Principes du Maximum et Méthode du Plan Tournant

Paul Cazeaux - Gilles Thouroude
encadrés par Raphaël Côte

29 juin 2006

Table des matières

Pour étudier les solutions d'équations ou d'inéquations formées par des opérateurs du second ordre elliptique on dispose d'un certain nombre de principes du maximum, avec des hypothèses plus ou moins fortes.

Ceux-ci peuvent servir d'outils pour étudier la forme des solutions de ces équations, la méthode du plan tournant en est l'exemple : grâce à ces principes on va montrer, en faisant bouger des plans jusqu'a des positions critiques, la symétrie radiale des solutions de :

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) = 0 \ \text{ sur } B(0,R), \\ u = 0 \ \text{ sur } \partial B(0,R), \end{cases} \tag{1}$$

lorsque f appartient à $C^1(\mathbb{R} \to \mathbb{R})$;

Pour ce faire nous allons d'abord nous intéresser à des fonctions harmoniques et à certaines de leurs propriétés, puis nous exposerons quelques uns des principes du maximum. Enfin, nous exposerons la méthode du plan tournant.

1 Les fonctions harmoniques

1.1 Fonctions harmoniques C^∞

Nous allons travailler dans cette partie dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$.

Définition 1. Une fonction $u : \Omega \to \mathbb{R}$ est dite harmonique si elle est dans $C^\infty(\Omega)$ et qu'elle vérifie l'équation $\Delta u = 0$

Nous commencerons par donner des caractérisations des fonctions harmoniques. Pour cela, nous montrerons l'équivalence entre le fait que la fonction soit harmonique, et le fait qu'elle vérifie la propriété de la valeur moyenne.

Définition 2. Une fonction $u : \Omega \to \mathbb{R}$ de $C(\Omega)$ vérifie la propriété de la valeur moyenne si et seulement si :

$$\forall B(x,R) \subset \Omega : \quad u(x) = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B(x,R)} u(y)\, \mathrm{d}S_y \tag{2}$$

$$\Leftrightarrow \forall B(x,R) \subset \Omega : \quad u(x) = \frac{n}{\omega_n R^n} \int_{B(x,R)} u(y)\, \mathrm{d}y, \tag{3}$$

où ω_n est l'aire de la sphère unité de $\mathbb{R}^n$

Remarque 1. On peut remarquer que l'on peut passer d'une égalité à l'autre dans la définition 3 par simple dérivation (ou intégration) selon R.

Théorème 1. *soit $u : \Omega \to \mathbb{R}$, u harmonique $\Rightarrow$ u vérifie la propriété de la valeur moyenne.*

Démonstration. Comme u est harmonique, $\forall B(x,r) \subset \Omega$ $\int_{B(x,r)} \Delta u(y)\, \mathrm{d}y = 0$ Or, en utilisant la formule de Green on a :

$$\int_{B(x,r)} \Delta u(y)\, \mathrm{d}y = \int_{\partial B(x,r)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\, \mathrm{d}S_y$$

$$\Rightarrow \int_{B(x,r)} \Delta u(y)\,\mathrm{d}y = r^{n-1} \int_{\|\omega\|} \frac{\partial u}{\partial R}(x + r\omega)\,\mathrm{d}S_y \tag{4}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial r}\left(\int_{\|\omega\|} u(x + r\omega)\mathrm{d}S_\omega \right) = 0,$$

on peut alors intégrer de 0 à R ce qui donne :

$$\int_{\|\omega\|} u(x + R\omega)\,\mathrm{d}S_\omega = \int_{\|\omega\|} u(x)\,\mathrm{d}S_\omega,$$

d'où :

$$\omega_n \cdot u(x) \int_{\|\omega\|} u(x + R\omega)\,\mathrm{d}S_\omega = \frac{1}{R^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} u(y)\,\mathrm{d}S_y.$$

□

En réalité, il y a même équivalence entre les deux notions.

Théorème 2. *Soit $u : \Omega \to \mathbb{R}$ dans $C(\Omega)$. Si u vérifie la propriété de la valeur moyenne alors u est harmonique, en particulier u est C^∞.*

Démonstration. Soit $\phi \in C^\infty$ à support dans $B(0,1)$ tel que $\int_{B(0,1)} \phi = 1$ et $\phi(x) = \psi(\|x\|)$, d'où :

$$\omega_n \int_0^1 r^{n-1}\psi(r)\,\mathrm{d}r = 1.$$

Soit $\phi_\epsilon(z) = \frac{1}{\epsilon^n}\phi(\frac{z}{\epsilon})$ pour $\epsilon > 0$. Soit $x \in \Omega$ et $\epsilon < dist(x, \partial\Omega)$. Alors :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega u(y)\phi_\epsilon(y - x)\,\mathrm{d}y &= \int u(x + y)\phi_\epsilon(y) \\
&= \frac{1}{\epsilon^n} \int_{\|y\|<\epsilon} u(x + y)\phi(\frac{y}{\epsilon})\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{\|y\|<1} u(x + \epsilon y)\phi(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 r^{n-1}\,\mathrm{d}r \int_{\partial B(0,1)} u(x + \epsilon rw)\phi(rw)\,\mathrm{d}S_w \\
&= \int_0^1 r^{n-1}\psi(r), \mathrm{d}r \int_{\partial B(0,1)} u(x + \epsilon rw)\,\mathrm{d}S_w \\
&= u(x)\omega_n \int_0^1 r^{n-1}\psi(r), \mathrm{d}r \\
&= u(x).
\end{aligned}$$

Donc $u(x) = (\phi_\epsilon * u)(x)\ \ \forall x \in \{y \in \Omega; dist(y, \partial\Omega) > \epsilon\}$. Ceci donne la régularité de u.

