

Topologie algébrique élémentaire

Frédéric Paulin

Version très préliminaire



Cours de première année de mastère

École Normale Supérieure

Année 2009-2010

Table des matières

1	Introduction	5
1.1	Exemples et applications	5
1.2	Remarques sur les prérequis de topologie	6
1.3	Remarques (pseudo-)historiques sur l'homologie	8
	Des arguments de connexité à la notion de bord	8
	Du bord topologique à son algébrisation	9
	La formulation axiomatique de l'homologie	10
	De l'homologie à l'homotopie	11
2	Homotopie et groupe fondamental	13
2.1	Homotopie	13
2.2	Groupe fondamental	15
2.3	Autres exercices	22
3	Revêtements	26
3.1	Catégorie des revêtements	26
3.2	Homéomorphismes locaux et revêtements	27
3.3	Actions de groupes topologiques	29
3.4	Actions de groupes et revêtements	33
3.5	Unicité des relèvements	35
3.6	Relèvement des chemins et des homotopies	36
3.7	Action sur la fibre du groupe fondamental de la base	38
3.8	Relèvement des applications	41
3.9	Structure des morphismes de revêtements	44
3.10	Revêtements galoisiens	48
3.11	Revêtements universels	49
3.12	Classification des revêtements	53
3.13	Autres exercices	56
3.14	Indications pour la résolution des exercices	58
4	Groupe fondamentaux, revêtements et CW-complexes	66
4.1	Propriétés universelles sur les groupes	66
	Groupe libre	66
	Groupes définis par générateurs et relations	68
	Somme amalgamée de groupes	69
	Formes normales dans les produits amalgamés	72
4.2	Le théorème de van Kampen	73
4.3	CW-complexes	76
4.4	Groupe fondamental des CW-complexes	81
	Groupe fondamental des graphes	83
	Groupe fondamental de CW-complexe et présentation de groupe	84
4.5	Applications des revêtements à la théorie des groupes	86
4.6	Autres exercices	87

4.7	Indications pour la résolution des exercices	92
5	Homologie singulière	101
5.1	Un peu d'algèbre homologique	101
	Complexes de chaînes et homologie de complexes de chaînes	101
	Suite exacte longue d'homologie	103
	Caractéristique d'Euler d'un complexe de chaînes	105
	Complexes de cochaînes, cohomologie, suite exacte longue de cohomologie	106
	Catégories et foncteurs	106
5.2	Construction et propriétés axiomatiques de l'homologie singulière	109
	Chaînes singulières	109
	Fonctorialité de l'homologie singulière	111
	Premiers calculs d'homologie	112
	Invariance homotopique	113
	Homologie relative	115
	Théorème des petites chaînes	118
	Excision	121
	Suite exacte de Mayer-Vietoris	124
5.3	Quelques calculs et applications de l'homologie	126
	Calcul de l'homologie des sphères	126
	Le théorème du point fixe de Brouwer	127
	Homologie et limite inductive	127
	Homologie du complémentaire d'une sphère dans une sphère	129
	Le théorème de séparation de Jordan-Brouwer	132
	Le théorème d'invariance du domaine de Brouwer	133
5.4	Groupe fondamental et homologie : le théorème d'Hurewicz	134
5.5	Autres exercices	139
5.6	Indications pour la résolution des exercices	141
6	Homologie cellulaire	146
6.1	Le complexe de chaînes cellulaires	146
	Homologie relative du p -squelette par rapport au $(p - 1)$ -squelette	146
	Le complexe de chaînes cellulaires	149
	Degré des applications de la sphère	150
	Calcul des morphismes de bords cellulaires	151
6.2	Homologie cellulaire et homologie singulière	153
	Caractéristique d'Euler des CW-complexes	155
6.3	Homologie des espaces projectifs	156
6.4	Autres exercices	157
6.5	Indications pour la résolution des exercices	158

7	Cohomologie singulière et cellulaire	160
7.1	Le foncteur Hom et les complexes de cochaînes	160
7.2	Propriétés de la cohomologie	162
	Fonctorialité de la cohomologie	163
	Cohomologie du point et en degré 0	163
	Invariance homotopique	163
	Suite exacte longue relative de cohomologie	163
	Excision	164
	Suite exacte de Mayer-Vietoris	164
	Théorème de Hurewicz	165
7.3	Autres exercices	165
7.4	Indications pour la résolution des exercices	165
A	Annexe : rappels de topologie générale	166
A.1	Généralités	166
	Topologie engendrée, prébase et base d'ouverts	167
	Voisinages, systèmes fondamentaux de voisinages	168
	Intérieur, adhérence, frontière	168
	Séparation	170
	Continuité	170
	Connexité	171
A.2	Constructions de topologies	172
	Comparaison de topologies	172
	Topologie initiale	172
	Sous-espace topologique	173
	Topologie produit	174
	Topologie finale	176
	Topologie quotient	177
A.3	Limites et valeurs d'adhérence	182
	Limites	182
	Propriétés des limites	184
	Valeurs d'adhérence	185
A.4	Compacité	186
	Espace compact	186
	Compacité et valeurs d'adhérence	187
	Compacité et produits	188
	Compacité et continuité	191
	Topologie compacte-ouverte	192
A.5	Exercices récapitulatifs	193
	Index	196
	Bibliographie	201

1 Introduction

La topologie algébrique est la construction et l'étude de foncteurs de la catégorie des espaces topologiques à valeurs dans celle des groupes (ou des modules sur un anneau). Le but est de classer (ou au moins comprendre), par exemple à homéomorphisme près, les espaces topologiques (au moins dans certaines familles) en leur associant des invariants de nature algébrique (nombres entiers, groupes, anneaux, etc).

Nous renvoyons par exemple à fin de la partie 5.1 (ou à [McL]) pour les notions de catégories et de foncteurs, dont nous n'aurons guère besoin dans ce cours. Par exemple, un "foncteur (covariant) (resp. contravariant) de la catégorie des espaces topologiques à valeurs dans celle des groupes" est la donnée,

- pour tout espace topologique X , d'un groupe $F(X)$,
- pour toute application continue $f : X \rightarrow Y$ entre espaces topologiques, d'un morphisme de groupes $F(f) : F(X) \rightarrow F(Y)$ (resp. $F(f) : F(Y) \rightarrow F(X)$), vérifiant, pour tous les espaces topologiques X, Y, Z ,
- $F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)}$,
- si $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ sont des applications continues, alors $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ (resp. $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$).

En particulier, si f est un homéomorphisme, alors $F(f)$ est un isomorphisme de groupes : les invariants associés à des espaces topologiques homéomorphes sont isomorphes.

1.1 Exemples et applications.

1) Si X est un espace topologique, on note $F(X)$ le groupe abélien libre engendré par l'ensemble des composantes connexes de X ,

$$F(X) = \bigoplus_{c \text{ composante connexe de } X} \mathbb{Z}c.$$

Si $f : X \rightarrow Y$ est une application continue, on note $F(f) : F(X) \rightarrow F(Y)$ l'unique morphisme de groupes tel que $F(f)(c)$ soit, pour toute composante connexe c de X , la composante connexe de Y contenant $f(c)$.

2) Pour n dans \mathbb{N} , on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne standard sur \mathbb{R}^n (on rappelle que $\|(x_1, \dots, x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$). Soit $\mathbb{B}_n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ la boule unité (fermée) de \mathbb{R}^n et $\mathbb{S}_n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$ la sphère de dimension n .

On construira plus tard, pour tout q dans \mathbb{N} , un foncteur (covariant) $H_q(\cdot; \mathbb{Z})$ (ou $H_q(\cdot)$ pour abrégé) de la catégorie des espaces topologiques à valeurs dans celle des groupes, appelé q -ème groupe d'homologie, tel que

$$H_q(\mathbb{S}_n) = \begin{cases} \mathbb{Z} + \mathbb{Z} & \text{si } 0 = q = n \\ \mathbb{Z} & \text{si } 0 = q < n \\ 0 & \text{si } 0 < q < n \\ \mathbb{Z} & \text{si } 0 < q = n \\ 0 & \text{si } q > n \end{cases}$$

$$H_q(\mathbb{B}_n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } 0 = q \\ 0 & \text{si } 0 < q \end{cases}$$

Corollaire 1.1 (Théorème d'invariance du domaine de Brouwer I) *Si $n \neq m$, alors \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^m ne sont pas homéomorphes.*

Démonstration. Si $n \neq m$, alors les groupes $H_n(\mathbb{S}_n)$ et $H_n(\mathbb{S}_m)$ ne sont pas isomorphes. Par functorialité, les espaces topologiques \mathbb{S}_n et \mathbb{S}_m ne sont donc pas homéomorphes. Pour tout k dans \mathbb{N} , le compactifié d'Alexandrov de \mathbb{R}^k est homéomorphe à \mathbb{S}^k (voir l'exercice E.A.93). Si deux espaces topologiques localement compacts sont homéomorphes, alors leurs compactifiés d'Alexandrov le sont (voir l'exercice E.A.93). Donc \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^m ne sont pas homéomorphes. \square

Corollaire 1.2 (Théorème du point fixe de Brouwer) *Toute application continue de \mathbb{B}_n dans \mathbb{B}_n admet un point fixe.*

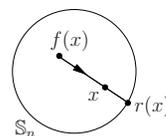
Démonstration. Si A est une partie d'un espace topologique X et $i : A \rightarrow X$ est l'inclusion, une rétraction de X dans A est une application continue $r : X \rightarrow A$ telle que $r \circ i = \text{id}_A$.

