernières conditions sont en fait équivalente à la suivante :*
- *le module gradué $gr^F M$ est un module de type fini sur l'algèbre des polynômes $gr^F A_n(\boldsymbol{k})$*

Remarque 2 *Dans la définition analogue pour les filtrations de type B, le quatrième point dit que B_kM est de type fini sur $B_0A_n(\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{k}$, i.e. est un $\boldsymbol{k}$-ev de dimension finie.*

On décide ensuite que les éléments de M d'ordre $\leq k$ sont les éléments de F_kM.
Si M est engendré par $m_1, \dots, m_r$, on construit une bonne filtration relativement à F en posant

$$F_kM = \sum_{i=1}^{r} F_kA_n(\boldsymbol{k}) \cdot m_i$$

Les générateurs sont alors d'ordre 0 et on peut modifier cette définition pour leur donner un ordre arbitraire l_i dans $\mathbb{N}$. Il existe ainsi un grand nombre de bonnes filtration qu'il paraît donc important de comparer.

Proposition 3 *Deux bonnes filtrations sont comparables, au sens où, étant données deux bonnes filtrations F et F' de M, il existe un entier k_0 tel que pour tout k, on ait $F_kM \subset F'_{k_0+k}M$ et $F'_kM \subset F_{k_0+k}M$.*

Preuve. Cette propriété s'obtient en prenant un nombre un nombre fini de générateurs de $F_{k_1}M$ et de $F'_{k_2}M$ puis en exprimant les uns en fonction des autres (prendre k_1 et k_2 tels qu'il y ait égalité dans le point 2 de la définition 2).

Proposition 4 *Le module à gauche M admet une bonne filtration ssi il est de type fini sur $A_n(\boldsymbol{k})$. Supposons que ce soit le cas et soit F une bonne filtration. Alors :*

1. *si M' est un sous-module à gauche de M, la filtration $F_\bullet M' := F_\bullet M \cap M'$ respecte les points 1 et 2 de la définition 2 ;*
2. *si M'' est un quotient de M, la filtration $F_\bullet M''$ image de celle de M par la projection $M \to M''$ est bonne ;*
3. *si on a une suite exacte courte $0 \to M' \xrightarrow{a} M \xrightarrow{b} M'' \to 0$ de modules à gauches, on en déduit une suite exacte pour ces filtrations précisément*
$$0 \to gr^F M' \to gr^F M \to gr^F M'' \to 0$$

Preuve. La suffisance est claire puisque si on se donne un nombre fini de générateurs $m_1, \ldots, m_r$ de M, on obtient une bonne filtration comme on l'a vu plus haut. Reciproquement, si $F_\bullet M$ est une bonne filtration, un système de générateurs de $F_{k_0}M$ sur $F_0 A_n(\boldsymbol{k})$ en est aussi un pour M sur $A_n(\boldsymbol{k})$.
Les points 1 et 2 se vérifient aisément. Le point 3 de la proposition ne pose pas de difficultés, en remarquant qu'il suffit de construire une suite exacte courte entre les composantes de rang k de chacun des gradués ci-dessus, en se servant de la suite exacte courte donnée initialement.

Corollaire 1 *Si le module à gauche M admet une bonne filtration F et si M' est un sous-module à gauche de M, la filtration $F_\bullet M' := F_\bullet M \cap M'$ est une bonne filtration de M', en particulier M' est de type fini.*

Preuve. On sait par la proposition précédente que $gr^F M'$ est un sous-module du $\boldsymbol{k}[x, \xi]$-module $gr^F M$. Ce dernier étant de type fini (Remarque 1) et $\boldsymbol{k}[x, \xi]$ étant noethérien, on en déduit que $gr^F M'$ est un $\boldsymbol{k}[x, \xi]$-module de type fini et donc que la filtration $F_\bullet M'$ est bonne.

2.2 Polynôme de Hilbert associé à une bonne filtration

Les résultats ci-dessus s'appliquent aussi aux filtrations de type B. Nous allons maintenant exploiter le fait que, pour une bonne filtration $B_\bullet M$, la dimension de $B_k M$ est finie.