De plus, la formule (4) donne que :

$$\begin{aligned}\int_{B(0,r)} \Delta u &= r^{n-1}\frac{\partial}{\partial r}\int_{\|w\|} u(x+rw)\,\mathrm{d}S_w \\ &= r^{n-1}\frac{\partial}{\partial r}(\omega_n u(x)) \\ &= 0,\end{aligned}$$

et ceci $\forall B(x,r) \subset \Omega$. Donc $\Delta u = 0$ dans Ω □

Remarque 2. Si u est C^2 et vérifie $\Delta u = 0$ alors u est harmonique. En effet u vérifie la propriété de la valeur moyenne (il ne suffit que de C^2 dans la démonstration) et donc u est harmonique (et C^∞)

1.2 Fonctions harmoniques à régularité a priori plus faible

Nous allons maintenant montrer une autre caractérisation des fonctions harmoniques. Par intégration par partie on peut remarquer que $\int \Delta u\,\varphi = 0\ \forall\,\varphi \in C_0^2(\Omega)$. On peut remarquer qu'on peut alors définir une notion d'harmonicité dans $\mathcal{D}$ en prenant la réciproque.

Théorème 3. *Soit $u \in \mathcal{D}'$ tel que :*

$$\int_\Omega u\Delta\varphi = 0 \quad \forall\varphi \in\ D(\Omega), \tag{5}$$

alors u est harmonique.

Démonstration. Nous allons commencer par démontrer que :

$$r\int_{\partial B(x,r)} u(y)\,\mathrm{d}S_y = n\int_{B(x,r)} u(y)\,\mathrm{d}y \quad \forall B(x,r)\subset\Omega.$$

En fait cette égalité est une condition nécessaire (on le voit facilement avec la propriété de la valeur moyenne) et suffisante pour que u soit harmonique. On peut supposer que $x = 0$, quitte à faire une translation, pour simplifier les calculs.

Si $n \geq 3$ alors posons la fonction :

$$\varphi(y,r) = \begin{cases} (\|y\|^2 - r^2)^n & \|y\| \leq r, \\ 0 & \|y\| > r. \end{cases}$$

On a alors que :

$$\Delta_y\varphi(y,r) = \begin{cases} 2n((\|y\|^2 - r^2)^{n-1}(2(n-1)\|y\|^2 + n(\|y\|^2 - r^2))) & \|y\| \leq r, \\ 0 & \|y\| > r. \end{cases}$$

Donc, en posant :

$$\varphi_k = (\|y\|^2 - r^2)^{n-1}(2(n-k+1)\|y\|^2 + n(\|y\|^2 - r^2)),$$

on a :

$$\Delta_y \varphi(y,r) = \begin{cases} 2n\varphi_2 & \|y\| \leq r, \\ 0 & \|y\| > r. \end{cases}$$

par hypothèse, on a : $\int_B (0,r) u(y)\varphi_2(y,r)\,\mathrm{d}y = 0$. Montrons par récurrence que :

$$\int_{B(0,r)} u(y)\varphi_k(y,r)\,\mathrm{d}y = 0 \ \ \forall\, k \in (2,\cdots,n-1).$$

Supposons que cette égalité est vraie au rang k. Si on la différencie par rapport à r on obtient :

$$\int_{\partial B(0,r)} u(y)\varphi_k(y,r)\,\mathrm{d}y + \int_{B(0,r)} u(y)\frac{\partial\varphi_k}{\partial r}(y,r)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Or $\frac{\partial\varphi_k}{\partial r}(y,r) = (-2r)(n-k+1)\varphi_{k+1}(y,r)$ et $\varphi_{k|_{\|y\|=r}} \equiv 0$ si $2 \geq k < n$. On a donc démontrer la récurrence. En prenant $k = n-1$ on obtient :

$$\int_{B(0,r)} u(y)((n+2)\|y\|^2 - nr^2)\,\mathrm{d}y = 0 \quad \forall\, r \text{ tel que } B(0,r) \subset \Omega.$$

Si on différencie par rapport à r on obtient :

$$\int_{\partial B(0,r)} u(y)((n+2)r^2 - nr^2)\,\mathrm{d}y - 2nr\int_{4B(0,r)} u(y)\,\mathrm{d}y = 0, \quad \forall\, r \text{ tel que } B(0,r) \subset \Omega.$$

On a donc le résultat voulu.

