FIMFA ENS — Mardi 1er Février 2011 — Durée : 3 heures

Corrigé de l'examen

Problème 1

I.

1. L'espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ engendré par les $(e_n)_n$ est une partie dénombrable dense.
2. Soit $e_n = (\delta_k^n)_k$. Alors si $x = (x_n)_n \in \ell^p$ avec $1 \leq p < +\infty$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n e_n$ converge vers x, puisque $\|x - \sum_{n=0}^{N} x_n e_n\|_{\ell^p} = \left(\sum_{p>N} |x_n|^p\right)^{1/p}$, qui tend vers zéro comme reste d'une série convergente. De plus, l'écriture précédente est trivialement unique. Par contre, ℓ^∞ n'étant pas séparable, il ne peut pas admettre de base de Schauder d'après la première question.
3. (a) Par hypothèse, pour tout $\epsilon > 0$, il existe k_0 et pour tous $k, k' \geq k_0$, on a $\sup_n \|P_n x_k - P_n x_{k'}\| < \epsilon$. En exprimant $e_n^*(x_k)$ à partir de l'égalité $(P_n - P_{n-1})(x_k) = e_n^*(x_k) e_n$, on en déduit que pour tout n, $(e_n^*(x_k))_k$ est de Cauchy, donc converge vers une limite α_n. Si on fait tendre k' vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente, on obtient $\|P_n x_k - y_n\| \leq \epsilon$ pour tout $k \geq k_0$ et tout n.

   (b) Soient $\epsilon > 0$ et k_0 comme à la question précédente. Alors pour tous n, m

   $$\begin{aligned}\|y_n - y_m\| &\leq \|y_n - P_n x_{k_0}\| + \|P_n x_{k_0} - P_m x_{k_0}\| + \|P_m x_{k_0} - y_m\| \\ &\leq 2\epsilon + \|P_n x_{k_0} - P_m x_{k_0}\|.\end{aligned}$$

   Comme $P_n x_{k_0}$ tend vers x_{k_0} si n tend vers l'infini, on obtient que pour n, m assez grands, $\|y_n - y_m\| \leq 3\epsilon$. Donc $(y_n)_n$ est de Cauchy, donc converge.

   (c) Soit $y = \lim y_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e_n$. On a donc $y_n = P_n y$. Soit $\epsilon > 0$. D'après la question (a), pour tout $k \geq k_0$ et tout n, $\|P_n(x_k - y)\| < \epsilon$ donc $(x_k)_k$ converge vers y dans $(E, |\!|\!| \cdot |\!|\!|)$ lorsque k tend vers l'infini.
4. On a $|\!|\!|x|\!|\!| \geq \|P_n x\|$ pour tous n, x. Or $P_n x$ tend vers x dans E lorsque n tend vers l'infini, d'où $\|x\| \leq |\!|\!|x|\!|\!|$ pour tout x. Cela montre que l'application linéaire $\mathrm{Id} : (E, |\!|\!| \cdot |\!|\!|) \to (E, \|\cdot\|)$ est continue et bijective. Comme d'après 3. (c), $(E, |\!|\!| \cdot |\!|\!|)$ est un Banach, on peut appliquer le théorème de Banach et conclure que les normes sont équivalentes.
5. (a) On a $\|P_n x\| \leq |\!|\!|x|\!|\!|$ donc $P_n : (E, |\!|\!| \cdot |\!|\!|) \to (E, \|\cdot\|)$ est linéaire continue. Comme $|\!|\!| \cdot |\!|\!|$ est équivalente à $\|\cdot\|$, on a le résultat. Enfin, $|e_n^*(x)| = \frac{1}{\|e_n\|} \|(P_n - P_{n-1})x\|$, d'où la continuité de e_n^*.

   (b) D'après la défintion de la norme $|\!|\!| \cdot |\!|\!|$ et la question 4., on a $\|P_n x\| \leq |\!|\!|x|\!|\!| \leq C\|x\|$, d'où la borne uniforme cherchée.

II.

1. Soit $\overline{B}_E$ la boule unité fermée de E. Si u est compact, $K = \overline{u(\overline{B}_E)}$ est compact. Soit alors $(T_n)_n$ suite d'opérateurs de rang fini telle que $\sup_{x \in K} \|T_n x - x\| < \frac{1}{n}$. En particulier, $\|T_n u(x') - u(x')\| < \frac{1}{n}$ pour tout $x' \in \overline{B}_E$, i.e. $\|T_n \circ u - u\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \frac{1}{n}$. Donc $T_n \circ u$ est de rang fini et converge vers u.