Proposition 5 *Soit $B_\bullet M$ une bonne filtration d'un $A_n(\boldsymbol{k})$-module M de type fini non nul. Il existe un unique polynôme d'une variable $H_{M,B}(t)$, tel que pour tout k assez grand, on ait $\dim B_k M = H_{M,B}(k)$.*
Soit $d \geq 0$ le degré de ce polynôme. Alors le terme de degré d est égal à $\frac{m}{d!}t^d$, avec m entier naturel non nul et ne dépend pas de la bonne filtration choisie sur M.

Définition 3 *Le polynôme $H_{M,B}$ est le* ***polynôme de Hilbert*** *de la bonne filtration. Son degré $d = d(M)$ est la* ***dimension*** *de M, et le coefficient $m = \mathrm{mult}(M)$ est la* ***multiplicité*** *de M.*

Remarque 3 *Ici, le mot* ***dimension*** *est à prendre au sens géométrique : il ne s'agit pas de la dimension d'un espace vectoriel car en tant que tel, M n'est pas de dimension finie en général.*

Remarque 4 *Dire que $d(M) = 0$, c'est dire que, pour une (ou toute) bonne filtration $B_\bullet M$, la dimension $\dim B_j M$ est constante dès que j est assez grand. Puisque la filtration est exhaustive, c'est que $M = B_j M$ pour un certain j. Ceci est équivalent au fait que M est un $\boldsymbol{k}$-ev de dimension finie. Cette dimension n'est alors autre que $\mathrm{mult}(M)$.*

Preuve de la proposition 5. Généralisant la notion de bonne filtration, posons

$$B_k gr^B M = \oplus_{l \leq k} gr_l^B M$$

c'est une bonne filtration du $\boldsymbol{k}[x, \xi]$-module gradué $gr^B M$ et l'on a de manière évidente

$$\dim B_k M = \dim B_k gr^B M$$

On peut donc appliquer le résultat d'algèbre commutative, dont la démonstration est suffisamment détaillée à la fin de l'article de C. Sabbah, pour conclure que $\dim B_k M$ est un polynôme en k pour k assez grand, dont le terme dominant a la forme voulue.
Etant données deux bonnes filtrations B et B' de M, il existe un entier k_0 tel que pour tout l on ait

$$B_l M \subset B'_{k_0+l} M \text{ et } B'_l M \subset B_{k_0+l} M$$

donc, pour tout l assez grand, on a

$$H_{M,B}(l) \leq H_{M,B'}(k_0 + l) \text{ et } H_{M,B'}(l) \leq H_{M,B}(k_0 + l)$$

ce qui donne immédiatement l'indépendnce du terme de plus haut degré du polynôme $H_{M,B}$ vis-à-vis de la bonne filtration.

Proposition 6 *Si $M = A_n(\boldsymbol{k})$, alors $d(M) = 2n$ et $\mathrm{mult} M = 1$. Si $M = \boldsymbol{k}[x]$, alors $d(M) = n$ et $\mathrm{mult} M = 1$.*

Preuve. On va traiter le cas de $\boldsymbol{k}[x]$. Tout revient au calcul de la dimension du sev des polynômes de degré $\leq k$ à n variables. Pour dénombrer les monômes de degré exactement k, il s'agit de trouver le nombre de solutions dans $\mathbb{N}$ de l'équation : $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = k$. Pour cela considérons $n + k - 1$ symboles indéterminés $|$. En en choisissant $n-1$ qui deviendront des $+$, on réécrit bien l'équation dont on cherche le nombre de solutions. C'est donc le nombre de

choix possibles pour placer ces $+$, soit C_{n+k-1}^{n-1}. Le nombre de monômes de degré $\leq k$, et donc $\dim B_k M$, est alors $\sum_{l=0}^{k} C_{n+l-1}^{n-1} = C_{n+k}^{n}$, qui est un polynôme en k dont le terme de plus haut degré permet de conclure.
Dans le cas de $A_n(\boldsymbol{k})$, où l'on dénombre encore les monômes de degré $\leq k$, mais à $2n$ variables, il suffira donc de remplacer n par $2n$.