Démontrons maintenant le théorème :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\Big(\frac{1}{\omega_n r^{n-1}}\int_{\partial B(x,r)} u(y)\,\mathrm{d}y\Big) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\Big(\frac{n}{\omega_n r^n}\int_{B(x,r)} u(y)\,\mathrm{d}y\Big) \\
&= \frac{n}{\omega_n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\Big(\frac{-n}{r^{n+1}}\int_{B(x,r)} u(y)\,\mathrm{d}y + \frac{1}{r^n}\int_{\partial B(x,r)} u(y)\,\mathrm{d}y\Big) = 0
\end{aligned}$$

Donc $\frac{1}{\omega_n r^{n-1}}\int_{\partial B(x,r)} u(y)\,\mathrm{d}y$ est constant et il tend vers $u(x)$ quand r tend vers 0. u vérifie donc la propriété de la valeur moyenne, donc est harmonique. □

Nous avons donc vu que si une fonction de faible régularité vérifie la propriété de la valeur moyenne, elle est C^∞

1.3 Principe du maximum fort pour les fonctions harmoniques

Nous allons démontrer le principe du maximum fort pour des fonctions harmoniques.

Théorème 4. *Soit u harmonique et Ω un ouvert connexe. On a l'alternative :*
- *u est constant.*
- *u atteint son maximum et son minimum sur le bord de Ω*

Démonstration. Nous allons démontrer le résultat pour le maximum seulement, la démonstration pour le minimum étant identique. Posons

$$\Sigma = \left\{ x \in \Omega; u(x) = M = \max_{y \in \overline{\Omega}} u(y) \right\}.$$

Nous allons montrer que Σ est à la fois ouvert et fermé dans Ω, ce qui impliquera que Σ est soit vide, soit égal à Ω. Σ est relativement fermé de façon évidente. Montrons qu'il est ouvert. Soit $x_0 \in \Sigma$ et $r > 0$ tel que $\overline{B}(x_0, r) \in \Omega$. Alors la propriété de la valeur moyenne donne que :

$$M = u(x_0) = \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{B(x_0,r)} u(y)\,\mathrm{d}y \leq M \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{B(x_0,r)} \mathrm{d}y = M.$$

Ceci implique que $u \equiv M$ sur $B(x_0, r)$, et donc Σ est ouvert dans Ω. □

1.4 Applications

L'harmonicité de la fonction permet aussi d'avoir des résultats dans des domaines non bornés.

Théorème 5. *Si la fonction* $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *est harmonique et majorée ou minorée alors elle est constante.*

Pour démontrer ce résultat nous allons utiliser le lemme suivant :

Lemme 6. *Si u est harmonique sur* $\overline{B(x_0, R)}$ *alors :*

$$|Du(x_0)| \leq \frac{n}{R} u(x_0).$$

Démonstration. Si u est harmonique alors Du l'est aussi. Alors on a :

$$D_{x_i} = \frac{n}{\omega_n R^n} \int_{B(x_0,R)} u(y)\,\mathrm{d}y.$$

Donc, en appliquant la formule de Stokes :

$$D_{x_i} = \frac{n}{\omega_n R^n} \int_{\partial B(x_0,R)} u(y)\nu_i\,\mathrm{d}y,$$

d'où, si $u \geq 0$:

$$|D_{x_i}| \leq \frac{n}{\omega_n R^n} \int_{\partial B(x_0,R)} u(y)\,\mathrm{d}y.$$

Donc, en appliquant la propriété de la valeur moyenne à u :

$$D_{x_i} \leq \frac{n}{R} u(x_0).$$ □

Démonstration du théorème 5. On peut supposer, quitte à ajouter une constante et à transformer u en $-u$ que u est positive. Alors, pour tout x de $\mathbb{R}^n$ on peut appliquer le lemme 6 à $B(x, R)$. En faisant tendre R vers l'infini on obtient que $Du(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. □

Nous allons maintenant voir une application du principe du maximum pour les fonctions harmoniques qui va permettre de borner $u(x)$ en fonction de $u(y)$.

Théorème 7 (Inégalité d'Harnack)**.** *Soit K un compact inclus dans Ω ouvert. Si u est positive et harmonique sur Ω alors : $\exists$ C tel que $\forall$ x,$y \in K$:*

$$\frac{1}{C}u(y) \leq u(x) \leq Cu(y).$$

Démonstration. Montrons l'inégalité dans $B(x_0, R)$ si $B(x_0, 5R) \subset \Omega$. Soit $x, y \in B(x_0, R)$. Supposons que $\left\|x - y\right\| \leq \frac{R}{8}$. Comme u est harmonique :

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n \left\|x - y\right\|^{n-1}} \int_{\partial B(x,R)} u(y)\, \mathrm{d}S_y.$$

Donc

$$u(x) \leq (\frac{8}{R})^{n-1} \max_{z \in B(x,R)} u(z).$$

Or, le principe du maximum pour les fonctions harmoniques donne que $u(y)$ est non nul pour tout y dans $B(x, R)$ car le minimum est positif par hypothèse, et est atteint sur les bords de Ω. Or $B(x, r) \subset B(x_0, 4R)$ d'où $dist(B(x, R), \partial\, \Omega) > 0$. Donc :

$$u(x) \leq \Big(\frac{8}{R}\Big)^{n-1} \max_{z \in B(x_0,4R)} u(z) \cdot \frac{u(y)}{u(y)}$$

$$\Rightarrow u(x) \leq \Big(\frac{8}{R}\Big)^{n-1} \max_{z \in B(x_0,4R)} u(z) \cdot \frac{u(y)}{\min(u(z); z \in B(x_0, 4R))}.$$

De même :

$$u(x) \geq (\frac{8}{R})^{n-1} \cdot \frac{u(y)}{u(y)}$$

$$\Rightarrow u(x) \geq (\frac{8}{R})^{n-1} \min_{z \in B(x_0,4R)} u(z) \cdot \frac{u(y)}{\max(u(z); z \in B(x_0, 4R))}.$$

Donc, en prenant

$$C = \max\Big(\Big(\frac{8}{R}\Big)^{n-1}, \Big(\frac{R}{8}\Big)^{n-1}\Big) \frac{\max(u(z); z \in B(x_0, 4R))}{\min(u(z); z \in B(x_0, 4R))},$$

on a la bonne égalité.