2. Soit $(x_k)_k$ partie dénombrable dense. Soit $K_\ell = \{x_0, \dots, x_\ell\}$. C'est un compact, donc il existe un opérateur T_ℓ^n de rang fini tel que, pour tous ℓ, n, on ait $\|T_\ell^n x_j - x_j\| \leq \frac{1}{n}$, $j = 0, \dots, \ell$ et $\|T_\ell^n\|_{\mathcal{L}(E)} \leq M$. Si x est un élément de E et $\epsilon > 0$ est donné, on choisit x_j tel que $\|x - x_j\| < \frac{\epsilon}{3M}$. Alors pour $n \geq j$,

$$\begin{aligned}\|T_n^n x - x\| &\leq \|T_n^n(x - x_j)\| + \|T_n^n x_j - x_j\| + \|x_j - x\| \\ &\leq \frac{\epsilon}{3}\Big[1 + \frac{1}{M}\Big] + \frac{1}{n} < \epsilon,\end{aligned}$$

si n est assez grand.

3. (a) Par le théorème de Banach-Steinhauss, qui s'applique puisque $\sup_n \|T_n x\| < +\infty$ par hypothèse, on a la conclusion.

(b) Soient K un compact, $\epsilon > 0$ tel que K soit recouvert par un nombre fini de boules de rayon ϵ, de centre x_j, $j = 1, \dots, N$. Par hypothèse, il existe n tel que $\|T_n x_j - x_j\| < \epsilon$ pour $j = 1, \dots, N$. Si $x \in K$, il existe j tel que $\|x - x_j\| < \epsilon$, d'où

$$\begin{aligned}\|T_n x - x\| &\leq \|T_n(x - x_j)\| + \|T_n x_j - x_j\| + \|x_j - x\| \\ &\leq (M+1)\epsilon + \epsilon = (M+2)\epsilon,\end{aligned}$$

où $M = \sup_n \|T_n\|_{\mathcal{L}(E)}$.

4. On applique la question précédente à $T_n = P_n$.

Problème 2

I.

1. Notons $[\alpha', \beta']$ l'image de $[\alpha, \beta]$ par λ, et soit z un élément de $[\alpha', \beta']$. On doit montrer que

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ et } \forall y \in [\alpha', \beta'] \text{ avec } |y - z| < \eta, |\tilde{c}(y) - \tilde{c}(z)| < \epsilon.$$

Si c'est faux, il existe $\epsilon_0 > 0$, et une suite $(y_k)_k$ de $[\alpha', \beta']$, convergeant vers z, telle que pour tout k, $|\tilde{c}(y_k) - \tilde{c}(z)| \geq \epsilon_0$. On a alors pour tous $x_k \in \lambda^{-1}(y_k)$, $x \in \lambda^{-1}(z)$, $|c(x_k) - c(x)| \geq \epsilon_0$. Comme x_k est dans le compact $[\alpha, \beta]$, on en extrait une sous-suite convergente vers x_∞ et on a $|c(x_\infty) - c(x)| \geq \epsilon_0$. Or, $\lambda(x_k)$ converge vers z par hypothèse et vers $\lambda(x_\infty)$ par continuité de λ. Donc x_∞ et x sont dans $\lambda^{-1}(z)$, ce qui par hypothèse entraîne la contradiction $c(x_\infty) = c(x)$.

2. On a $L(c \circ \Phi) = \sup_{\mathcal{S}'} \big[\sum_{j=0}^{N-1} d(c(\Phi(t_j)), c(\Phi(t_{j+1})))\big]$, où $\mathcal{S}'$ est l'ensemble des subdivisions de $[\alpha', \beta']$. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des subdivisions de $[\alpha, \beta]$. Il suffit de voir Φ envoie toute subdivision de $\mathcal{S}'$ sur une subdivision de $\mathcal{S}$ et que toute subdivision de $\mathcal{S}$ est l'image par Φ d'une subdivision de $\mathcal{S}'$, ce qui résulte du fait que Φ est monotone et surjective.

3. (a) Si $\alpha = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_N = t$ (resp. $s_0 = t \leq s_1 \leq \cdots \leq s_M = \beta$) est une subdivision de $[\alpha, t]$ (resp $[t, \beta]$), $\alpha = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_N = s_0 \leq s_1 \leq \cdots \leq s_M = \beta$ est une subdivision de $[\alpha, \beta]$. On en déduit $L(c|_{[\alpha,t]}) + L(c|_{[t,\beta]}) \leq L(c)$. D'autre part, soit $\alpha = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_N = \beta$ une subdivisons de $[\alpha, \beta]$ et j tel que $t_j \leq t \leq t_{j+1}$. On a par l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N} d(c(t_k), c(t_{k+1})) \leq \sum_{k=0}^{j-1} d(c(t_k), c(t_{k+1})) + d(c(t_j), c(t)) + d(c(t), c(t_{j+1})) \\ + \sum_{k=j+1}^{N-1} d(c(t_k), c(t_{k+1})).\end{aligned}$$

Comme $t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_j \leq t$ (resp. $t \leq t_{j+1} \leq \cdots \leq t_N$) est une subdivision de $[\alpha, t]$ (resp. $[t, \beta]$), on en déduit $L(c) \leq L(c|_{[\alpha,t]}) + L(c|_{[t,\beta]})$.

