Examen de Topologie et Calcul Différentiel

(Les calculatrices, les téléphones portables et les documents sont interdits)

(Les deux problèmes sont indépendants. Le barème de chaque question est indiqué dans la marge)

Problème 1

Tous les espaces vectoriels considérés sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.

I. Soit E un espace de Banach de dimension infinie, dont on note la norme $\|\cdot\|$. On dit que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une *base de Schauder* de E si, pour tout $x \in E$, il existe une unique famille de réels $(\alpha_n)_n$ telle que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e_n$ soit convergente, de somme x.

1 — 1. Monter que tout espace de Banach admettant une base de Schauder est séparable.

2 — 2. Soient $\ell^p = \{(x_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; (\sum_n |x_n|^p)^{1/p} < +\infty\}$ pour $1 \leq p < +\infty$ et $\ell^\infty = \{(x_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \sup_n |x_n| < +\infty\}$. Lesquels de ces espaces admettent-ils une base de Schauder ? (On donnera explicitement une telle base dans les cas où elles existent).

On se donne désormais un espace de Banach E admettant une base de Schauder $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si $x \in E$, on note $e_n^*(x)$ l'unique réel α_n tel que $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e_n$. On pose $P_n x = \sum_{k=0}^{n} e_k^*(x) e_k$, de telle manière que $\|P_n x - x\|$ tende vers 0 si n tend vers l'infini. On pose enfin $|||x||| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|P_n x\|$. C'est une norme sur E. On écrira désormais $(E, |||\cdot|||)$ lorsque E est muni de cette norme, et simplement E lorsque E est muni de sa norme de départ.

1,5 — 3. (a) Soit $(x_k)_k$ une suite de Cauchy de $(E, |||\cdot|||)$. Montrer que, pour tout n entier, la suite $(e_n^*(x_k))_k$ converge lorsque k tend vers $+\infty$ vers une limite α_n. On pose $y_n = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j e_j$. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe k_0 tel que, pour tout $k \geq k_0$ et tout n, $\|P_n x_k - y_n\| \leq \epsilon$.

1,5 — (b) Montrer que la suite $(y_n)_n$ converge dans E.

1,5 — (c) Montrer que $(E, |||\cdot|||)$ est complet.

3 — 4. Montrer que $\|\cdot\|$ et $|||\cdot|||$ sont deux normes équivalentes.

1,5 — 5. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, les applications P_n et e_n^* sont continues de E dans E et de E dans $\mathbb{R}$ respectivement.

2,5 — (b) Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|P_n\|_{\mathcal{L}(E)} \leq C$.

II. On dit que l'espace de Banach E a la propriété (AB) s'il existe $M > 0$ tel que, pour tout compact K de E, et tout $\epsilon > 0$, il existe un opérateur linéaire continu de rang fini $T_{K,\epsilon}$ vérifiant

$$\|T_{K,\epsilon}\|_{\mathcal{L}(E)} \leq M \text{ et } \sup_{x\in K} \|T_{K,\epsilon} x - x\| < \epsilon.$$

2 — 1. Soit E un espace de Banach vérifiant (AB). Montrer que tout opérateur compact de E dans E est limite d'une suite d'opérateurs de rang fini.

3 — 2. Soit E un espace de Banach séparable vérifiant (AB). Montrer qu'il existe une suite $(T_n)_n$ d'opérateurs de rang fini tels que pour tout x dans E, $T_n x$ converge vers x lorsque n tend vers l'infini.

3. Soit E un espace de Banach tel qu'il existe $(T_n)_n$ suite d'opérateurs linéaires continus de rang fini tels que, pour tout x dans E, $T_n x$ tende vers x lorsque n tend vers l'infini.

2 — (a) Montrer que $\sup_n \|T_n\|_{\mathcal{L}(E)}$ est fini.

3 — (b) Montrer que E vérifie la propriété (AB).

$\boxed{1}$ 4. Montrer que tout espace de Banach admettant une base de Schauder vérifie la propriété (AB).

Problème 2

I. Soit (X, d) un espace métrique.

$\boxed{3}$ 1. Soient $[\alpha, \beta]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$, $c : [\alpha, \beta] \to X, \lambda : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ deux applications continues. On suppose que pour tous t, t' dans $[\alpha, \beta]$ tels que $\lambda(t) = \lambda(t')$, on a $c(t) = c(t')$. Pour tout y dans $\lambda([\alpha, \beta])$ on pose $\tilde{c}(y) = c(x)$, où x est un point quelconque de $\lambda^{-1}(y)$. Montrer que $\tilde{c} : \lambda([\alpha, \beta]) \to X$ est continue.

L'ensemble $\mathcal{S}$ des subdivisions de $[\alpha, \beta]$ est l'ensemble des suites finies croissantes de réels vérifiant $t_0 = \alpha \leq t_1 \leq \cdots \leq t_N = \beta$. Si $c : [\alpha, \beta] \to X$ est continue, on pose

$$L(c) = \sup_{\mathcal{S}} \Big[\sum_{i=0}^{N-1} d(c(t_i), c(t_{i+1})) \Big],$$

où la borne supérieure est prise sur toutes les subdivisions de $[\alpha, \beta]$. On dit que c est rectifiable si $L(c)$ est fini. On dit alors que $L(c)$ est la longueur de c.