Si $\left\|x - y\right\| \leq \frac{R}{8}$,$\exists z \in B(x, R)$ tel que $\begin{cases} \|x - z\| \geq \frac{R}{8}, \\ \|x - z\| \geq \frac{R}{8}. \end{cases}$

Et alors $\frac{1}{C^2}u(y) \geq u(x) \geq C^2 u(y)$, donc on a l'égalité.

Démontrons maintenant le théorème. Soit $K \subset \Omega$. Soit $R > 0$ tel que $5R < dist(K, \partial\Omega)$.On peut trouver $(x_1, \cdots, x_n)$ tel que $K \subset \bigcup_k B(x_k, R)$. Pour chaque x_k on peut définir C_{x_k} qui vérifie l'inégalité. En posant $C = (\max_{k \in 1, \cdots, n} C_{x_k})^n$ on a, $\forall x, y \in K$:

$$\frac{1}{C}u(y) \geq u(x) \geq Cu(y). \qquad \square$$

2 Principes du maximum et applications

Dans cette partie, nous exposerons une série de principes du maximum, dans la lignée de ceux que l'on trouve sur les fonctions harmoniques ou sous-harmoniques, mais étendus à des opérateurs elliptiques plus généraux que le laplacien Δ. Tout d'abord, on se place sur un domaine Ω borné et connexe, et de plus, on s'intéresse à un opérateur différentiel L qui s'écrit sous la forme

$$Lu = a_{ij}(x)D_{ij}u + b_i(x)u + c(x)u$$

où $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.
Les coefficients a_{ij}, b_i et c sont continus sur $\bar{\Omega}$, et L est elliptique c'est à dire que $a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \lambda|\xi|^2$ pour tout $x \in \Omega$, avec $\lambda > 0$.

2.1 Principe du Maximum faible

Le tout premier principe que l'on obtient est :

Théorème 8 (Principe du Maximum faible)**.** *Soit $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, $Lu \geqslant 0$, avec $c(x) \leqslant 0$ sur Ω.*
Alors si u a un maximum positif, celui-ci est atteint sur $\partial\Omega$.

Pour le démontrer, on va tout d'abord établir un lemme plus précis :

Lemme 9. *Soit $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, $Lu > 0$, avec $c(x) \leqslant 0$ sur Ω.*
Alors si u a un maximum positif, celui-ci ne peut être atteint sur Ω.

Preuve. Supposons que u atteigne un maximum positif en $x_0 \in \Omega$. Alors au point x_0, on a $D_iu(x_0) = 0$ et la matrice $B = (D_{ij}(x))$ est définie semi-négative, or par ellipticité, $A = (a_{ij}(x_0))$ est définie positive, par conséquent AB est définie semi-négative avec une trace négative ou nulle, i.e.

$$a_{ij}(x_0)D_{ij}(x_0) \leqslant 0.$$

Ainsi on a $Lu(x_0) = 0$, c'est absurde. □

Ainsi armé, on peut démontrer le principe du maximum faible :

Preuve du Principe. Il s'agit de se ramener au cas précédent $Lu > 0$ en ajoutant une fonction bien choisie : pour $\epsilon > 0$ considérons

$$w_\epsilon(x) = u(x) + \epsilon \exp(\alpha x_1),$$

où α est choisi pour avoir $Lw > 0$: on a alors

$$Lw_\epsilon = Lu + \epsilon \exp(\alpha x_1)(a_{11}\alpha^2 + b_1\alpha + c).$$

Or b_1 et c sont bornés et $a_{11}(x) \geqslant \lambda > 0$ pour tout $x \in \Omega$, donc en choisissant α assez grand on a :

$$a_{11}\alpha^2 + b_1\alpha + c > 0 \quad \forall x \in \Omega,$$

d'où $Lw > 0$ sur Ω. On peut alors appliquer le lemme à w_ϵ :

$$\sup_\Omega w_\epsilon \leqslant \sup_{\partial\Omega} w_\epsilon^+.$$

Or ceci implique la suite d'inéquations

$$\sup_\Omega u \leqslant \sup_\Omega w_\epsilon \leqslant \sup_{\partial\Omega} w_\epsilon^+ \leqslant \sup_{\partial\Omega} u^+ + \epsilon \sup_{x_1\in\partial\Omega} \exp(\alpha x_1).$$

En faisant tendre ϵ vers 0, on obtient bien le résultat. □

ce principe du maximum faible à des applications, par exemple pour l'unicité de solutions.

Corollaire 10. *Si Ω est borné et si u_1 et u_2 sont deux solutions du problème de Dirichlet dans $\mathcal{D}$:*

$$\begin{cases} \Delta u = f \ \ sur \ \ \Omega, \\ u = \phi \ \ sur \ \ \partial\Omega, \end{cases}$$

avec $f \in \mathcal{D}'$ et $\phi \in \mathcal{D}'$. Alors $u_1 = u_2$.