(b) Il existe par définition de $L(c)$ une subdivision vérifiant la dernière inégalité. Si, utilisant la continuité uniforme de c, on la raffine de manière que $d(c(t_i), c(t_{i+1})) < \epsilon$, on augmente la valeur de $\sum_i d(c(t_i), c(t_{i+1}))$, tout en gardant cette quantité inférieure à $L(c)$.

(c) On a $\lambda(t) - \lambda(t') = L(c|_{[t',t]})$ si $t' < t$ d'après 3. (a). Si t' est fixé, il faut voir que $L(c|_{[t',t]})$peut être rendu arbitrairement petit lorsque t se rapproche de t'. Soit $\epsilon > 0$ et une subdivision vérifiant les conditions de la question précédente. On a

$$\sum_i L(c|_{[t_i,t_{i+1}]}) = L(c) \geq \sum_i d(c(t_i), c(t_{i+1})) \geq L(c) - \epsilon = \sum_i L(c|_{[t_i,t_{i+1}]}) - \epsilon,$$

d'où $\epsilon \geq \sum_i [L(c|_{[t_i,t_{i+1}]}) - d(c(t_i), c(t_{i+1}))] \geq 0$. Comme chaque terme de la somme est positif, on a pour tout i, $0 \leq L(c|_{[t_i,t_{i+1}]}) - d(c(t_i), c(t_{i+1})) \leq \epsilon$, d'où $L(c|_{[t_i,t_{i+1}]}) \leq 2\epsilon$. On peut en outre, quitte à renuméroter la subdivision, supposer $t_i < t_{i+1}$ pour tout i. Alors si $t - t'$ est inférieur au minimum des $t_{i+1} - t_i$, les deux points t et t' sont contenus dans deux intervalles adjacents de la subdivision. Il en résulte que $L(c|_{[t',t]}) \leq 4\epsilon$.

(d) L'existence de $\tilde{c}$ découle de la question 1. On a pour tout s dans $[\alpha, \beta]$, $\lambda(s) = L(c|_{[\alpha,s]}) = L(\tilde{c} \circ \lambda|_{[\alpha,s]}) = L(\tilde{c}|_{[0,\lambda(s)]})$, où la dernière égalité résulte de la question 2. Comme λ est surjective de $[\alpha, \beta]$ sur $[0, \ell]$, la conclusion en découle.

4. Soit $\alpha = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_{N_0} = \beta$ une subdivision de $[\alpha, \beta]$. Pour tout $i = 0, \ldots, N_0$, choisissons $N(i)$ tel que pour tout $n \geq N(i)$, on ait $d(c(t_i), c_n(t_i)) < \epsilon/2N_0$. Alors, par l'inégalité triangulaire,

$$\sum_{i=0}^{N_0-1} d(c(t_i), c(t_{i+1})) \leq \epsilon + \sum_{i=0}^{N_0-1} d(c_n(t_i), c_n(t_{i+1})) \leq \epsilon + L(c_n).$$

si $n \geq N_\epsilon = \max_i [N(i)]$. Le résultat en découle.

II.

1. (a) Comme X est localement compact, il existe pour tout $x \in \overline{B}(a, r)$ un voisinage compact W_x de x. Soit $\epsilon_x > 0$ tel que $\overline{B}(x, \epsilon_x) \subset W_x$. On peut extraire du recouvrement du compact $\overline{B}(a, r)$ par les $B(x, \epsilon_x)$ un sous-recouvrement fini, qui convient puisque $\overline{B}(x, \epsilon_x)$ est fermée dans le compact W_x.

   (b) Soit $r \in A$. Appliquons la question précédente à $\overline{B}(a, r)$ et posons $F = X - \bigcup_{i=1}^N B(x_i, \epsilon_i)$. La fonction continue $x \to d(x, F)$ atteint son minimum sur le compact $\overline{B}(a, r)$, et ce minimum δ_0 est strictement positif puisque $F \cap \overline{B}(a, r) = \emptyset$ et que F est fermé. Alors $\overline{B}(a, r + \delta) \cap F = \emptyset$ si $\delta \in [0, \delta_0[$, i.e. $\overline{B}(a, r + \delta) \subset \bigcup B(x_i, \epsilon_i) \subset \bigcup \overline{B}(x_i, \epsilon_i)$, qui est compact. Donc $]0, r + \delta[\subset A$.