Ces notions (multiplicité et dimension) trouvent leur utilité dans le résultat suivant :

Corollaire 2 *Soit* $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ *une suite exacte courte de* $A_n(\boldsymbol{k})$*-modules de type fini. On a alors* $d(M) = \max(d(M'), d(M''))$*. Si les trois dimensions sont égales, on a de plus* $\mathrm{mult}(M) = \mathrm{mult}(M') + \mathrm{mult}(M'')$*. Si par exemple* $d(M') < d(M'')$*, on a* $\mathrm{mult}(M) = \mathrm{mult}(M'')$*.*

Preuve. On choisit une bonne filtration $B_\bullet M$, et on considère les bonnes filtrations induites $B_\bullet M'$ et $B_\bullet M''$ (proposition 4 et corollaire 1). On sait alors (penser à la suite exacte courte $0 \to gr^B M' \to gr^B M \to gr^B M'' \to 0$) que, pour tout k :

$$0 \to B_k M' \to B_k M \to B_k M'' \to 0$$

Ce qui donne :

$$\dim B_k M = \dim B_k M' + \dim B_k M''$$

et permet de conclure en identifiant le terme de plus haut degré des polynômes $H_{M,B}$, $H_{M',B}$ et $H_{M'',B}$ qui apparaissent alors.

3 Modules holonomes

3.1 Inégalité de Bernstein et définition

On va maintenant voir l'importante inégalité de Bernstein :

Théorème 2 *Soit* $M \neq 0$ *un* $A_n(\boldsymbol{k})$*-module de type fini. On a alors :*

$$d(M) \geq n$$

Preuve. On fixe une bonne filtration $B_\bullet M$, avec $B_0 M \neq 0$. On va se servir du :

Lemme 2 *L'application* $\boldsymbol{k}$*-linéaire*

$$\begin{array}{rcl} B_i A_n(\boldsymbol{k}) & \longrightarrow & Hom_{\boldsymbol{k}}(B_i M, B_{2i} M) \\ P & \longmapsto & (m \mapsto Pm) \end{array}$$

est injective.

Preuve du lemme 2. Elle se fait par récurrence sur i : le cas $i = 0$ résulte de l'hypothèse faite sur B_0M. Soit $i \geq 1$ et $0 \neq P \in B_iA_n(\boldsymbol{k})$, et supposons que pour tout $m \in B_iM$, on ait $Pm = 0$. On ne peut avoir par hypothèse de récurrence $P \in B_{i-1}A_n(\boldsymbol{k})$. Il apparaît donc effectivement dans P un monôme contenant contenant x_j ou ∂_{x_j} pour un $j \in \{1, \ldots, n\}$. Supposons que ce soit x_j. On a vu que $[P, \partial_{x_j}] \in B_{i-1}A_n(\boldsymbol{k})$ est non nul (on ne perd qu'un degré en j), et alors il existe $m \in B_{i-1}M \subset B_{i-1}M$ tel que $[P, \partial_{x_j}]m \neq 0$. On aboutit à une contradiction, puisque $Pm = 0$, et $P(\partial_{x_j}m) = 0$, puisque $\partial_{x_j}m \in B_iM$.

Considérons le polynôme de Hilbert $H_{M,B}$. Le lemme montre que pour tout i assez grand on a

$$\begin{aligned} H_{A_n(\boldsymbol{k}),B}(i) = \dim B_iA_n(\boldsymbol{k}) &\leq \dim Hom_{\boldsymbol{k}}(B_iM, B_{2i}M) \\ &= \dim B_iM \cdot \dim B_{2i}M \\ &= H_{M,B}(i)H_{M,B}(2i) \end{aligned}$$

et par suite (à l'aide de la proposition 6)

$$2n = \deg H_{A_n(\boldsymbol{k}),B} \leq 2 \deg H_{M,B} = 2d(M)$$

Définition 4 *Un $A_n(\boldsymbol{k})$-module M de type fini est dit* ***holonome*** *si $M = 0$ ou si $M \neq 0$ et $d(M) = n$.*

Corollaire 3 *Tout sous-module (resp. tout quotient) d'un module holonome est encore holonome.*

Preuve. En considérant une suite exacte courte

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

avec M holonome et si aucun des modules n'est nul, on a les inégalités $d(M), d(M') \geq n$ et d'autre part $n = d(M) = \max(d(M'), d(M''))$ (corollaire 2). Donc les trois dimensions sont égales à n.