Démonstration. Soit $w = u_1 - u_2$, w est solution de :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \ \ sur \ \ \Omega, \\ u = 0 \ \ sur \ \ \partial\Omega. \end{cases}$$

Donc w est la fonction nulle car elle est harmonique et son maximum et son minimum valent zéro. D'où $u_1 \equiv u_2$ □

Remarque 3. Ce résultat n'est pas vrai si Ω n'est pas borné.

Le principe ci-dessus ne précise pas où le maximum de u est atteint, au contraire du lemme : c'est l'intérêt du principe du maximum fort, et du lemme de Hopf, qui font l'objet du paragraphe suivant.

2.2 Principe du Maximum fort

Ici, nous commencerons par démontrer le Lemme de Hopf. Celui-ci s'intéresse au comportement de u au voisinage de la frontière :

Lemme 11 (Hopf)**.** *Soit B une boule ouverte de $\mathbb{R}^n$ et $x_0 \in \partial B$, prenons $u \in C^2(B) \cap C(B \cup x_0)$ avec $Lu \geqslant 0$ sur B et $c(x) \leqslant 0$. On suppose que $u(x) < u(x_0) \quad \forall x \in B$, avec $u(x_0) \geqslant 0$. Alors, pour toute direction extérieure $\vec{\nu} \cdot \vec{n}(x_0) > 0$ on a*

$$\liminf_{t\to 0^+} \frac{[u(x_0) - u(x_0 - t\vec{\nu})]}{t} > 0.$$

Un peu comme pour le principe ci-dessus, la démonstration rajoute une fonction h bien choisie à u :

Preuve. Tout d'abord, pour la simplicité, on prend B avec pour centre l'origine, de rayon r, et en prenant éventuellement une boule à l'intérieur, tangente en x_0 à B, $u \in C(\bar{B})$ et $u(x) < u(x_0) \quad \forall x \in (\bar{B} - x_0)$ posons $v = u + \epsilon h$, $\Sigma = B \cap B_{r/2}(x_0)$. On définit

$$h(x) = e^{-\alpha|x|^2} - e^{-\alpha r^2}$$

pour un certain α à choisir. Vérifions d'abord que $Lh > 0$ sur Σ :

$$Lh = e^{-\alpha|x|^2}(4\alpha^2 \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)x_i x_j - 2\alpha \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(x) - 2\alpha \sum_{i=1}^{n} b_i(x)x_i + c) - ce^{-\alpha r^2}$$

$$\geqslant e^{-\alpha|x|^2}(4\alpha^2 \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)x_i x_j - 2\alpha \sum_{i=1}^{n}(a_{ii}(x) + b_i(x)x_i) + c).$$

On utilise ici l'ellipticité de L :

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)x_i x_j \geqslant \lambda|x|^2 \geqslant \lambda(\frac{r}{2})^2 > 0$$

pour x dans Σ. On en déduit pour α assez grand, $Lh > 0$ sur Σ : d'où $Lv > 0$ pour tout choix de ϵ. On sait alors que v ne peut atteindre son maximum positif sur l'intérieur de Σ. on va montrer que pour ϵ petit, ce maximum est atteint en x_0. Examinons v sur la frontière : Tout d'abord, pour x sur la frontière de Σ et dans l'intérieur de B, on a $u(x) < u(x_0) - \delta$ pour δ assez petit, donc pour ϵ tel que $\epsilon h < \delta$ dans cet ensemble,

$$v(x) < u(x_0) \quad \forall x \in \partial\Sigma \cap B.$$

Ensuite, pour x sur la frontière de B et dans Σ, on a $h(x) = 0$ et $u(x) < u(x_0)$ pour x différent de x_0. Donc

$$v(x) < u(x_0) \quad \forall x \in \partial B \cap (\Sigma - x_0)$$

et $v(x_0) = u(x_0)$ On conclut que pour t petit,

$$\frac{v(x_0) - v(x_0 - t\nu)}{t} \geqslant 0,$$

et donc avec t tendant vers 0,

$$\liminf_{t\to 0} \frac{1}{t}[u(x_0) - u(x_0 - t\nu)] \geqslant -\epsilon\frac{\partial h}{\partial \nu}(x_0).$$

Or par définition de h, on a

$$\frac{\partial h}{\partial \nu}(x_0) < 0. \qquad \square$$

On voit alors que pour une fonction $u \in C^2(\Omega) \cup C(\bar{\Omega})$ avec $Lu \geqslant 0$ et $c(x) \leqslant 0$ dans Ω, si on considère S l'ensemble des points de Ω où u atteint son maximum, S est clairement fermé relativement dans Ω : si son complémentaire n'est pas vide, alors on peut trouver une boule ouverte B contenue dans $\Omega - S$ dont un point de la frontière est dans S, soit x. Or on a alors $Lu \geqslant 0$ et $u(x) < u(x_0)$ dans B, on est donc dans les conditions du lemme : d'après le lemme de Hopf appliqué en ce point, on voit que pour une direction extérieure à la boule, $\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}}(x_0) > 0$, ce qui est absurde puisque $\nabla u = 0$ en x qui est un maximum de u. Armé du lemme de Hopf, on a donc montré le