Lemme 1.3 *Il n'existe pas de rétraction $r : \mathbb{B}_{n+1} \rightarrow \mathbb{S}_n$.*

Démonstration. Sinon, par functorialité, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} & H_n(\mathbb{B}_{n+1}) & \\ H_n(i) \nearrow & & \searrow H_n(r) \\ H_n(\mathbb{S}_n) & \xrightarrow{\text{id}_{H_n(\mathbb{S}_n)}} & H_n(\mathbb{S}_n) \end{array}$$

Si $n > 0$, alors $H_n(\mathbb{B}_{n+1}) = 0$ et $H_n(\mathbb{S}_n) \neq 0$, donc $H_n(i)$ n'est pas injective, ce qui contredit l'injectivité de $\text{id}_{H_n(\mathbb{S}_n)}$. Si $n = 0$, alors $H_n(\mathbb{B}_{n+1}) = \mathbb{Z}$ et $H_n(\mathbb{S}_n) = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ donc $H_n(r)$ n'est pas surjective, ce qui contredit la surjectivité de $\text{id}_{H_n(\mathbb{S}_n)}$. \square



Le théorème de Brouwer est vrai pour $n = 0$. Soit $f : \mathbb{B}_{n+1} \rightarrow \mathbb{B}_{n+1}$ une application continue sans point fixe. Alors l'application $r : \mathbb{B}_{n+1} \rightarrow \mathbb{S}_n$ définie par $\{r(x)\} = \mathbb{S}_n \cap \{f(x) + t(x - f(x)) : t > 0\}$ est une rétraction, ce qui contredit le lemme. \square

1.2 Remarques sur les prérequis de topologie

On supposera connues les notions de topologie générale suivantes (voir l'appendice A, et les références [Bou, Dug, Dix, Pau2]). Seules les notions marquées d'une étoile (*) seront rappelées en cours. Au point de vue méthodologie, il est demandé de lire l'appendice, puis de lire la liste ci-dessous. Si une notion n'est pas claire, retourner à l'appendice.

topologie, espace topologique; ouverts, fermés; application continue entre espaces topologiques, homéomorphisme; topologie discrète, topologie grossière; topologie induite par une distance, espace topologique métrisable; voisinage d'une partie, d'un point d'un espace topologique; intérieur, adhérence, frontière, leurs propriétés élémentaires; topologie engendrée par un ensemble de parties, prébase, système fondamental de voisinages d'un point, base d'ouverts, critère pour qu'une prébase soit une base; topologie séparée; caractérisation des applications continues par les voisinages, les systèmes fondamentaux de voisinages, les adhérences; connexité, locale connexité, composante connexe; connexité par arcs, locale connexité par arcs, composante connexe par arcs;

comparaison de topologies : topologie plus fine, moins fine qu'une autre; topologie initiale sur un ensemble X (ou définie par une famille d'applications de X à valeurs dans des espaces topologiques); topologie finale sur un ensemble X (ou définie par une famille d'applications partant d'espaces topologiques à valeurs dans X); sous-espace topologique, point isolé; topologie somme disjointe (*); topologie produit (d'une famille quelconque d'espaces topologiques), ouvert élémentaire, propriétés élémentaires de la topologie produit (systèmes fondamentaux de voisinages, continuité des applications à valeurs dans un produit, associativité et commutativité de la topologie produit, adhérence des produits, un produit d'espaces séparés est séparé); topologie quotient (*), propriétés élémentaires de la topologie quotient (continuité de la projection canonique, continuité des applications définies sur un quotient, caractérisation de la séparation des quotients par les ouverts saturés); relation d'équivalence engendrée (*); cône (*), suspension (*), écrasement (*), recollement d'un espace topologique X sur un espace topologique Y par une application continue $f : X \rightarrow Y$ (*);

limite, caractérisation par les systèmes fondamentaux de voisinages, unicité si l'espace but est séparé, composition des limites, limites des applications à valeurs dans un produit; valeur d'adhérence, caractérisation de l'ensemble des valeurs d'adhérence, la limite est l'unique valeur d'adhérence si l'espace but est séparé;

recouvrement (ouvert, fermé), sous-recouvrement; espace compact (comme séparé et tout recouvrement ouvert admet un sous-recouvrement fini); caractérisation par les fermés, compacité des sous-espaces topologiques; un compact d'un séparé est fermé, un fermé d'un compact est compact; existence de valeur d'adhérence pour une application à valeurs dans un espace compact; théorème de Tychonov : un produit d'espaces compacts est un espace compact; espace localement compact; théorème de Riesz sur la locale compacité des espaces vectoriels normés; compactifié d'Alexandrov d'un espace localement compact (*); l'image d'un compact par une application continue à valeurs dans un espace séparé est compact; une application continue bijective d'un espace compact dans un espace séparé est un homéomorphisme; application propre (*); une application propre bijective entre espaces localement compacts est un homéomorphisme; topologie compacte-ouverte (*). (Et un raton laveur, comme dirait Prévert!)

Il est demandé de faire les exercices de l'appendice A pour se familiariser avec ces notions.

1.3 Remarques (pseudo-)historiques sur l'homologie

Nous concluons cette introduction en donnant une idée de l'origine historique de la notion d'homologie, voir [Pon, Die2] pour des précisions et compléments.

Les vrais débuts de l'homologie peuvent être attribués à H. Poincaré [Poi], quand la topologie algébrique s'appelait l'"analysis situs". Partant des travaux antérieurs sur les notions de "connexité", il a mis en évidence le concept de "bord", qui joue un rôle central en homologie.

Des arguments de connexité à la notion de bord

Les travaux d'Euler (1736, cas des graphes), de Möbius (1865, cas des surfaces) et de Riemann (1857)-Betti (1871) montrent que des arguments de connexité peuvent permettre de distinguer des espaces topologiques.

La connexité est un *invariant topologique*, au sens que l'image d'un espace connexe par une application continue est connexe (et donc si deux espaces topologiques n'ont pas le même nombre de composantes connexes, alors ils ne sont pas homéomorphes). Nous verrons d'ailleurs en la partie 5.2 que le 0-ème groupe d'homologie $H_0(X)$ d'un espace topologique X est le groupe abélien libre engendré par l'ensemble des composantes connexes par arcs de X . L'information apportée par $H_0(X)$ est donc essentiellement celle d'un nombre, le cardinal de l'ensemble des composantes connexes par arcs de X .

Parmi les arguments dit de connexité, il n'y a pas que le nombre de composantes connexes. Par exemple, \mathbb{R} et \mathbb{R}^2 ne sont pas homéomorphes, car \mathbb{R}^2 privé d'un point est connexe, mais \mathbb{R} privé d'un point ne l'est pas. Les espaces \mathbb{S}_1 (le cercle) et \mathbb{S}_2 (la sphère) ne sont pas homéomorphes, car \mathbb{S}_2 privé de deux points est connexe, mais \mathbb{S}_1 privé de deux points ne l'est pas. Les espaces \mathbb{S}_2 (la sphère) et $\mathbb{T}_2 = \mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1$ (le tore) ne sont pas homéomorphes. En effet, \mathbb{S}_2 privé de n'importe quelle courbe fermée simple n'est pas connexe (c'est le théorème de Jordan, voir le théorème 5.25 de la partie 5.3 pour une preuve utilisant l'homologie). Mais il existe au moins une courbe fermée simple γ dans \mathbb{T}_2 telle que $\mathbb{T}_2 - \gamma$ soit connexe (par exemple $\gamma = \{1\} \times \mathbb{S}_1$).

Pour généraliser (abstraire!) ces exemples élémentaires, il faut tout d'abord définir une classe d'objets sur laquelle pourra s'appliquer une généralisation. Les espaces topologiques comme les sphères \mathbb{S}_n et tores $\mathbb{T}_n = (\mathbb{S}_1)^n$ ressemblent vus de près à \mathbb{R}^n . Une *variété topologique* de dimension n est un espace topologique (en général supposé métrisable séparable, voir l'appendice pour des définitions de topologie générale) dans lequel tout point possède un voisinage homéomorphe à l'espace topologique usuel \mathbb{R}^n . Une *sous-variété (topologique) V'* d'une variété V est un sous-espace qui est une variété topologique. Si V' est de dimension p , sa *codimension* dans V est $n - p$. (Remarquons qu'il découle du théorème d'invariance du domaine de Brouwer 1.1 que l'entier n est bien défini, et (en utilisant la version plus forte 5.26) que $n - p \geq 0$.)

Ainsi Riemann et Betti définissent l'*ordre de connexion* d'une variété compacte connexe V comme le nombre maximal de sous-variétés compactes connexes de codimension 1 deux à deux disjointes dont la réunion ne disconnecte pas V . Sachant que toute variété compacte connexe de dimension 1 est homéomorphe au cercle \mathbb{S}_1 ,

on peut vérifier en exercice que l'ordre de connexion de la sphère S_2 est 0 et que celui du tore T_2 est 1.

Un point important à remarquer est que la collection des variétés topologiques n'est pas stable par découpage le long d'une sous-variété compacte connexe de codimension 1. Ce que l'on obtient est une *variété topologique à bord* de dimension $n \geq 1$, i.e. un espace métrisable séparable dans lequel tout point possède un voisinage homéomorphe à \mathbb{R}^n ou à son sous-espace $\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}$. Le *bord* d'une variété topologique à bord V est le sous-espace des points dont un voisinage est homéomorphe à un voisinage de 0 dans \mathbb{R}_+^n . Il découle du fait que $\mathbb{R}_+^n - \{0\}$ est contractile alors que $\mathbb{R}^n - \{0\}$ ne l'est pas qu'aucun voisinage de 0 dans \mathbb{R}_+^n n'est homéomorphe à un voisinage de 0 dans \mathbb{R}^n . Une variété topologique est une variété topologique à bord, de bord vide.

Du bord topologique à son algébrisation

Il est facile de voir que le bord d'une variété topologique à bord de dimension n est une variété topologique (sans bord) de dimension $n-1$. Ainsi Poincaré connaissait en 1895 le slogan fondateur de l'homologie :

“le bord d'un bord est vide.”

C'est l'algébrisation de ce fait qui donna la notion de complexe de chaînes (voir la partie 5.1) : un complexe de chaînes est une suite infinie

$$C_0 \xleftarrow{\partial_0} C_1 \xleftarrow{\partial_1} C_2 \xleftarrow{\partial_2} \dots \xleftarrow{\partial} C_n \xleftarrow{\partial_n} C_{n+1} \xleftarrow{\partial} \dots$$

avec C_i un groupe abélien et ∂_i un morphisme de groupes, appelé *opérateur bord*, tel que, pour tout n dans \mathbb{N} ,

$$\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0.$$

Le fait que les flèches aillent dans ce sens vient du fait que prendre le bord d'une variété topologique à bord diminue la dimension d'une unité.