Les modules holonomes ressemblent beaucoup aux espaces vectoriels de dimension finie. On a par exemple le

Corollaire 4 *Les modules holonomes sont de longueur finie.*

Preuve. Il s'agit de montrer que toute suite strictement décroissante pour l'inclusion de sous-modules d'un module holonome M a une longueur bornée par un entier ne dépendant que du module M. Le plus petit entier qui convient est appelé **longueur** du module.
L'idée est d'exploiter la décroissance de la multiplicité dans une suite strictement décroissante de sous-modules d'un module holonome. La suite des multiplicités est donc stationnaire, propriété qui se transpose aux modules

correspondant (nous renvoyons à la preuve détaillée dans l'article de C. Sabbah).

Il n'est pas évident en général de décider si un module donné est de type fini. Le théorème qui suit fournit pour cela un critère très efficace. Un espace vectoriel E est de dimension finie ssi il existe un entier d tel que tout sous-espace de dimension finie $E' \subset E$ soit de dimension $\leq d$. On va faire ici un raisonnement analogue.

Théorème 3 *Soit M un $A_n(\boldsymbol{k})$-module (pas nécessairement de type fini). Si M admet une filtration exhaustive $B_\bullet M$ (pas nécessairement bonne) satisfaisant pour tout k à*

1. $B_l A_n(\boldsymbol{k}) \cdot B_k M \subset B_{k+l} M$ *pour tout* l
2. $B_k M = 0$ *si* $k \ll 0$
3. $\dim B_k M \leq \frac{c_0}{n!} k^n + c_1(k+1)^{n-1}$*, où* c_0 *et* c_1 *sont deux entiers* ≥ 0

alors M est holonome et $\mathrm{mult} M \leq c_0$*. En particulier M est de type fini.*

Preuve. Soit N un sous-module de type fini de M et $B_\bullet N$ une bonne filtration de N. Soit k_0 tel que pour tout $l \geq 0$ on ait $B_{k_0+l} N = B_l A_n(\boldsymbol{k}) \cdot B_{k_0} N$. $B_{k_0} N$ est de type fini donc il existe k_0' tel que ses générateurs soient tous dans $B_{k_0+k_0'} M$ (filtration exhaustive) et alors $B_{k_0} N \subset B_{k_0+k_0'} M$. Ainsi pour tout $k \geq k_0$ on a, par la propriété 1 de $B_\bullet M$, l'inclusion $B_k N \subset B_{k+k_0'} M$. Grace à l'inégalité 3 on a $d(N) \leq n$, et donc $d(N) = n$ par l'inégalité de Bernstein. Autrement dit N est holonome. De plus on a aussi $\mathrm{mult} N \leq c_0$. Considérons une suite croissante de sous-modules de type fini de M :

$$N_0 \subset N_1 \subset \cdots \subset M$$

Ils sont tous holonomes et la suite des multiplicités est aussi croissante (corollaire 2). Puisqu'elle est majorée par c_0 elle stationne disons à partir de l'entier j. Considérons la suite exacte

$$0 \to N_j \to N_{j+1} \to N_{j+1}/N_j \to 0$$

Tous ces modules sont holonomes et on a $\mathrm{mult} N_{j+1} = \mathrm{mult} N_j + \mathrm{mult}(N_{j+1}/N_j)$. Par définition de j on a $\mathrm{mult}(N_{j+1}/N_j) = 0$, et donc $N_{j+1}/N_j = 0$ puisque la multiplicité est toujours strictement positive si le module est non nul (c'est un coefficient dominant). En d'autres termes $N_{j+1} = N_j$; toute suite croissante de sous-modules est donc stationnaire de multiplicité $\leq c_0$. Considérons alors la suite croissante (N_j) définie par :

- $N_0 = 0$
- $N_{j+1} = \langle N_j, m_{j+1} \rangle$ où $m_{j+1} \in M - N_j$ si $N_j \neq M$, $N_{j+1} = M$ sinon

Cette suite est stationnaire ; $M = N_j$ pour un certain j. M est donc holonome, de multiplicité $\leq c_0$.