Théorème 12 (Principe du Maximum fort)**.** *Soit $u \in C^2(\Omega) \cup C(\bar{\Omega})$ avec $Lu \geqslant 0$ et $c(x) \leqslant 0$ dans Ω. Alors si u admet un maximum positif, soit u est constante, soit u n'atteint ce maximum que sur $\partial\Omega$.*

Ce principe possède un certain nombre d'applications et de corollaires intéressants : par exemple, on peut citer :

- le principe de comparaison :
  si u vérifie les hypothèses du théorème et $u \leqslant 0$ sur $\partial\Omega$, alors $u \leqslant 0$ sur Ω, et même soit $u < 0$ sur Ω soit u est nulle.
- une certaine extension du lemme de Hopf à des ouverts :
  Si Ω vérifie la propriété de la boule intérieure et si $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ vérifie les hypothèses du principe, alors si u atteint un maximum positif en $x_0 \in \bar{\Omega}$ alors $x_0 \in \partial\Omega$ et pour toute direction extérieure ν en x_0 on a $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0$.
- théorème (Serrin)
  on peut généraliser pour les fonctions négatives à des L tels que c n'est pas nécessairement négatif :
  Soit $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ avec $Lu \geqslant 0$. Si $u \leqslant 0$ sur Ω alors soit $u < 0$ soit u est constante.
  En effet, on peut écrire $Lu = L'u + c^+ u$ avec $L' = a_{ij}D_{ij} + b_i D_i - c^-$, donc $L'u \geqslant 0$ et on se ramène au principe précédent.

Pour finir cette série de principes, on obtient un résultat plus général :

Théorème 13 (Principe du Maximum)**.** *Soit $w \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ avec $w > 0$ sur $\bar{\Omega}$, satisfaisant $Lw \leqslant 0$ sur Ω. Alors si $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ vérifie $Lu \geqslant 0$, $\frac{u}{w}$ ne peut atteindre un maximum positif que sur $\delta\Omega$ sauf si elle est constante. De plus, si ce maximum est atteint en un point x_0, pour toute direction extérieure ν en x_0 on a*

$$\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{u}{w}\right) > 0.$$

Démonstration. Posons $v = \frac{u}{w}$, alors va satisfait

$$a_{ij}D_{ij}v + B_i D_i v + \Big(\frac{(Lw)}{w}\Big)v \geqslant 0$$

en posant $B_i = b_i + \frac{2}{w}a_{ij}D_{ij}w$. On applique alors les principes qui précèdent. □

De plus, il est possible de simplifier des hypothèses, en ajoutant une hypothèse d'étroitesse du domaine Ω. En effet, si on suppose par commodité que $\bar{\Omega}$ est contenu dans $0 < x_1 < d$, la fonction $w = e^{\alpha d} - e^{\alpha x_1}$ est strictement positive sur $\bar{\Omega}$, et on calcule

$$Lw = -(a_{11}\alpha^2 + b_1\alpha)e^{\alpha x_1} + c(e^{\alpha d} - e^{\alpha x_1}) \leqslant -(a_{11}\alpha^2 + b_1\alpha) + Ne^{\alpha d}$$

où l'on a choisi N une constante qui majore les $|b_i|$ et c^+. On peut alors choisir α assez grand pour que

$$a_{11}\alpha^2 + b_1\alpha \geqslant \lambda\alpha^2 - N\alpha \geqslant 2N.$$

Dès lors, $Lw \leqslant N(e^{\alpha d} - 2) \leqslant 0$ si on choisit d assez petit pour que $e^{\alpha d} \leqslant 2$. On vient de montrer que pour des domaines étroits, la fonction w ci-dessus existe toujours :

Théorème 14 (Principe du maximum pour des domaines étroits)**.** *Soit d un réel positif et $\vec{e}$ un vecteur unitaire tel que* $|(y-x)\cdot\vec{(e)}| < d$ *pour tous éléments x et y de* Ω*. Alors il existe* $d_0 > 0$ *qui ne dépend que de* λ *et de la borne sup des* b_i *et de* c^+ *tel que les hypothèses du principe du maximum sont vérifiées si* $d \leqslant d_0$*.*

3 La méthode du plan tournant

3.1 Principe d'Alexandroff

Avec d'autres hypothèses sur L, il existe une seconde lignée de principes du maximum : ici, L n'est plus supposé uniformément elliptique : on suppose juste $A = (a_{ij})$ définie positive en tout point, et on pose les valeurs $D = \det(A)$, $D^* = D^{1/n}$, et on supposera qu'il existe deux réels λ et Λ avec $0 < \lambda \leqslant D^* \leqslant \Lambda$. On aura besoin du concept de l'ensemble de contact supérieur Γ^+ qui est

$$\Gamma^+ = y \in \Omega : u(x) \leqslant u(y) + Du(y)\cdot(x-y) \quad \forall x \in \Omega.$$

Sous ces hypothèses sur L, on peut alors montrer le

Théorème 15 (Principe d'Alexandroff)**.** *On suppose que* $u \in C^2(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$ *vérifie* $Lu \geqslant 0$ *sur* Ω*, et*

$$\tfrac{|b|}{D^*}\,,\ \tfrac{f^2}{D^*} \in L^n(\Omega)\,,\ c \leqslant 0 \textit{ sur } \Omega.$$

Alors on a

$$|sup_{\Omega} u| \leqslant \sup_{\partial\Omega} u^+ + C\cdot\left\|\frac{f^-}{D^*}\right\|_{L^n(\Gamma^+)}$$

où on peut écrire la constante C comme $d\cdot(\exp[\frac{2^{n-2}}{\omega_n n^n}(\left\|\frac{b}{D^*}\right\|^n_{L^n(\Gamma^+)}+1)]-1)$.