$\boxed{1{,}5}$ 2. Soit c une courbe continue rectifiable définie sur $[\alpha, \beta]$ à valeurs dans X. Montrer que si $\Phi : [\alpha', \beta'] \to [\alpha, \beta]$ est continue monotone surjective, alors $c \circ \Phi$ est également rectifiable et de même longueur que c.

$\boxed{1}$ 3. (a) Soit c une courbe continue rectifiable définie sur $[\alpha, \beta]$ à valeurs dans X. Montrer que pour tout $t \in [\alpha, \beta]$, $c|_{[\alpha,t]}$ et $c|_{[t,\beta]}$ sont également rectifiables et que $L(c) = L(c|_{[\alpha,t]}) + L(c|_{[t,\beta]})$.

$\boxed{1}$ (b) Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe une subdivision $t_0 = \alpha \leq t_1 \leq \cdots \leq t_N = \beta$ de $[\alpha, \beta]$ telle que pour tout $i = 0, \ldots, N-1$,

$$d(c(t_i), c(t_{i+1})) < \epsilon \text{ et } L(c) \geq \sum_{j=0}^{N-1} d(c(t_j), c(t_{j+1})) > L(c) - \epsilon.$$

$\boxed{1{,}5}$ (c) Montrer que la fonction $\lambda(t) = L(c|_{[\alpha,t]})$ est continue sur $[\alpha, \beta]$.

$\boxed{1{,}5}$ (d) Montrer que si $\ell = L(c)$, il existe $\tilde{c} : [0, \ell] \to X$ rectifiable vérifiant $\tilde{c} \circ \lambda = c$ et, pour tout $t \in [0, \ell]$, $L(\tilde{c}|_{[0,t]}) = t$. On dira alors que $\tilde{c}$ est paramétrée par la longueur d'arc.

$\boxed{1{,}5}$ 4. Soit $c_n : [\alpha, \beta] \to X$ une suite de courbes continues rectifiables, convergeant uniformément vers c, telles qu'il existe $\Lambda > 0$ tel que pour tout n, $L(c_n) \leq \Lambda$. Montrer que c est rectifiable et que $L(c) \leq \Lambda$.

II. On suppose désormais que X est un espace métrique tel que, pour tous x, y dans X, on ait $d(x, y) = \inf L(c)$, où la borne inférieure est prise sur toutes les courbes rectifiables joignant x à y. On suppose de plus X localement compact.

$\boxed{1}$ 1. (a) Montrer que pour tout élément a de X et tout réel positif r tels que $\overline{B}(a, r)$ soit compacte, il existe un nombre fini de couples (x_i, ϵ_i) dans $\overline{B}(a, r) \times]0, +\infty[$, $i = 1, \ldots, N$, tels que $\overline{B}(a, r) \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, \epsilon_i)$ et que $\overline{B}(x_i, \epsilon_i)$ soit compact.

$\boxed{1}$ (b) Soit $A = \{r \in [0, +\infty[; \overline{B}(a, r) \text{ est compacte}\}$. Montrer que A est ouvert.

$\boxed{2{,}5}$ 2. Soient a, x des éléments distincts de X, $\rho > 0$ tel que $d(a, x) \leq \rho$ et $\epsilon \in]0, d(a, x)[$. Montrer qu'il existe $y \in X$ vérifiant $d(a, y) \leq \rho - \frac{\epsilon}{2}$ et $d(y, x) \leq \epsilon$.

Soient a un point de X et $\rho > 0$ tels que pour tout $r < \rho$, $\overline{B}(a, r)$ soit compacte. Soit $(x_n)_n$ une suite de $\overline{B}(a, \rho)$ telle que $d(a, x_n)$ tende vers ρ lorsque n tend vers l'infini. Soit $\epsilon_p \in]0, \rho[$ une suite tendant vers 0. D'après 2., il existe pour tout p et tout n entiers, un élément y_n^p de $\overline{B}(a, \rho - \frac{\epsilon_p}{2})$ vérifiant $d(y_n^p, x_n) \leq \epsilon_p$.

$\boxed{1,5}$ 3. (a) Montrer qu'il existe une suite $(n_k)_n$ extraite de $\mathbb{N}$ telle que pour tout p, la limite $\lim_{k\to+\infty} y_{n_k}^p$ existe.

$\boxed{1}$ (b) Montrer que $(x_{n_k})_k$ est de Cauchy.

$\boxed{1}$ 4. On suppose désormais que X est localement compact et complet. Monter que toute boule fermée de X est compacte.

$\boxed{1}$ 5. Soient a, b deux points distincts de X. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $c_n : [0,1] \to X$, courbe rectifiable vérifiant $c_n(0) = a, c_n(1) = b$, $L(c_n) < d(a,b) + \frac{1}{n+1}$, et $L(c_n|_{[t,t']}) = |t-t'|L(c_n)$ pour tous $t, t' \in [0,1]$.

$\boxed{4}$ 6. Montrer qu'il existe une suite $(c_{n_k})_k$ extraite de $(c_n)_n$, qui converge uniformément vers une courbe $c : [0,1] \to X$, continue, rectifiable, vérifiant $c(0) = a, c(1) = b, L(c) = d(a,b)$ (Théorème de Hopf-Rinow).