Nous serons plus rapide pour donner la première définition de Poincaré des groupes abéliens C_n , voir [Poi]. Il s'aperçut successivement des faits suivants.

Les variétés topologiques à bord semblent encore ne pas être les bons objets. Car lorsque l'on découpe une variété topologique le long de plusieurs sous-variétés topologiques (pas forcément disjointes), l'objet obtenu porte des traces de découpages (que nous appellerons facettes), dont l'information serait importante à conserver, pour pouvoir éventuellement effectuer l'opération inverse de recollement. Comme un quart de plan (ou un huitième d'espace) est homéomorphe à un demi-plan (demi-espace), le monde purement topologique n'est pas assez riche. Les bons objets semblaient donc être les variétés différentiables à coins (et leurs facettes), dont nous ne donnerons pas la définition précise ici (voir [Poi]). En effet, Poincaré s'aperçut des difficultés (et du manque de généralité) de cette collection de sous-espaces. Il en changea dans son “Complément à l'analysis situs”, en travaillant dans des espaces triangulés ou cellulaires (voir la partie 4.3). Pour une généralité maximale, ils furent remplacés dans la suite par les simplexes singuliers (voir la partie 5.2).

Lorsque l'on découpe le long d'une sous-variété différentiable de codimension 1, celle-ci séparant localement en deux composantes connexes, les deux morceaux locaux obtenus après découpage ont une orientation naturelle de leur bord par la normale sortante, ces orientations étant opposées quand on identifie les bords par le recollement. L'opération de recollement faisant disparaître le bord, il paraît naturel d'attribuer un signe aux facettes (orientées) du bord, de sorte que si l'on change d'orientation, on change de signe. Il est donc utile de pouvoir compter les variétés à coins positivement, négativement, voire avec multiplicité.

Ainsi Poincaré introduisit le groupe C_p des sommes formelles finies avec multiplicités (appelées *chaînes*) de sous-variétés différentiables à coins connexes compactes orientées de dimension p dans une variété différentiable V donnée :

$$\sum_{i=1}^k n_i V_i$$

avec $n_i \in \mathbb{Z}$ et V_i des sous-variétés différentiables à coins connexes compactes orientées de dimension p , où l'on identifie V'_i et $-V_i$ si V'_i est munie de l'orientation opposée à celle de V_i .

L'opérateur bord alors introduit par Poincaré est l'unique application linéaire $\partial_{n+1} : C_{n+1} \rightarrow C_n$ telle que ∂V_i soit la somme (finie) formelle des facettes de codimension 1 de V_i , orientées par la normale sortante. Une chaîne est un *cycle* si son image par l'opérateur bord est nul, et est un *bord* si elle est l'image par l'opérateur bord d'une chaîne. On vérifie que $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$, c'est-à-dire que tout bord est un cycle.

Ce n'est en fait que vingt ans plus tard environ que Emmy Noether définira les groupes qui mesurent l'obstruction pour un cycle d'être un bord :

$$H_p(V, \mathbb{Z}) = \text{Ker } \partial_{p-1} / \text{Im } \partial_p$$

est le groupe abélien quotient du groupe des cycles de dimension p par son sous-groupe des bords de dimension p . Ainsi, tout cycle σ définit un élément $[\sigma]$ dans $H_p(V, \mathbb{Z})$, appelée sa *classe d'homologie*. Un cycle est un bord si et seulement si sa classe d'homologie est nulle.

La formulation axiomatique de l'homologie

Une formulation axiomatique fut donnée par Eilenberg et Steenrod, vers 1950. Une *théorie de l'homologie* est la donnée, pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'un “foncteur (covariant) de la catégorie des paires d'espaces topologiques dans la catégorie des groupes abéliens” (voir la partie 5.1) i.e. la donnée

- pour toute *paire d'espaces topologiques* (X, Y) (i.e. d'un espace topologique X muni d'un sous-espace Y), d'un groupe abélien $H_n(X, Y)$, et
- pour tout *morphisme de paires d'espaces topologiques* $f : (X, Y) \rightarrow (X', Y')$ (i.e. (X, Y) et (X', Y') sont deux paires d'espaces topologiques et $f : X \rightarrow X'$ est une application continue telle que $f(Y) \subset Y'$), d'un morphisme de groupes $f_n : H_n(X, Y) \rightarrow H_n(X', Y')$

telle que $\text{id}_n = \text{id}$ et $(g \circ f)_n = g_n \circ f_n$ pour tous les morphismes de paires d'espaces topologiques $f : (X, Y) \rightarrow (X', Y')$ et $g : (X', Y') \rightarrow (X'', Y'')$, qui satisfait les axiomes suivants (où l'on note $X = (X, \emptyset)$ pour simplifier).

1. Invariance par homotopie

Si $f, g : (X, Y) \rightarrow (X', Y')$ sont deux morphismes de paires d'espaces topologiques *homotopes* (i.e. s'il existe un morphisme de paires d'espaces topologiques $h : ([0, 1] \times X, [0, 1] \times Y) \rightarrow (X', Y')$ tel que $h(0, x) = f(x)$ et $h(1, x) = g(x)$ pour tout x dans X), alors $f_n = g_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Existence d'opérateurs bords

Il existe, pour tout n dans $\mathbb{N} - \{0\}$ et toute paire d'espaces topologiques (X, Y) , un morphisme de groupes $\delta_n : H_n(X, Y) \rightarrow H_{n-1}(Y)$ tel que

– $\delta_n \circ f_n = f_{n-1} \circ \delta_n$ pour tout morphisme de paires d'espaces topologiques $f : (X, Y) \rightarrow (X', Y')$ et tout n dans $\mathbb{N} - \{0\}$,

– en notant $Y \xrightarrow{i} X \xrightarrow{j} (X, Y)$ les inclusions, la suite de groupes abéliens et de morphismes de groupes

$$\dots \rightarrow H_{n+1}(X, Y) \xrightarrow{\delta_{n+1}} H_n(Y) \xrightarrow{i_n} H_n(X) \xrightarrow{j_n} H_n(X, Y) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(Y) \rightarrow \dots$$

est exacte.

3. Excision

Si $f : (X, Y) \rightarrow (X/\langle Y \rangle, Y/\langle Y \rangle)$ est le morphisme canonique (voir l'exemple (3) suivant l'exercice E.A.88 pour la définition de l'espace topologique $X/\langle Y \rangle$, qui se décrit comme l'espace X où Y a été écrasé en un point), alors $f_n : H_n(X, Y) \rightarrow H_n(X/\langle Y \rangle, Y/\langle Y \rangle)$ est un isomorphisme de groupes pour tout n dans \mathbb{N}

4. Normalisation

Si X est réduit à un point, alors

$$H_n(X) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Une grande partie du travail qui suit dans la construction de théories de l'homologie sera de vérifier (la plupart de) ces axiomes, mais nous ne nous intéresserons pas au problème de l'unicité abstraite de théories de l'homologie (voir par exemple [Spa]), préférant montrer directement les égalités des (peu nombreuses!) différentes théories de l'homologie que nous construisons, car la preuve de leur coïncidence est parfois utile.

De l'homologie à l'homotopie

Les groupes d'homologie introduits par Poincaré lui apparaissent être des invariants topologiques extrêmement intéressants. Par exemple, il découle du théorème de classification des surfaces (par les travaux de Möbius, Jordan et Rado) que deux surfaces topologiques compactes connexes sont homéomorphes si et seulement si leurs groupes d'homologie sont isomorphes (voir par exemple la partie 5.4).

Mais Poincaré s'aperçut (après quelques errements!) que cet invariant n'était pas aussi puissant qu'il l'avait espéré. Il construisit par exemple, vers l'année 1900, une variété compacte de dimension 3 (et même une infinité!), ayant ses groupes d'homologie isomorphes à ceux de la sphère \mathbb{S}_3 , mais non homéomorphe à \mathbb{S}_3 . Pour distinguer ces exemples de la sphère \mathbb{S}_3 , il introduisit un nouvel invariant topologique, le *groupe fondamental* d'un espace topologique X , qui repose sur les différentes manières de dessiner et déformer continuellement des courbes fermées sur X (voir la partie 2.2). Ces notions intuitives de déformations continues sont formalisées par la notion d'homotopie (voir la partie 2.1).

Par exemple, une courbe fermée simple sur une variété topologique est *homologue à zéro* si elle est le bord d'une chaîne de dimension 2 (voir ce qui précède). Elle est dite *homotope à zéro* si elle est déformable continuellement en un point. Un espace topologique X dans lequel toute courbe fermée est homotope à zéro (plus précisément dans lequel toute application continue $f : \mathbb{S}_1 \rightarrow X$ du cercle dans X s'étend continuellement en une application continue $\tilde{f} : \mathbb{B}_2 \rightarrow X$ du disque dans X) est dit *simplement connexe* (voir la partie 2.2).

C'est ainsi que Poincaré formula ce que l'on appelle maintenant la *conjecture de Poincaré*.

Conjecture 1.4 *Toute variété topologique de dimension 3 compacte, connexe et simplement connexe, est homéomorphe à la sphère \mathbb{S}_3 .*

Cette conjecture faisait partie de la liste de six grands problèmes de mathématiques, dont la résolution avait été dotée en l'an 2000 d'un prix d'un million de dollars. Elle a été récemment résolue, suite à des articles non publiés de G. Perelman, par les travaux collectifs de la communauté mathématique (voir par exemple [KL, CZ, MT, BBBMP]).

Remerciements : Je suis reconnaissant à Bruno Calado pour sa relecture scrupuleuse et enthousiaste de l'intégralité de la première version de ce texte.

2 Homotopie et groupe fondamental

L'exercice suivant sera souvent utilisé (de manière implicite) dans cette section :

Exercice E.1 Soient X et Y deux espaces topologiques, $(F_i)_{i \in I}$ un recouvrement fermé fini de X , et $f_i : F_i \rightarrow Y$ une application continue pour tout i . Si f_i et f_j coïncident sur $F_i \cap F_j$ pour tous i, j , alors il existe une et une seule application continue $f : X \rightarrow Y$ égale à f_i sur F_i pour tout i .