2. Soit c une courbe rectifiable paramétrée par la longueur d'arc, joignant x à a, de longueur ℓ majorée par $\rho + \epsilon/2$ (Une telle courbe existe compte-tenu de l'hypothèse sur X). Posons $y = c(\epsilon)$. On a $L(c|_{[0,\epsilon]}) = \epsilon \geq d(c(0), c(\epsilon)) = d(x, y)$, et $L(c|_{[\epsilon,\ell]}) = \ell - \epsilon \geq d(c(\ell), c(\epsilon)) = d(a, y)$, d'où $d(x, y) \leq \epsilon$ et $d(a, y) \leq \rho - \epsilon/2$.

3. (a) La suite $(y_n^0)_n$ est contenue dans le compact $\overline{B}(a, \rho - \frac{\epsilon_0}{2})$. Il existe donc $(n_k^0)_k$ suite extraite strictement croissante d'entiers telle que $(y_{n_k^0}^0)_k$ converge. Appliquant le même raisonnement à $(y_{n_k^0}^1)_k$, on extrait de $(n_k^0)_k$ une sous-suite $(n_k^1)_k$, telle que $(y_{n_k^1}^j)_k$ converge pour $j = 0, 1$. Par récurrence, on obtient pour tout p une suite $(n_k^p)_k$, extraite de $(n_k^{p-1})_k$,

telle que pour tout j inférieur ou égal à p, $(y^j_{n^p_k})_k$ converge. On pose $n_k = n^k_k$. Alors, $(y^p_{n_k})_k$ converge pour tout p.

(b) Soit $\epsilon > 0$ et fixons p avec $\epsilon_p < \epsilon/3$. Comme $(y^p_{n_k})_k$ converge, il existe k_0 tel que pour tous $k, k' \geq k_0$, $d(y^p_{n_k}, y^p_{n_{k'}}) < \epsilon/3$. Alors, pour tous $k, k' \geq k_0$,

$$d(x_{n_k}, x_{n_{k'}}) \leq d(x_{n_k}, y^p_{n_k}) + d(y^p_{n_k}, y^p_{n_{k'}}) + d(y^p_{n_{k'}} x_{n_{k'}}) < \epsilon.$$

4. Il suffit de montrer que l'ensemble A de 1. (b), qui est un ouvert non vide de $[0, +\infty[$, est aussi fermé. Soit $\rho > 0$ tel que pour tout $r \in [0, \rho[$, $\overline{B}(a, r)$ soit compacte. Montrons que $\overline{B}(a, \rho)$ est compacte. Soit $(x_n)_n$ une suite de $\overline{B}(a, \rho)$. S'il existe $\delta > 0$ et une suite extraite $(x_{n_k})_k$ telle que $d(a, x_{n_k}) \leq \rho - \delta$, $(x_{n_k})_k$ est une suite du compact $\overline{B}(a, \rho - \delta)$, donc elle admet une suite extraite convergente. Sinon, $d(a, x_{n_k}) \to \rho$, donc on peut appliquer la question 3., qui montre qu'il existe une suite extraite qui est de Cauchy dans le fermé $\overline{B}(a, \rho)$ de l'espace complet X, donc convergente.
5. On sait qu'il existe une courbe rectifiable joignant a à b, de longueur $\ell_n < d(a, b) + \frac{1}{n+1}$. Par la question 4., on peut supposer cette courbe paramétrée par la longueur d'arc i.e. donnée par une fonction $\tilde{c}_n : [0, \ell_n] \to X$, avec $L(c|_{[t,t']}) = |t - t'|$ pour tous $t, t' \in [0, \ell_n]$. Il suffit de poser $c_n(t) = \tilde{c}_n(\ell_n t)$ pour $t \in [0, 1]$.
6. Appliquons le théorème d'Ascoli à la suite $(c_n)_n$ d'éléments de l'espace $\mathcal{C}([0, 1]; X)$. Pour tout t fixé, la famille $(c_n(t))_n$ est relativement compacte dans X, puisque

$$d(c_n(t), a) \leq L(c_n|_{[0,t]}) \leq \ell_n < d(a, b) + \frac{1}{n+1},$$

et que par la question 4., les bornés de X sont relativement compacts. Elle est équicontinue puisque $d(c_n(t), c_n(t')) \leq \ell_n |t - t'| \leq (d(a, b) + 1)|t - t'|$. La suite $(c_n)_n$ admet donc une suite extraite uniformément convergente vers une fonction continue $c : [0, 1] \to X$. Par I. 4. appliqué à la suite $(c_n)_{n \geq k}$, c est rectifiable et $L(c) \leq d(a, b) + \frac{1}{k+1}$. Comme on a trivialement $L(c) \geq d(a, b)$, on a obtenu l'égalité $L(c) = d(a, b)$.