Comme pour la première lignée, une intéressante application de ce principe est un principe du maximum pour les petits domaines :

Théorème 16 (Principe du maximum pour les petits domaines)**.** *Soit* $u \in C^2(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$ *qui vérifie* $Lu \geqslant 0$ *sur* Ω*,* $u \leqslant 0$ *sur* $\partial\Omega$ *et diam*$(\Omega) \leqslant d$*. Alors,* $\exists\,\delta(n,\lambda,\Lambda,d) > 0$ *tel que* $|\Omega| \leqslant \delta \Rightarrow u \leqslant 0$ *sur* Ω*.*

Preuve. Pour c négative, on a u négative d'après le principe qui précède, en général on a

$$a_{ij}D_{ij}u + b_iD_iu - c^-u \geqslant c^+u.$$

Donc d'après le principe d'Alexandroff,

$$\sup_{\Omega} u \leqslant c(n,\lambda,\Lambda,d)\|c^+u^+\|_{L^n(\Omega)} \leqslant c(n,\lambda,\Lambda,d)\|c^+\|_{L^\infty}|\Omega|^{1/n}\cdot\sup_{\Omega} u \leqslant \frac{1}{2}\sup_{\Omega} u$$

pour $|\Omega|$ petit. D'où u négative dans Ω. □

3.2 Le problème

Nous allons maintenant utiliser les principes du maximum précédemment décris, en particulier le principe du maximum sur domaine étroit, dans une démonstration qui va s'appuyer sur la méthode du plan tournant qui sera être décrite dans ce qui suit.

Théorème 17. *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction C^1. Soit $u \in C^2(B(0,R)) \cap C(\overline{B}(0,R))$ une solution strictement positive de l'équation :*

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) = 0 \text{ sur } B(0,R), \\ u = 0 \text{ sur } \partial B(0,R). \end{cases}$$

Alors il existe $v : [0,R] \to \mathbb{R}_+$ décroissante tel que $u(x) = v(\|x\|)$.

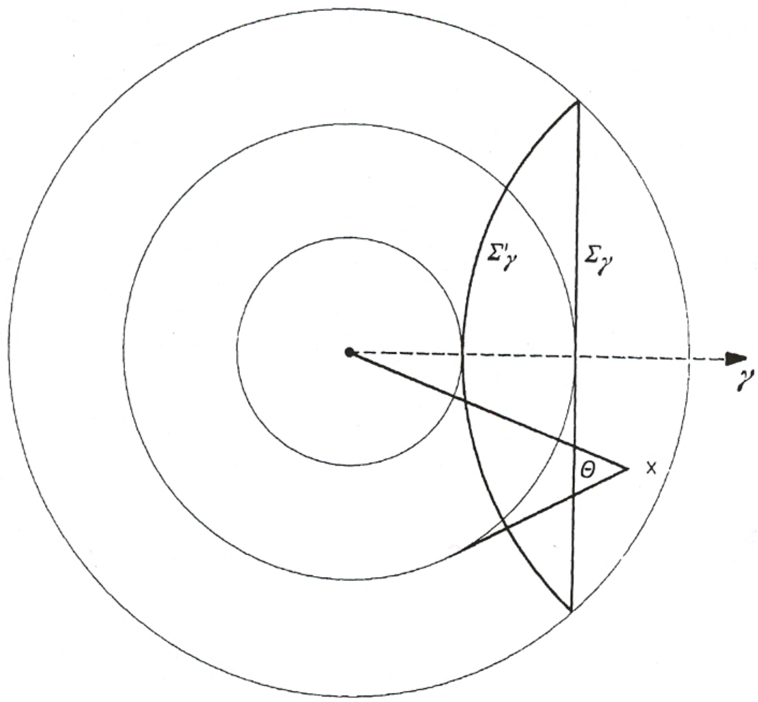
3.3 Principe de la démonstration

Pour la démonstration de ce théorème on va fortement utiliser les propriétés de symétrie de la boule $B(0,r)$, qui est symétrique par rapport à tout hyperplan. Ainsi on va regarder dans une direction et montrer, en utilisant la symétrie par rapport à l'espace orthogonal supplémentaire, que, si on note x la coordonnée dans la direction privilégiée et y la coordonnée dans l'espace orthogonal supplémentaire, $u(x,y) = u(-x,y)$. Puis, étant donné que si deux points sont à même distance du centre ($\|z_1\| = \|z_2\|$) on peut trouver une direction (un vecteur parallèle à $z_2 - z_1$) tel que z_1 est le symétrique de z_2 par une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan on a que $u(z_1) = u(z_2)$. Donc on obtient la symétrie radiale de u en faisant tourner le plan de symétrie.