2.1 Homotopie

Soient X et Y deux espaces topologiques. Deux applications continues $f, g : X \rightarrow Y$ sont *homotopes* s'il existe une application continue $h : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ telle que $h(x, 0) = f(x)$ et $h(x, 1) = g(x)$ pour tout x dans X . On notera alors $f \sim g$, et on dira que h est une *homotopie* entre f et g . Pour tout t dans $[0, 1]$, on notera aussi $h_t : X \rightarrow Y$ l'application $h_t(x) = h(x, t)$.

Si A est une partie de X , deux applications continues $f, g : X \rightarrow Y$ sont *homotopes relativement à A* s'il existe une application continue $h : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ telle que $h(x, 0) = f(x)$ et $h(x, 1) = g(x)$ pour tout x dans X , et $h(a, t) = f(a)$ pour tout a dans A et t dans $[0, 1]$.

On notera alors $f \sim g$ rel A , et on dira que h est une *homotopie relative* à A entre f et g .

Il est immédiat que \sim est une relation d'équivalence sur $\mathcal{C}(X, Y)$. En effet, $f \sim f$ par l'homotopie constante $h(x, s) = f(x)$; si $f \sim g$ par l'homotopie h , alors $g \sim f$ par l'homotopie inverse $\bar{h}(x, s) = h(x, 1-s)$; si $f_1 \sim f_2$ par l'homotopie h_1 et $f_2 \sim f_3$ par l'homotopie h_2 , alors $f_1 \sim f_3$ par l'homotopie composée

$$h_3(x, s) = \begin{cases} h_1(x, 2s) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ h_2(x, 2s-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

De même, \sim rel A est une relation d'équivalence sur tout ensemble d'applications continues de X dans Y qui coïncident sur A .

Exercice E.2 (Voir l'exercice E.A.94.) Si X est localement compact, deux applications continues f et g de X dans Y sont homotopes si et seulement s'il existe un chemin (continu, voir la partie 2.2) entre f et g dans $\mathcal{C}(X, Y)$ (l'ensemble des applications continues de X dans Y , muni de la topologie compacte-ouverte).

Un espace topologique X est *contractile* s'il est non vide et si l'application identique de X est homotope à une application constante de X dans X .

Par exemple, un convexe non vide C dans un *espace vectoriel topologique* (i.e. un espace vectoriel sur un corps topologique, tel que l'addition et la multiplication externe soient des applications continues) est contractile : si $x_0 \in C$, alors l'application $(x, s) \mapsto (1-s)x + sx_0$ de $C \times [0, 1]$ dans C est une homotopie entre id_C et $x \mapsto x_0$.

Cette notion est importante, car la plupart des espaces topologiques que l'on rencontre sont *localement contractile*, i.e. admettent un système fondamental de voisinages contractiles. C'est en particulier le cas des espaces vectoriels topologiques, des variétés topologiques (i.e. les espaces topologiques X , en général supposés métrisables séparables, tels que pour tout x dans X , il existe $n \in \mathbb{N}$ et V un voisinage de x dans X , tels que V soit homéomorphe à \mathbb{R}^n), des CW-complexes (voir la partie 4.3), des complexes simpliciaux (voir par exemple [Spa]).

Un espace topologique est *simplement connexe* s'il est connexe par arcs et si toute application continue du cercle \mathbb{S}_1 dans X se prolonge (continuellement) à une application du disque \mathbb{B}_2 dans X .

Exercice E.3 Montrer qu'un espace contractile est simplement connexe.

Soient X et Y deux espaces topologiques. Une application continue $f : X \rightarrow Y$ est une *équivalence d'homotopie* s'il existe $g : Y \rightarrow X$ continue telle que $f \circ g$ soit homotope à l'application identique de Y et $g \circ f$ soit homotope à l'application identique de X . S'il existe une équivalence d'homotopie entre X et Y , on dit que X et Y ont le même *type d'homotopie*.

Avoir même type d'homotopie est une relation d'équivalence sur tout ensemble d'espaces topologiques.

L'intérêt de la notion d'équivalence d'homotopie vient du fait que la plupart des invariants de topologie algébrique que nous construirons (groupe fondamental (partie 2.2), homologie singulière (partie 5.2),...) sont non seulement des invariants topologiques, mais aussi des invariants homotopiques (i.e. tels que les invariants associés à deux espaces topologiques ayant même type d'homotopie soient isomorphes).

Exemple : Un espace topologique non vide est contractile si et seulement s'il a le même type d'homotopie qu'un singleton.

Soient X un espace topologique et A un sous-espace. On dit que A est un *rétracte* de X s'il existe une application continue $r : X \rightarrow A$ telle que $r \circ i = id_A$. On dit que A est un *rétracte de X par déformation* si de plus $i \circ r$ est homotope à id_X . On dit que A est un *rétracte de X par déformation forte* si de plus $i \circ r$ est homotope à id_X relativement à A . On dit que r est respectivement une *rétraction*, *rétraction par déformation*, *rétraction par déformation forte*.

Si A est un rétracte par déformation de X , alors A et X ont le même type d'homotopie.

Exemples : (1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la sphère \mathbb{S}_n est un rétracte par déformation forte de $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$. En effet, si $i : \mathbb{S}_n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ est l'inclusion et si $r : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{S}_n$ est définie par $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$, alors $r \circ i = id_{\mathbb{S}_n}$ et $i \circ r$ est homotope à l'application identique de $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ par l'homotopie $h(x, s) = sx + (1-s)\frac{x}{\|x\|}$, qui fixe \mathbb{S}_n . En particulier, l'inclusion i de \mathbb{S}_{n-1} dans $\mathbb{R}^n - \{0\}$ est une équivalence d'homotopie, et \mathbb{S}_{n-1} et $\mathbb{R}^n - \{0\}$ ont le même type d'homotopie.

(2) Si X est un espace topologique, Y un espace contractile et y un point de Y , alors $X \times \{y\}$ est un rétracte par déformation forte de $X \times Y$. (Donc $X \times Y$ et X ont le même type d'homotopie.)

(3) Par le lemme 1.3, la sphère \mathbb{S}_n n'est pas un rétracte de la boule \mathbb{B}_{n+1} .

2.2 Groupe fondamental

Composition et homotopie des chemins

Soit X un espace topologique. Un *chemin* dans X est une application continue $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$; son *origine* est $x = \alpha(0)$, son *extrémité* est $y = \alpha(1)$; on dit aussi que α est un chemin *joignant* x à y .

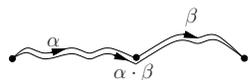
Pour x dans X , on appelle *chemin constant en x* le chemin c_x avec $c_x(t) = x$ pour tout t dans $[0, 1]$.

Si α est un chemin joignant x à y , on appelle *chemin inverse* de α le chemin $\bar{\alpha}$, joignant y à x , défini par $\bar{\alpha}(t) = \alpha(1-t)$ pour tout t dans $[0, 1]$.



Soient α et β deux chemins dans X tels que $\alpha(1) = \beta(0)$. On note $\alpha \cdot \beta$ le chemin

$$t \mapsto \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \beta(2t-1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$



On dit que $\alpha \cdot \beta$ est le chemin *composé* (*concaténé*) de α et β . Deux chemins α et β sont *composables* si l'extrémité de α est l'origine de β . L'application $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \cdot \beta$ de l'ensemble des couples de chemins composables dans l'ensemble des chemins s'appelle la *composition* (ou *concaténation*) des chemins.

Deux chemins α et β dans X d'origine x_0 et d'extrémité x_1 sont *homotopes* (on dit parfois *homotopes relativement aux extrémités* s'il y a risque de confusion), et on note $\alpha \sim \beta$ (et $\alpha \sim \beta$ rel $0, 1$ s'il y a risque de confusion), si les applications α, β de $[0, 1]$ dans X sont homotopes relativement à la partie $\{0, 1\}$ de $[0, 1]$, c'est-à-dire s'il existe une application continue $h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ telle que

- $h(t, 0) = \alpha(t)$ et $h(t, 1) = \beta(t)$ pour tout t dans $[0, 1]$,
- $h(0, s) = x_0$ et $h(1, s) = x_1$ pour tout s dans $[0, 1]$.

Une telle application h est appelée une *homotopie* de α à β (on dit parfois *homotopie relative* s'il y a risque de confusion). On note $[\alpha]$ la classe d'homotopie (relativement aux extrémités) d'un chemin α .

Le résultat suivant donne les principales propriétés de la composition et de l'homotopie des chemins.

Lemme 2.1 Soient $\alpha, \beta, b, c, \gamma$ des chemins de X .

1. Si $\alpha \sim \beta$, alors $\bar{\alpha} \sim \bar{\beta}$.
2. Si $c \sim \alpha$, $b \sim \beta$ et $c(1) = b(0)$, alors $c \cdot b \sim \alpha \cdot \beta$.

3. Soient α un chemin joignant x à y , β un chemin joignant y à z , γ un chemin joignant z à w . Alors les chemins $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$ et $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$ sont homotopes.

4. Si α est un chemin joignant x à y , alors $c_x \cdot \alpha$ et $\alpha \cdot c_y$ sont homotopes à α .

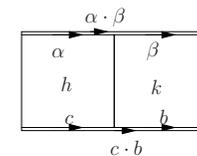
5. Si α est un chemin joignant x à y , alors $\alpha \cdot \bar{\alpha}$ et $\bar{\alpha} \cdot \alpha$ sont homotopes à c_x et c_y respectivement.

Démonstration. (1) Si h est une homotopie relative de α à β , alors $(t, s) \mapsto h(1-t, s)$ est une homotopie relative de $\bar{\alpha}$ à $\bar{\beta}$.

(2) Soit h une homotopie relative de c à α et k une homotopie relative de b à β . Alors l'application

$$(t, s) \mapsto \begin{cases} h(2t, s) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ k(2t-1, s) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

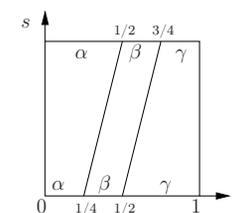
est une homotopie relative de $c \cdot b$ à $\alpha \cdot \beta$.