Ce critère va alors nous être très utile pour établir l'équation fontionnelle de Bernstein, et obtenir l'existence du polynôme $b(s)$ recherché. Posons alors $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{k}(s)$.

3.2 Un $A_n(\boldsymbol{K})$-module holonome : $\boldsymbol{K}[x, 1/f]^{(s)}$

Soit f un polynôme dans $\boldsymbol{k}[x]$. On peut « tordre » la structure de $A_n(\boldsymbol{K})$-module sur $\boldsymbol{K}[x, 1/f]$ par f^s, c'est-à-dire qu'on définit une nouvelle action de $A_n(\boldsymbol{K})$ sur $\boldsymbol{K}[x, 1/f]$ par la formule

$$P \bullet (h) = f^{-s} \cdot P \cdot f^s(h)$$

Le facteur f^s n'a qu'un signification formelle ici. Si on préfère s'en passer, on définit l'action de ∂_{x_i} sur la fraction rationnelle h par

$$\partial_{x_i} \bullet (h) = \frac{\partial h}{\partial x_i} + s\frac{\partial f/\partial x_i}{f} \cdot h$$

ce qu'on notera aussi

$$\partial_{x_i} \bullet = \partial_{x_i} + s\partial_{x_i}(\log f)$$

la multiplication par un polynôme en $s, x_1, \ldots, x_n$ restant inchangée. On vérifie sans difficultés que cette nouvelle action des dérivations donne bien une structure de module sur l'algèbre de Weyl.
On note $\boldsymbol{K}[x, 1/f]^{(s)}$ ce « nouveau » $A_n(\boldsymbol{K})$-module. On remarquera que, en tant qu'ensemble, et même en tant que $\boldsymbol{K}[x]$-module, il ne diffère en rien de $\boldsymbol{K}[x, 1/f]$.

Lemme 3 *Le $A_n(\boldsymbol{K})$-module $\boldsymbol{K}[x, 1/f]^{(s)}$ est holonome.*

Preuve. Il s'agit bien sûr d'utiliser le théorème 3. Posons $\delta = \deg f$. Considérons la filtration suivante de $\boldsymbol{K}[x, 1/f]^{(s)}$:

$$B_k\boldsymbol{K}[x, 1/f]^{(s)} = \{g/f^k, g \in \boldsymbol{K}[x] \text{ et } \deg g \leq (\delta + 1)k\}$$

Ainsi les éléments de B_k sont les fractions rationnelles de degré $\leq k$ et d'ordre du pôle $\leq k$.
Toute fraction rationnelle est dans l'un des B_k : si la fraction s'écrit h/f^j, elle s'écrit aussi hf^l/f^{j+l} ; on peut choisir l assez grand pour que $\deg h + l\delta \leq (\delta + 1)(j + l)$. Ainsi la filtration B est exhaustive. Bien évidemment, on a $B_k = 0$ pour $k < 0$.
Montrons que la propriété 1 du théorème 3 est satisfaite : il suffit de le voir pour la multiplication par x_i et la dérivation $\partial_{x_i}\bullet$; si $g/f^k \in B_k$, alors $x_i g/f^k \in B_{k+1}$, puisque $x_i g/f^k = x_i fg/f^{k+1}$ et $\deg(x_i fg) = \delta + 1 + \deg g \leq (\delta + 1)(k + 1)$; de même,

$$\partial_{x_i} \bullet (g/f^k) = \frac{f\partial_{x_i} g + (s - k)g\partial_{x_i} f}{f^{k+1}}$$

et le degré de chacun des termes du numérateur est $< (\delta+1)(k+1)$.
Il reste enfin à considérer la propriété 3 du théorème 3. La dimension de B_k est la dimension de l'ensemble des polynômes g de degré $\leq (\delta+1)k$ à n variables, donc c'est $C^n_{n+(\delta+1)k}$, qui s'écrit $(\delta+1)^n k^n/n! + \cdots$. Ceci achève la preuve du lemme.