3.4 Notations

On va commencer par poser des notations. Soit $\lambda \in [0,R]$,et $z = (x,y)$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ posons :

- $\mathrm{T}_\lambda = \{z \in B(0,R), x = \lambda\}$,
- $\Sigma_\lambda = \{z \in B(0,R), x > \lambda\}$ (c'est la partie de la boule à "droite") de T_λ,
- Σ'_λ le symétrique de Σ_λ par rapport àT_λ,
- z_λ le symétrique de$z$par rapport àT_λ,



3.5 Demonstration

Démonstration. On va montrer que $u(x_1, y) < u(x_2, y)$ si $x_1 < x_2$ et $x_1 + x_2 > 0$. par symétrie on obtiendra que $u(x, y) = u(-x, y)$.

Pour cela on va poser la fonction $\omega_\lambda(x) = u(x) - u(x_\lambda)$.

On a alors :

$$\begin{cases} \Delta\omega_\lambda + c(x, \lambda)\omega_\lambda = 0 \\ \omega_\lambda \leq 0 \text{ et } \omega_\lambda \not\equiv 0 \text{ sur} \partial\Sigma_\lambda \end{cases}$$

Montrons que $\omega_\lambda < 0$ sur Σ_λ. Le principe du maximum sur les petits domaines (théorème16) donne que pour λ assez proche de a on a $\omega_\lambda \leq 0$ (on peut l'utiliser car $L\omega_\lambda = \Delta\omega_\lambda + c(x, \lambda)\omega_\lambda = 0$ et c est bornée).

L'extension du principe de comparaison (corollaire du théorème 12) donne le résultat. Soit λ_0 le plus petit λ positif tel que $\omega_\lambda < 0$ sur Σ_λ pour tout $\lambda \in]\lambda_0, a[$ (il existe bien car $c(x, \lambda)$ est bornée et donc, dans le principe du maximum sur les petits domaines on peut utiliser une borne indépendante de λ pour c).

Nous allons montrer que $\lambda_0 = 0$ par l'absurde. Supposons que $\lambda_0 > 0$ alors, par continuité, $\omega_{\lambda_0} \leq 0$ sur Σ_{λ_0} et ω_{λ_0} et non nulle sur $\partial\Sigma_{\lambda_0}$. Le principe du maximum fort donne alors que $\omega_{\lambda_0} < 0$ sur Σ_{λ_0}.

Soit $\delta > 0$, soit K un compact de Σ_{λ_0} tel que $\left|\Sigma_{\lambda_0} \setminus K\right| < \frac{\delta}{2}$

La fonction ω_{λ_0} est continue et strictement négative sur K, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\omega_{\lambda_0} \leq -\eta < 0 \quad \text{sur } K$$

Alors, comme la fonction : $(x, \lambda) \to \omega_\lambda(x)$ est continue sur Σ_λ, il existe ϵ tel que

$$\omega_{\lambda_0 - \epsilon} < 0 \quad \text{sur } K$$

De plus :

$$\left|\Sigma_{\lambda_0-\epsilon} \setminus K\right| < \delta \quad \text{pour } \epsilon \text{ assez petit,}$$

donc le principe du maximum sur des petits domaines (Théorème 16) (on a bien $L\omega_{\lambda_0-\epsilon} \geq 0$ et $\omega_{\lambda_0-\epsilon} \leq 0$ sur $\Sigma_{\lambda_0-\epsilon}$) donne que

$$\omega_{\lambda_0-\epsilon}(x) \leq 0 \quad \text{pour } x \in \Sigma_{\lambda_0-\epsilon} \setminus K,$$

et, par le principe de comparaison :

$$\omega_{\lambda_0-\epsilon}(x) < 0 \quad \text{pour } x \in \Sigma_{\lambda_0-\epsilon} \setminus K.$$

Ceci contredit la définition de λ_0. Donc $\lambda_0 = 0$.

On a donc démontrer que $\forall \lambda > 0$, $\omega_\lambda < 0$ sur Σ_λ, donc $u(z) > u(z_\lambda)$. $\forall x_1 > 0, x_2$ tel que $x_2 < x_1$ et $x_1 + x_2 > 0$, $u(x_1, \lambda) > u(x_2, \lambda)$ car on peut trouver un plan par lequel x_2 et le symétrique x. Par symétrie du raisonnement on a $u(-x, \lambda) = u(x, \lambda)$ □

Remarque 4. Il suffit ici que f soit localement lipschitzienne.

Remarque 5. Il n'est pas nécessaire que f soit C^1. Si f s'écrit $f_1 + f_2$ avec f_1 C^1 et f_2 décroissante (de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$).

Remarque 6. Ce théorème ne donne pas l'existence d'une solution, il dit simplement que s'il y a une solution, elle est radiale.

Remarque 7. Cette généralisation du résultat peut-être utile pour la résolution de problèmes physique où la fonction f peut ne pas être C^1, par exemple dans des problèmes sur les plasmas la fonction f est $-\max(u - 1, 0)$.

Remerciements

Nous tenons à remercier Raphaël Côte.

Références

[1] Qing Han et Fanghua Lin, Elliptic Partial Differential Equations, CIMS courant, 1997

[2] B.Gidas, Wei-Ming NI, et L.Nirenberg Symmetry and Related Properties via the Maximum Principle, Communication in mathematical Physics 68 (1979) 209-243.