(3) L'application

$$(t, s) \mapsto \begin{cases} \alpha(\frac{4t}{1+s}) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1+s}{4} \\ \beta(4t-s-1) & \text{si } \frac{1+s}{4} \leq t \leq \frac{2+s}{4} \\ \gamma(\frac{4t-s-2}{2-s}) & \text{si } \frac{2+s}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

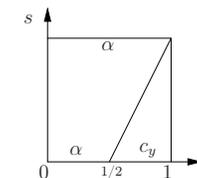
est une homotopie relative de $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$ à $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$.



(4) L'application

$$(t, s) \mapsto \begin{cases} \alpha(\frac{2t}{1+s}) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1+s}{2} \\ y & \text{si } \frac{1+s}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

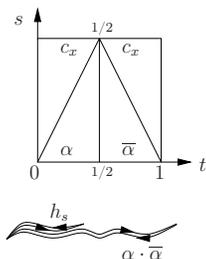
est une homotopie relative de $\alpha \cdot c_y$ à α . On construit de même une homotopie relative de $c_x \cdot \alpha$ à α .



(5) L'application

$$h : (t, s) \mapsto \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{s}{2} \\ \alpha(2t - s) & \text{si } \frac{s}{2} \leq t \leq \frac{s}{2} + \frac{1-s}{2} \\ \alpha(2 - 2t - s) & \text{si } \frac{s}{2} + \frac{1-s}{2} \leq t \leq \frac{1+s}{2} \\ x & \text{si } \frac{1+s}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

est une homotopie relative de $\alpha \cdot \bar{\alpha}$ à c_x . On construit de même une homotopie relative de $\bar{\alpha} \cdot \alpha$ à c_y .



□

Lacets et groupe fondamental

Soit x un point de X . Un *lacet* en x dans X est un chemin dans X d'origine et d'extrémité x . Le point x est appelé le *point base* de ce lacet. Les chemins constants sont des lacets, et le chemin inverse d'un lacet est un lacet. Deux lacets sont *homotopes* s'ils sont homotopes en tant que chemin (donc relativement à leur point base).

Sur l'ensemble $L(X, x)$ des lacets en x , la relation "être homotope" est une relation d'équivalence, d'ensemble quotient noté $\pi_1(X, x)$.

La composition des chemins, restreinte aux lacets en x , est une loi de composition interne sur $L(X, x)$, qui (par le lemme 2.1 (2)) passe au quotient en une loi de composition interne sur $\pi_1(X, x)$.

Proposition 2.2 *La composition des chemins induit une structure de groupe sur l'ensemble $\pi_1(X, x)$ des classes d'homotopie de lacets dans X de base x .*

Démonstration. L'associativité découle du lemme 2.1 (3). La classe du lacet constant en x est élément neutre par le lemme 2.1 (4). Si $[c]$ est une classe dans $\pi_1(X, x)$, la classe de \bar{c} ne dépend pas du choix du représentant c de $[c]$ par le lemme 2.1 (1). Et $[\bar{c}]$ est l'inverse de $[c]$ pour la loi de $\pi_1(X, x)$ par le lemme 2.1 (5). □

Le groupe $\pi_1(X, x)$ s'appelle le *groupe fondamental* de X en x (ou *groupe de Poincaré*, ou *premier groupe d'homotopie*).

Changement de point base

Rappelons que par le lemme 2.1 (3), si $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont des chemins consécutifs composables, alors la classe $[\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_n]$ ne dépend pas des parenthésages.

Proposition 2.3 *Soit c un chemin d'origine x et d'extrémité y dans X . L'application $\phi_c : [\alpha] \mapsto [c \cdot \alpha \cdot \bar{c}]$ est un isomorphisme de groupes de $\pi_1(X, y)$ dans $\pi_1(X, x)$, qui ne dépend que de la classe d'homotopie (relativement aux extrémités) de c . Si ℓ est un autre chemin joignant x à y , alors les isomorphismes ϕ_c et ϕ_ℓ sont conjugués.*

Démonstration. En effet,

$$\phi_c([\alpha \cdot \beta]) = [c \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \bar{c}] = [c \cdot \alpha \cdot \bar{c} \cdot c \cdot \beta \cdot \bar{c}] =$$

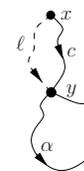
$$[c \cdot \alpha \cdot \bar{c}] [c \cdot \beta \cdot \bar{c}] = \phi_c([\alpha]) \phi_c([\beta]).$$

De plus, $\phi_{\bar{c}} = \phi_c^{-1}$, et si g est la classe du lacet $\ell \cdot \bar{c}$ de base x , alors

$$\phi_\ell([\alpha]) = [\ell \cdot \alpha \cdot \bar{\ell}] = [\ell \cdot \bar{c} \cdot c \cdot \alpha \cdot \bar{c} \cdot c \cdot \bar{\ell}] =$$

$$[\ell \cdot \bar{c}] [c \cdot \alpha \cdot \bar{c}] [\ell \cdot \bar{c}]^{-1} = g \phi_c([\alpha]) g^{-1}.$$

□



Corollaire 2.4 *Si X est connexe par arcs, et $x, y \in X$, alors $\pi_1(X, x)$ et $\pi_1(X, y)$ sont isomorphes. Si $\pi_1(X, x)$ est abélien, cet isomorphisme est canonique.* □

On notera souvent $\pi_1(X, x_0)$ par $\pi_1 X$, quand un point base x_0 de X est sous-entendu et indifférent. La proposition précédente laisse penser que cet abus de notation ne pose que peu de problèmes. Mais "peu de problèmes" ne signifie pas "pas de problèmes", et du soin est nécessaire en ce qui concerne le traitement des points bases.

Exercice E.4 *Soit $(X_i, x_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques pointés. Montrer que les groupes $\pi_1(\prod_{i \in I} X_i, (x_i)_{i \in I})$ et $\prod_{i \in I} \pi_1(X_i, x_i)$ sont isomorphes. En particulier,*

$$\pi_1(X \times Y, (x, y)) \simeq \pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y).$$

Propriété fonctorielle du groupe fondamental

Soient X et Y deux espaces topologiques, et $f : X \rightarrow Y$ une application continue. Si c est un chemin joignant x à y , alors $f \circ c$ est un chemin joignant $f(x)$ à $f(y)$. La composition $c \mapsto f \circ c$ est compatible avec l'homotopie (relativement aux extrémités) des chemins :

si α et β sont homotopes, alors $f \circ \alpha$ et $f \circ \beta$ aussi,

(car $f \circ h : [0, 1]^2 \rightarrow Y$ est une homotopie entre $f \circ \alpha$ et $f \circ \beta$ si $h : [0, 1]^2 \rightarrow X$ est une homotopie entre α et β) et avec la composition des chemins :

$$f \circ (\alpha \cdot \beta) = (f \circ \alpha) \cdot (f \circ \beta).$$

Le résultat suivant en découle.

Proposition 2.5 *Une application continue $f : X \rightarrow Y$ induit un morphisme de groupes $f_* : [\alpha] \mapsto [f \circ \alpha]$ de $\pi_1(X, x)$ dans $\pi_1(Y, f(x))$.* □

De plus, si f est l'application identique de X , alors f_* est l'application identique de $\pi_1(X, x)$; si g est une application continue de Y dans un espace topologique Z , alors $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

Avec les définitions de la partie 5.1, la collection des espaces topologiques pointés (X, x) est la collection des objets d'une catégorie, de morphismes $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$ les applications continues $f : X \rightarrow Y$ telles que $f(x) = y$. La donnée, pour tout espace topologique pointé (X, x) du groupe $\pi_1(X, x)$, et, pour tout morphisme d'espaces topologiques pointés $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$, du morphisme de groupes $f_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, y)$, est un foncteur (covariant) de la catégorie des espaces topologiques pointés dans la catégorie des groupes.

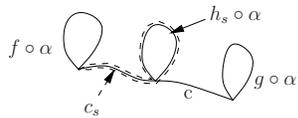
Groupe fondamental et homotopie

Proposition 2.6 Soient $f, g : X \rightarrow Y$ deux applications continues homotopes. Pour tout x dans X , il existe un isomorphisme de groupes $u : \pi_1(Y, g(x)) \rightarrow \pi_1(Y, f(x))$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} & \pi_1(Y, f(x)) & \\ & \nearrow f_* & \\ \pi_1(X, x) & & \uparrow u \\ & \searrow g_* & \\ & \pi_1(Y, g(x)) & \end{array}$$

Si f et g sont homotopes relativement à $\{x\}$, alors $f_* = g_*$.

Démonstration. Soit h une homotopie entre f et g . Soit c le chemin $s \mapsto h_s(x) = h(x, s)$ dans Y entre $f(x)$ et $g(x)$. Par la proposition 2.3, l'application $u : [\beta] \mapsto [c \cdot \beta \cdot \bar{c}]$ est un isomorphisme de $\pi_1(Y, g(x))$ dans $\pi_1(Y, f(x))$. Pour montrer que $f_* = u \circ g_*$, il suffit de montrer que pour tout lacet α d'origine x dans X , les lacets $(c \cdot (g \circ \alpha)) \cdot \bar{c}$ et $f \circ \alpha$ sont homotopes (relativement aux extrémités).



Pour tout s dans $[0, 1]$, considérons le chemin $c_s : t \mapsto h(x, st)$. L'application $(s, t) \mapsto ((c_s \cdot (h_s \circ \alpha)) \cdot \bar{c}_s)(t)$ est continue. En $s = 0$, elle vaut $(c_{f(x)} \cdot (f \circ \alpha)) \cdot c_{f(x)}$ (où $c_{f(x)}$ est l'application constante en $f(x)$), qui est homotope à $f \circ \alpha$. En $s = 1$, elle vaut $(c \cdot (g \circ \alpha)) \cdot \bar{c}$. \square

Corollaire 2.7 Si $f : X \rightarrow Y$ est une équivalence d'homotopie, alors $f_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, f(x))$ est un isomorphisme de groupes.

