FIMFA ENS Ulm — Lundi 19 novembre 2007 — Durée : 2 heures

Examen partiel de topologie, analyse et calcul différentiel

Documents et calculatrices interdits

Les exercices sont indépendants.

Exercice I (1) On considère l'application $f :]0,1] \to \mathbb{C}$ définie par

$$f(t) = (1+t)\, e^{\frac{i\pi}{2}\sin\frac{1}{t}} \; .$$

Quelles sont les valeurs d'adhérence de $f(t)$ quand t tend vers 0 ?

(2)* On rappelle que $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\,\mathbb{N}$ est dense dans $\mathbb{R}$. On considère l'application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$g(t) = \big(\sin u,\, \sin(\sqrt{2}\,u)\big) \; .$$

Quelles sont les valeurs d'adhérence de $g(t)$ quand t tend vers $+\infty$?

Exercice II (Espace des suites réelles à décroissance rapide) Soit E l'espace vectoriel réel des suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que, pour tout k dans $\mathbb{N}$,

$$||x||_k = \sup_{n\in\mathbb{N}} \; (n+1)^k\,|x_n| \; < +\infty \; .$$

(1) Montrer que $||\cdot||_k$ est une norme sur E pour tout $k \in \mathbb{N}$. On munit E de la topologie définie par la famille de semi-normes $(||\cdot||_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

(2) On considère l'application $\sigma : E \to E$ définie par $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $x'_n = x_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que σ est continue.

(3)* Montrer que E est métrisable complet.

Exercice III (Anneaux hawaïens et bouquets de cercles) (1) Soit

$$A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; (x - \frac{1}{k+1})^2 + y^2 = \frac{1}{(k+1)^2}\Big\} \; .$$

Montrer que A est un sous-espace compact, connexe et localement connexe de $\mathbb{R}^2$.

(2) On note $\overline{\mathbb{B}}$ la boule unité fermée de $\mathbb{R}^2$ (muni de sa distance euclidienne usuelle), $\mathbb{S}_1 = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \;:\; s^2 + t^2 = 1\}$ le cercle unité de $\mathbb{R}^2$ et $x_* = (1,0) \in \mathbb{S}_1$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note C_k l'ensemble des suites $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dans $\overline{\mathbb{B}}$ telles que $z_k \in \mathbb{S}_1$ et $z_i = x_*$ si $i \neq k$. Soit $C = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k$. Montrer que le sous-espace C de l'espace topologique produit $\overline{\mathbb{B}}^{\,\mathbb{N}}$ est compact.

(3) Soient I un ensemble, muni de la topologie discrète, et $\widetilde{\mathcal{B}}_I$ l'espace topologique produit $\mathbb{S}_1 \times I$. Notons $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence sur $\widetilde{\mathcal{B}}_I$ définie par $(x,i)\;\mathcal{R}\;(y,j)$ si et

seulement si ($i = j$ et $x = y$) ou ($x = y = x_*$). Soit $\mathcal{B}_I$ l'espace topologique quotient $\widetilde{\mathcal{B}}_I/\mathcal{R}$. Montrer que si I est fini, alors $\mathcal{B}_I$ est compact.

(4)* Montrer que A et C sont homéomorphes, mais que A et $\mathcal{B}_{\mathbb{N}}$ ne sont pas homéomorphes.

$\boxed{\text{Exercice IV}}$ (Espaces grassmaniens) Soient $n, k \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leq k \leq n$. On note

$$\langle\, (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)\,\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i \quad \text{et} \quad ||(x_1, \dots, x_n)|| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

le produit scalaire usuel et la norme euclidienne usuelle sur l'espace vectoriel réel $E = \mathbb{R}^n$. On note $\mathrm{O}(n)$ le groupe orthogonal des matrices réelles x de taille n-n telles que ${}^t x x = 1$.

(1) Soit $B_k(E)$ l'ensemble des k-uplets $(v_1, \dots, v_k)$ de vecteurs orthonormés ($||v_i|| = 1$ pour $1 \leq i \leq k$ et $\langle v_i, v_j\rangle = 0$ si $1 \leq i \neq j \leq k$) de E. Montrer que $B_k(E)$ est un sous-espace compact de l'espace produit E^k.

(2) Pour $g \in \mathrm{O}(n)$ et $a = (v_1, \dots, v_k) \in B_k(E)$, on note $g\,a = (gv_1, \dots, gv_k)$. Montrer que l'application $(g, a) \mapsto ga$ est une action (à gauche) continue transitive de $\mathrm{O}(n)$ sur $B_k(E)$ (on rappelle qu'une action (à gauche) d'un groupe G sur un ensemble E est *transitive* si $\forall\, x, y \in E,\ \exists\, g \in G,\ \ y = gx$).

(3) On note H le sous-groupe de $\mathrm{O}(n)$ image de $\mathrm{O}(n-k)$ par le morphisme de groupes $x \mapsto \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ où I_k est la matrice identité de taille k-k. Montrer que H est fermé dans $\mathrm{O}(n)$, et que l'espace $B_k(E)$ et l'espace quotient $\mathrm{O}(n)/H$ sont homéomorphes.

(4)* Soit $\mathcal{G}_k(E)$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension k de E. On note $\overline{\mathbb{B}_n}$ la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$. Pour toute partie A de $\mathbb{R}^n$, on note $\mathcal{V}_\epsilon(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, A) < \epsilon\}$ le ϵ-voisinage de A. Pour F, F' dans $\mathcal{G}_k(E)$, on pose

$$d_H(F, F') = \inf\Big\{\epsilon > 0\ :\ F \cap \overline{\mathbb{B}_n} \subset \mathcal{V}_\epsilon(F' \cap \overline{\mathbb{B}_n}\,)\ \text{ et }\ F' \cap \overline{\mathbb{B}_n} \subset \mathcal{V}_\epsilon(F \cap \overline{\mathbb{B}_n}\,)\Big\}\ .$$

a) Montrer que $d_H : \mathcal{G}_k(E) \times \mathcal{G}_k(E) \to [0, +\infty[$ est une distance.

b) Montrer que l'application $B_k(E) \to \mathcal{G}_k(E)$ qui à un k-uplet orthonormé $(v_1, \dots, v_k)$ associe le sous-espace vectoriel engendré par $v_1, \dots, v_k$, est continue, surjective.

c) Pour $g \in \mathrm{O}(n)$ et $V \in \mathcal{G}_k(E)$, on note $g\,V$ l'image du sous-espace vectoriel V par l'application linéaire de matrice g dans la base canonique de $E = \mathbb{R}^n$. Montrer que l'application $(g, V) \mapsto gV$ est une action (à gauche) continue transitive de $\mathrm{O}(n)$ sur $\mathcal{G}_k(E)$.

d) On note H le sous-groupe de $\mathrm{O}(n)$ image de $\mathrm{O}(k) \times \mathrm{O}(n-k)$ par le morphisme de groupes $(x, y) \mapsto \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$. Montrer que H est fermé dans $\mathrm{O}(n)$, et que l'espace $\mathcal{G}_k(E)$ et l'espace quotient $\mathrm{O}(n)/H$ sont homéomorphes.