3.3 Équation fonctionnelle de Bernstein

Nous pouvons maintenant démontrer l'existence d'un équation du type (3). En effet : considérons la suite décroissante des sous-modules M_j de $\boldsymbol{K}[x,1/f]^{(s)}$ engendrés (en tant que $A_n(\boldsymbol{K})$-module) par f^j $(j \geq 0)$: un élément de M_j est combinaison à coefficients dans $\boldsymbol{K}[x]$ de termes

$$f^{-s}\big(\partial_{x_1}^{\alpha_1}\dots\partial_{x_n}^{\alpha_n}\big)(f^{s+j})$$

Celle-ci est stationnaire (corollaire 4). Il existe donc k tel que $M_{k+1} = M_k$ et par suite il existe un opérateur $Q \in A_n(\boldsymbol{K})$ tel que

$$f^k = Q(s, x, \partial_x + s\partial_x(\log f))(f^{k+1})$$

En réduisant les coefficients de Q au même dénominateur par rapport à s, on trouve un polynôme non nul $\tilde{b}(s) \in \boldsymbol{k}[s]$ et un opérateur $\tilde{P} \in \boldsymbol{k}[s,x]\langle\partial_x\rangle$ tels que l'on ait

$$\tilde{b}(s)f^k = \tilde{P}(s, x, \partial_x + s\partial_x(\log f))(f^{k+1})$$

Ecrivons

$$\tilde{P}(s, x, \partial_x + s\partial_x(\log f)) = \sum a_{\alpha,\beta}(s)x^\alpha f^{-s}\partial_x^\beta f^s$$

où les $a_{\alpha,\beta}(s)$ sont des polynômes en s, de sorte que

$$\begin{aligned}\tilde{P}(f^{k+1}) &= \Big(\sum a_{\alpha,\beta}(s)x^\alpha f^{-s}\partial_x^\beta f^{s+k}\Big)f \\ &= f^k\Big(\sum a_{\alpha,\beta}(s)x^\alpha f^{-(s+k)}\partial_x^\beta f^{s+k}\Big)f\end{aligned}$$

soit donc

$$\tilde{b}(s)f^k = f^k\tilde{P}(s, x, \partial_x + (s+k)\partial_x(\log f))f$$

Ainsi, en divisant par f^k les deux membres de la relation précédente, ce qui est possible dans $\boldsymbol{K}[x,1/f]$, on trouve

$$\tilde{b}(s) = \tilde{P}(s, x, \partial_x + (s+k)\partial_x(\log f))f$$

et en posant

$$b(s) = \tilde{b}(s-k) \text{ et } P(s, x, \partial_x + s\partial_x(\log f)) = \tilde{P}(s-k, x, \partial_x + s\partial_x(\log f))$$

on obtient

$$b(s) = P(s, x, \partial_x + s\partial_x(\log f))(f)$$

ce qui donne exactement la relation voulue avec $\boldsymbol{k} = \mathbb{R}$.

Définition 5 *Le polynôme unitaire de degré minimal tel qu'une telle relation ait lieu s'appelle* ***polynôme de Bernstein*** *de f.*

Conclusion

On a traité ici le problème de la recherche d'une solution **fondamentale** de notre EDP qui permet sous certaines conditions de résoudre le problème général, mais il est parfois nécessaire de chercher un solution au problème général directement sans passer par la solution fondamentale. Le problème devient alors le suivant : **diviser une distribution tempérée donnée par un polynôme**. Ce dernier se résoud en généralisant ce qui a été fait dans ce dossier.

On notera que la résolution de notre problème analytique se fait par un procédé purement algébrique.

Le contenu de ce dossier repose particulièrement sur l'article de C. Sabbah disponible sur www.math.polytechnique.fr/xups/volumes.html. Nous avons essayé de nous concentrer sur la partie algébrique en éclaircissant certains points sans toutefois reprendre les démonstrations déjà suffisamment détaillées.