Démonstration. Soit $g : Y \rightarrow X$ une application continue telle que $f \circ g$ et $g \circ f$ soient homotopes à l'identité. Par la proposition précédente et les propriétés fonctorielles, $f_* \circ g_*$ et $g_* \circ f_*$ sont des isomorphismes de groupes. Donc f_* est surjective et injective. \square

Corollaire 2.8 Les groupes fondamentaux de deux espaces connexes par arcs, ayant même type d'homotopie, sont isomorphes. \square

Corollaire 2.9 Tout groupe fondamental d'espace contractile est trivial. \square

Soient X un espace topologique et $x \in X$. Nous identifions l'espace topologique quotient $[0, 1]/\{\{0, 1\}\}$ (voir l'exemple (3) suivant l'exercice E.A.88) avec $\mathbb{S}_1 \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ par l'homéomorphisme $[\theta] \mapsto e^{2i\pi\theta}$. À tout lacet α dans X d'origine x est ainsi associée une application continue, encore notée α , de \mathbb{S}_1 dans X telle que $\alpha(1) = x$.

Si α est un lacet de X , on appelle *classe d'homotopie relative* la classe d'homotopie relativement à $\{1\}$ de l'application continue $\alpha : \mathbb{S}_1 \rightarrow X$ ainsi définie, et, pour distinguer, *classe d'homotopie libre* la classe d'homotopie de l'application continue $\alpha : \mathbb{S}_1 \rightarrow X$ ainsi définie.

La proposition suivante est souvent utilisée pour vérifier ou utiliser l'annulation d'une classe d'homotopie.

Proposition 2.10 Soit $\alpha : \mathbb{S}_1 \rightarrow X$ une application continue, telle que $\alpha(1) = x$. Alors $[\alpha] = 1$ dans $\pi_1(X, x)$ si et seulement si α s'étend continuellement en une application continue $\mathbb{B}_2 \rightarrow X$.

Démonstration. Si α s'étend continuellement en $f : \mathbb{B}_2 \rightarrow X$, si $i : \mathbb{S}_1 \rightarrow \mathbb{B}_2$ est l'inclusion, alors, par fonctorialité, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & \pi_1(\mathbb{B}_2, 1) & \\ & \nearrow i_* & \downarrow f_* \\ \pi_1(\mathbb{S}_1, 1) & \xrightarrow{\alpha_*} & \pi_1(X, x) \end{array}$$

Or si $\beta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}_1 = [0, 1]/\{\{0, 1\}\}$ est le lacet induit par passage au quotient de l'identité de $[0, 1]$, alors $\alpha_*[\beta] = [\alpha]$. Comme $\pi_1(\mathbb{B}_2, 1) = \{1\}$, ceci montre le résultat.

Réciproquement, si $[\alpha] = 1$, alors soit $h : \mathbb{S}_1 \times [0, 1] \rightarrow X$ une homotopie entre α et l'application constante. Alors h factorise en une application continue de l'espace topologique quotient

$$Y = (\mathbb{S}_1 \times [0, 1]) / (\mathbb{S}_1 \times \{1\})$$

à valeurs dans X . Or Y est homéomorphe au disque, par un homéomorphisme valant l'identité sur \mathbb{S}_1 , en identifiant \mathbb{S}_1 avec un sous-espace de Y par l'application induite par $x \mapsto (x, 0)$. \square

Exercice E.5 Soient X un espace connexe par arcs et x un point de X . On note $[\mathbb{S}_1, X]$ l'ensemble des classes d'homotopies d'applications du cercle \mathbb{S}_1 dans X . Montrer que l'application de $\pi_1(X, x)$ dans $[\mathbb{S}_1, X]$ qui à la classe d'homotopie relative d'un lacet α associe la classe d'homotopie libre de l'application α de \mathbb{S}_1 dans X , est surjective et induit une bijection de l'ensemble des classes de conjugaison du groupe $\pi_1(X, x)$ sur $[\mathbb{S}_1, X]$.

Exercice E.6 Soit X un espace connexe par arcs. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- X est simplement connexe ;
- il existe x dans X tel que $\pi_1(X, x) = 0$;
- $\pi_1(X, x) = 0$ pour tout x dans X ;
- deux chemins de même origine et même extrémité sont homotopes (relativement aux extrémités).

Proposition 2.11 Soient X un espace topologique, U et V deux ouverts connexes par arcs de X , tel que $X = U \cup V$ et tel que $U \cap V$ soit connexe par arcs. Pour tout x dans $U \cap V$, si $i : U \rightarrow X$ et $j : V \rightarrow X$ sont les inclusions, alors $i_*\pi_1(U, x) \cup j_*\pi_1(V, x)$ engendre $\pi_1(X, x)$. En particulier, si U et V sont de plus simplement connexes d'intersection non vide, alors X est simplement connexe.

Démonstration. Soit α un lacet en x . Par compacité de $[0, 1]$ et continuité de α , il existe $n \in \mathbb{N}$ non nul tel que $\alpha(\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n})$ soit contenu dans U ou dans V pour tout $i = 0, \dots, n-1$. Pour tout $i = 0, \dots, n$, soit c_i un chemin entre x et $\alpha(\frac{i}{n})$, contenu dans $U, V, U \cap V$ si $\alpha(\frac{i}{n})$ appartient à $U, V, U \cap V$ respectivement (ce qui est possible car $U, V, U \cap V$ sont connexes par arcs), avec c_0 et c_n constants. On note α_i le chemin $t \mapsto \alpha(\frac{i+t}{n})$. Par le lemme 2.1, le lacet α en x est homotope à

$$(\overline{c_0} \cdot \alpha_0 \cdot c_1) \cdot (\overline{c_1} \alpha_1 \cdot c_2) \cdot \dots \cdot (\overline{c_{n-2}} \cdot \alpha_{n-2} \cdot c_{n-1}) \cdot (\overline{c_{n-1}} \cdot \alpha_{n-1} \cdot c_n).$$

Pour $i = 0, \dots, n-1$, le chemin $\overline{c_i} \cdot \alpha_i \cdot c_{i+1}$, est un lacet en x contenu dans U ou dans V . Donc $i_*\pi_1(U, x) \cup j_*\pi_1(V, x)$ engendre $\pi_1(X, x)$.

Montrons la dernière assertion. Si $U \cap V$ est non vide, alors X est connexe par arcs. Si U et V sont simplement connexes, alors chaque $\overline{c_i} \cdot \alpha_i \cdot c_{i+1}$ est homotope au lacet constant en x . Donc α est homotope au lacet constant en x . Par conséquent, X est simplement connexe. \square

Corollaire 2.12 Pour $n \geq 2$, la sphère \mathbb{S}_n est simplement connexe.

Démonstration. Elle s'écrit comme réunion de l'ouvert U complémentaire du pôle nord, et de l'ouvert V complémentaire du pôle sud. Les ouverts U, V sont contractibles, donc simplement connexes. L'intersection $U \cap V$ se rétracte par déformation forte sur l'équateur \mathbb{S}_{n-1} , qui est connexe par arcs si $n \geq 2$. \square

Corollaire 2.13 Pour $n \geq 1$, l'espace projectif complexe $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ est simplement connexe.

Démonstration. On rappelle que pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, l'espace projectif complexe de dimension n est l'espace des droites complexes de \mathbb{C}^{n+1}

$$\mathbb{P}_n(\mathbb{C}) = (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})/\mathbb{C}^*.$$

On raisonne par récurrence sur n . D'après l'exercice E.A.97, la droite projective $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ est homéomorphe à la sphère \mathbb{S}_2 . Donc

$$\pi_1(\mathbb{P}_1(\mathbb{C})) = 0.$$

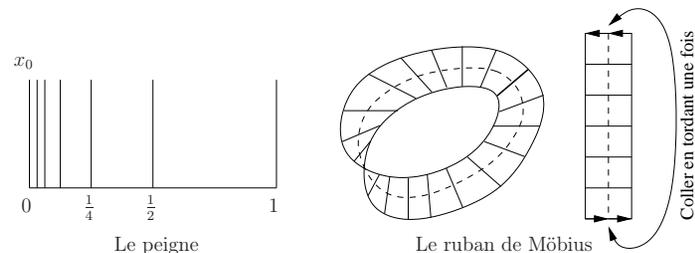
On suppose maintenant $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ simplement connexe. Si $f : \partial\mathbb{B}_{2n+2} = \mathbb{S}_{2n+1} \rightarrow \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ est la projection canonique, alors le recollement $\mathbb{B}_{2n+2} \cup_f \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ est homéomorphe à $\mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{C})$ (voir l'exercice E.A.97). L'intérieur $\overset{\circ}{\mathbb{B}}_{2n+2}$ de \mathbb{B}_{2n+2} est un ouvert U de $\mathbb{B}_{2n+2} \cup_f \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$. Le complémentaire de l'origine de \mathbb{B}_{2n+2} est un ouvert V de $\mathbb{B}_{2n+2} \cup_f \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$. Comme U est contractile, et V se rétracte par déformation forte sur $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$, donc est simplement connexe, la proposition 2.11 montre que $\mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{C})$ est simplement connexe. \square

2.3 Autres exercices

Exercice E.7 On appelle *peigne* le sous-espace topologique X de \mathbb{R}^2 suivant :

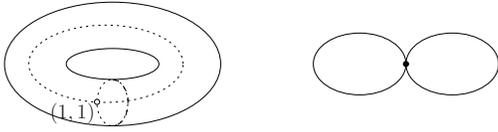
$$X = [0, 1] \times \{0\} \cup \bigcup_{\alpha \in \{0\} \cup \{2^{-n} : n \in \mathbb{N}\}} \{\alpha\} \times [0, 1].$$

Montrer que le peigne est contractile. Soit $x_0 = (0, 1)$. Montrer que id_X est homotope à l'application constante en x_0 , mais n'est pas homotope à l'application constante en x_0 relativement à $\{x_0\}$.



Exercice E.8 Montrer que le ruban de Möbius $M = [0, 1] \times [0, 1] / \sim$, où \sim est la relation d'équivalence engendrée par $(0, s) \sim (1, 1-s)$, a le même type d'homotopie que le cercle \mathbb{S}_1 . On pourra par exemple montrer que $A = \pi([0, 1] \times \{\frac{1}{2}\})$, où $\pi : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M$ est la projection canonique, est un rétracté par déformation forte de M .

Exercice E.9 Montrer que le tore troué $\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1 - \{(1, 1)\}$ a le même type d'homotopie que le bouquet de deux cercles $(\mathbb{S}_1, 1) \vee (\mathbb{S}_1, 1)$ (voir l'exemple (4) suivant l'exercice E.A.88 dans la partie A.2 pour la définition d'un bouquet de cercles).



Exercice E.10 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le plan euclidien, privé de n points, a le même type d'homotopie que le bouquet de n cercles (voir l'exemple (4) suivant l'exercice E.A.88 pour la définition d'un bouquet de cercles).

Exercice E.11 1) Soient X un espace topologique et $CX = (X \times [0, 1]) / (X \times \{1\})$ le cône sur X (voir l'exemple (1) suivant l'exercice E.A.88). On note $[x, t]$ la classe dans CX de l'élément (x, t) de $X \times [0, 1]$. Montrer que CX est contractile, et que si $x_0 = [x, 1]$ (pour tout x dans X) est le sommet de ce cône, alors $CX - \{x_0\}$ se rétracte par déformation forte sur X (identifié par $x \mapsto [x, 0]$ avec une partie de CX).

2) Si $f : X \rightarrow Y$ est une application continue, on appelle *cône* de f , et on note $C(f)$ l'espace topologique obtenu par recollement (voir l'exemple (5) suivant l'exercice E.A.88 pour la définition d'un recollement) du cône de X sur Y par l'application f (comme ci-dessus, X est identifié à une partie de CX) :

$$C(f) = CX \cup_f Y .$$

On note encore x_0 l'image de $x_0 \in CX$ dans $C(f)$.

Montrer que $C(f) - \{x_0\}$ se rétracte par déformation forte sur Y .

Exercice E.12 Soit G un groupe topologique, d'élément neutre e . Si $f, g : [0, 1] \rightarrow G$ sont deux lacets en e , on note $fg : [0, 1] \rightarrow G$ le lacet défini par $fg(t) = f(t)g(t)$.

1) Montrer que les lacets $f \cdot g$ et fg sont homotopes (rel $\{0, 1\}$).

2) Montrer que $\pi_1(G, e)$ est abélien.

(En particulier avec les notations qui seront introduites plus loin, les groupes $\pi_1(\mathbb{T}^n, 0)$, $\pi_1(\text{SO}(n), e)$ et $\pi_1(\text{SL}_n(\mathbb{R}), e)$ sont abéliens.)

Exercice E.13 On rappelle tout d'abord le théorème de relèvement des applications et des homotopies à valeurs dans le cercle (voir le corollaire 3.24 pour une preuve dans un cadre général).

- Si $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}_1$ est une application continue, pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(0) = e^{2i\pi t_0}$, il existe une et une seule application continue $\tilde{f} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\tilde{f}(0) = t_0$ et $f(t) = e^{2i\pi \tilde{f}(t)}$ pour tout $t \in [0, 1]$.
- Si $h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}_1$ est une application continue, et si $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est une application continue telle que $h(0, t) = e^{2i\pi f(t)}$ pour tout $t \in [0, 1]$, alors il existe une et une seule application continue $\tilde{h} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\tilde{h}(0, t) = f(t)$ et $h(s, t) = e^{2i\pi \tilde{h}(s, t)}$ pour tout $t \in [0, 1]$.

1) Montrer que, pour tout x dans \mathbb{S}_1 , l'application $\varphi_x : \pi_1(\mathbb{S}_1, x) \rightarrow \mathbb{Z}$, définie par $[\gamma] \mapsto \tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0)$ où $\tilde{\gamma}$ est un relèvement du lacet γ défini ci-dessus, est un isomorphisme de groupes.

Si c est un lacet dans \mathbb{S}_1 , d'origine x et d'extrémité y , et si $\phi_c : \pi_1(\mathbb{S}_1, y) \rightarrow \pi_1(\mathbb{S}_1, x)$ est l'isomorphisme de groupe défini dans la proposition 2.3, montrer que $\varphi_x \circ \phi_c = \varphi_y$.

Soient $f : \mathbb{S}_1 \rightarrow \mathbb{S}_1$ une application continue et x un point de \mathbb{S}_1 . Posons $y = f(x)$. La composition des morphismes de groupes

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\phi_x^{-1}} \pi_1(\mathbb{S}_1, x) \xrightarrow{f_*} \pi_1(\mathbb{S}_1, y) \xrightarrow{\phi_y} \mathbb{Z}$$

est un morphisme de groupe de \mathbb{Z} dans \mathbb{Z} . C'est donc la multiplication par un entier n , qui ne dépend pas de x par ce qui précède. On le note $\text{deg}(f)$, et on l'appelle le *degré* de f . Cette notion coïncide avec la notion de degré des applications continues de \mathbb{S}_n dans \mathbb{S}_n , introduite dans la partie 6.1 lorsque $n = 1$.

Dans ce qui suit, f et g sont des applications continues de \mathbb{S}_1 dans \mathbb{S}_1 .

2) Si f est une rotation, calculer $\text{deg}(f)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer le degré de l'application $z \mapsto z^n$.

3) Montrer que $\text{deg}(f \circ g) = \text{deg}(f)\text{deg}(g)$. En déduire que si f est un homéomorphisme, alors $\text{deg}(f) = \pm 1$.

4) Montrer que $\text{deg}(f) = \text{deg}(g)$ si et seulement si f et g sont homotopes. En déduire que $\text{deg}(f) = 0$ si et seulement si f se prolonge continûment en une application continue $f' : \mathbb{B}_2 \rightarrow \mathbb{S}_1$.

5) Montrer qu'il n'existe pas de rétraction $\mathbb{B}_2 \rightarrow \mathbb{S}_1$. (C'est un cas particulier du lemme 1.3 déjà démontré en introduction en admettant des résultats d'homologie.)

6) Démontrer le théorème de d'Alembert : tout polynôme complexe non constant admet au moins une racine complexe.

7) Soit $f : \mathbb{S}_1 \rightarrow \mathbb{S}_1$ une application continue telle que $f(-x) = -f(x)$. Montrer que f est de degré impair.

Exercice E.14 Soient B un espace topologique, \mathbb{K} le corps \mathbb{R} ou \mathbb{C} , et $n \in \mathbb{N}$. Un *fibré vectoriel* topologique de *base* B et de *rang* n sur le corps \mathbb{K} est un espace topologique E muni d'une application continue $p : E \rightarrow B$, dont la *fibres* $p^{-1}(b)$ au-dessus de b est, pour tout $b \in B$, munie d'une structure d'espace vectoriel sur \mathbb{K} de dimension n , tel que, pour tout b dans B , il existe un voisinage V de b dans B (appelé *voisinage distingué*) et un homéomorphisme $\phi : V \times \mathbb{K}^n \rightarrow p^{-1}(V)$ tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} V \times \mathbb{K}^n & \xrightarrow{\phi} & p^{-1}(V) \\ \text{pr}_1 \searrow & & \downarrow p \\ & & V \end{array}$$

et tel que $\phi_{\{b\} \times \mathbb{K}^n} : \{b\} \times \mathbb{K}^n \rightarrow p^{-1}(b)$ soit un isomorphisme d'espaces vectoriels pour tout $b \in V$. Par exemple, le fibré tangent d'une variété différentielle C^1 de dimension n est un fibré vectoriel réel de rang n (voir un cours de géométrie différentielle, par exemple [Laf, Die1, DNF, Paul]).

1) Soit $E \rightarrow B$ un fibré vectoriel. Montrer que E et B ont même type d'homotopie.

Deux fibrés vectoriels topologiques $p : E \rightarrow B$ et $p' : E' \rightarrow B$ au-dessus de B sont dit *isomorphes* s'il existe un homéomorphisme $\psi : E \rightarrow E'$ tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\psi} & E' \\ p \searrow & & \downarrow p' \\ & & B \end{array}$$

et tel que $\psi|_{p^{-1}(b)} : p^{-1}(b) \rightarrow p'^{-1}(b)$ soit un isomorphisme d'espaces vectoriels pour tout $b \in B$. Un fibré vectoriel est *trivial* s'il est isomorphe au fibré vectoriel $pr_1 : B \times \mathbb{K}^n \rightarrow B$.

2) On rappelle qu'un espace topologique est *paracompact* si de tout recouvrement ouvert, on peut extraire un sous-recouvrement localement fini (i.e. tel que tout point admette un voisinage ne rencontrant qu'un nombre fini de parties du sous-recouvrement). Montrer que tout fibré vectoriel, de base contractile et paracompacte, est trivial.

3 Revêtements

3.1 Catégorie des revêtements

Dans cette partie, nous définissons la catégorie des revêtements au-dessus d'un espace topologique donné.

L'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}_1$ définie par $t \mapsto e^{2\pi it}$ vérifie la propriété suivante : pour tout $x = e^{2\pi i\theta}$ dans \mathbb{S}^1 , si $V = \mathbb{S}_1 - \{-x\}$, alors $f^{-1}(V) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]\theta + (2k-1)\pi, \theta + (2k+1)\pi[$ (union disjointe) et la restriction de f à chaque $]\theta + (2k-1)\pi, \theta + (2k+1)\pi[$ est un homéomorphisme sur V .

Pour tout espace topologique X et tout espace discret D non vide, la première projection $pr_1 : X \times D \rightarrow X$ est aussi, en restriction à chaque $X \times \{d\}$, un homéomorphisme sur X .

Soient X et B deux espaces topologiques, et $f : X \rightarrow B$ une application continue. On dit que f est un *revêtement* si pour tout $y \in B$, il existe un voisinage V de y dans B , un espace discret D non vide et $h : V \times D \rightarrow f^{-1}(V)$ un homéomorphisme tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} V \times D & \xrightarrow{h} & f^{-1}(V) \\ pr_1 \searrow & & \downarrow f \\ & & V \end{array}$$

On dit que B est la *base* de f , X l'*espace total* de f , $f^{-1}(y)$ la *fibre* de f au-dessus de y , V un *voisinage distingué* de y pour f , h une *trivialisatoin locale* de f au-dessus de V .

Si l'on remplace D par un espace topologique F quelconque, on obtient la notion de *fibré localement trivial* de fibre F au-dessus de B . Voir par exemple [Spa] ou un cours de géométrie différentielle comme [Laf, Die1, DNF, Paul] pour d'autres exemples. Les revêtements sont donc les fibrés localement triviaux à fibres discrètes.

Remarque. Comme D est non vide, un revêtement est surjectif.

Soient $f : X \rightarrow B$ et $f' : X' \rightarrow B$ deux revêtements ayant même base. Un *morphisme de revêtements* de f sur f' est une application continue $\phi : X \rightarrow X'$ telle que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\phi} & X' \\ f \searrow & & \swarrow f' \\ & & B \end{array}$$

L'application id est un morphisme de revêtements, dit *identité* de f sur f . Si $f'' : X'' \rightarrow B$ est un revêtement de base B et ϕ' un morphisme de revêtements de f' sur f'' , alors $\phi' \circ \phi$ est un morphisme de revêtements, dit *composé*. On définit ainsi la catégorie des revêtements au-dessus d'un espace topologique donné B .

Un *isomorphisme de revêtements* de f sur f' est un isomorphisme de f sur f' dans la catégorie ainsi définie, i.e. un morphisme de revêtements $\phi : X \rightarrow X'$ de

f sur f' tel qu'il existe un morphisme de revêtements $\psi : X' \rightarrow X$ de f' sur f tel que $\psi \circ \phi = \text{id}_X$ et $\phi \circ \psi = \text{id}_{X'}$. Si de plus $X = X'$, on parle d'*automorphisme de revêtements*. Deux revêtements sont *isomorphes* s'il existe un isomorphisme de revêtements de l'un sur l'autre.

On note $\text{Aut}(f)$ le groupe des automorphismes de revêtements de f (on note aussi parfois $\text{Aut}_B(X)$ ce groupe, mais cette notation est abusive, car il peut exister deux revêtements non isomorphes entre deux espaces topologiques donnés, comme les applications $z \mapsto z^n$ et $z \mapsto z^m$ avec $n \neq m$ du cercle $\mathbb{S}_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ dans lui-même. voir aussi l'exercice E.28).

Un revêtement $f : X \rightarrow B$ est dit *trivial* s'il est isomorphe au revêtement $pr_1 : B \times D \rightarrow B$, où D est un espace discret non vide.

Si $f : X \rightarrow B$ est un revêtement et W un ouvert de B , alors $f|_{f^{-1}(W)} : f^{-1}(W) \rightarrow W$ est un revêtement, qui est trivial si W est un ouvert distingué.

Proposition 3.1 *L'application f est un revêtement si et seulement si tout point y de B admet un voisinage V tel que $f^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} U_i$ soit une union disjointe non vide d'ouverts U_i de X tels que $f|_{U_i} : U_i \rightarrow V$ soit un homéomorphisme.*

Démonstration. Si f est un revêtement, alors pour tout $y \in B$, notons V un voisinage distingué de y et h une trivialisation locale de f au-dessus de V . En posant $I = D$ et $U_i = h(V \times \{i\})$ pour tout i dans I , l'application f vérifie la propriété demandée.

Réciproquement, si I et $(V_i)_{i \in I}$ comme dans l'énoncé existent, alors notons D l'ensemble I muni de la topologie discrète, et considérons l'application $g : f^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} U_i \rightarrow V \times I$ telle que $g(x) = (f(x), i)$ si $x \in U_i$. On vérifie que g est un homéomorphisme, dont l'inverse h est une trivialisation locale de f au-dessus de V . \square

3.2 Homéomorphismes locaux et revêtements

Dans cette partie, nous comparons les homéomorphismes locaux et les revêtements.

Soient X et Y deux espaces topologiques. Un *homéomorphisme local* est une application continue $f : X \rightarrow Y$ telle que pour tout x dans X , il existe un voisinage ouvert U de x tel que $f(U)$ soit ouvert et $f|_U : U \rightarrow f(U)$ soit un homéomorphisme.

Remarques.

- (1) Un homéomorphisme local est une application ouverte.
- (2) S'il existe un homéomorphisme local surjectif entre deux espaces topologiques, alors ceux-ci ont les mêmes propriétés topologiques locales (locale connexité, locale connexité par arcs, locale contractibilité, etc).
- (3) Un revêtement est un homéomorphisme local.

- (4) Si X, Y sont deux variétés différentielles de même dimension, alors une application différentiable $f : X \rightarrow Y$ est une *submersion* (i.e. sa différentielle en chaque point est surjective) si et seulement si elle est une *immersion* (i.e. sa différentielle en chaque point est injective), et alors f est un homéomorphisme local, par le théorème d'inversion locale (voir un cours de géométrie différentielle, par exemple [Laf, Die1, DNF, Paul]).
- (5) Si $f : X \rightarrow B$ est un revêtement et si B est connexe, alors le cardinal de $f^{-1}(y)$ est constant en y .

Un revêtement $f : X \rightarrow B$ est un *revêtement fini* si pour tout y dans B , le cardinal de $f^{-1}(y)$ est fini. Soit $n \in \mathbb{N} - \{0\}$. Un revêtement $f : X \rightarrow B$ est un *revêtement à n feuillets* si pour tout y dans B , le cardinal de $f^{-1}(y)$ est n . Un revêtement à un feuillet est un homéomorphisme (car il est alors injectif, et tout revêtement est continu, ouvert, surjectif).

Proposition 3.2 *Soit $f : X \rightarrow Y$ un homéomorphisme local, et supposons que X soit séparé. Si l'une des conditions suivantes*

- *le cardinal de chaque fibre $f^{-1}(y)$ est fini constant non nul,*
 - *f est propre (voir la définition A.22) et Y connexe,*
- est vérifiée, alors f est un revêtement fini, donc à n feuillets pour un $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.*

Démonstration. Pour tout y dans Y , et tout x dans $F = f^{-1}(y)$, il existe un voisinage ouvert U_x de x tel que $f|_{U_x} : U_x \rightarrow f(U_x)$ soit un homéomorphisme. Comme X est séparé, si F est fini, on peut supposer que les U_x pour x dans F sont deux à deux disjoints.

Sous la première hypothèse, on pose $V = \bigcap_{x \in F} f(U_x)$, qui est ouvert car f est ouverte. Alors $f^{-1}(V) \supset \bigcup_{x \in F} f^{-1}(V) \cap U_x$ (union disjointe) et comme le cardinal des fibres est constant, il y a égalité. De plus la restriction de f à $f^{-1}(V) \cap U_x$ est un homéomorphisme.

Si f est propre, alors le cardinal de chaque fibre est fini non nul. En effet, l'application f est ouverte, car c'est un homéomorphisme local, et fermée car propre. Comme Y est connexe, on a donc $f(X) = Y$. Donc f est surjective. Pour tout y dans Y , la fibre F est compacte car f est propre. Elle est aussi discrète, car f étant un homéomorphisme local, pour tout $x \in F$, il existe U_x un voisinage de x tel que $U_x \cap F = \emptyset$. Elle est donc finie.

Soit U_x pour $x \in F$ comme ci-dessus. Comme f est fermée, $V = Y - f(X - \bigcup_{x \in F} U_x)$ est un voisinage ouvert de y tel que $f^{-1}(V) \subset \bigcup_{x \in F} U_x$. Donc $f^{-1}(V) = \bigcup_{x \in F} f^{-1}(V) \cap U_x$ (union disjointe) et la restriction de f à $f^{-1}(V) \cap U_x$ est un homéomorphisme. \square

Exemples.

- L'application $]0, 2[\rightarrow \mathbb{S}_1$ avec $t \mapsto e^{2\pi i t}$ est un homéomorphisme local, de fibres finies non vides, mais qui n'est pas un revêtement.
- Si $X = \{0_\pm\} \cup]0, 1]$ est l'espace topologique de l'exercice E.A.75, l'application $X \rightarrow [0, 1]$ avec $0_\pm \mapsto 0$ et $t \mapsto t$ si $t > 0$ est un homéomorphisme local, de fibres finies non vides, mais qui n'est pas un revêtement.

- Soit $n \in \mathbb{N} - \{0\}$. L'application de \mathbb{C}^* dans \mathbb{C}^* , ainsi que de \mathbb{S}_1 dans \mathbb{S}_1 , définie par $z \mapsto z^n$ est un revêtement à n feuillets.
- Soit P un polynôme complexe de degré $n > 0$. Soit Z l'ensemble des racines du polynôme dérivé P' , F l'ensemble fini $P(Z)$ et U l'ouvert connexe $\mathbb{C} - P^{-1}(F)$. Alors $P|_U : U \rightarrow \mathbb{C} - F$ est un revêtement à n feuillets. En effet, c'est un homéomorphisme local, car P est une immersion sur U , et les images réciproques de chaque point de $\mathbb{C} - F$ ont exactement n racines.
- Si X et Y sont des variétés différentielles connexes compactes de même dimension, et si $f : X \rightarrow Y$ est une submersion/immersion, alors f est un revêtement (car un homéomorphisme local propre).

3.3 Actions de groupes topologiques

Cette partie est composée de rappels sur les actions de groupes et sur les groupes topologiques.

Une *groupe topologique* est un ensemble G muni d'une structure de groupe et d'une structure d'espace topologique compatibles, i.e. telles que l'application

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G \\ (x, y) &\longmapsto xy^{-1} \end{aligned}$$

est continue. Un *morphisme de groupes topologiques* est un morphisme de groupe qui est continu. Munies de la composition des applications, ces données définissent une catégorie (voir la fin de la partie 5.1). Un *isomorphisme de groupes topologiques* est un isomorphisme dans cette catégorie, ou, de manière équivalente, un isomorphisme de groupes qui est un homéomorphisme. Deux groupes topologiques sont *isomorphes* si ce sont des objets isomorphes dans cette catégorie, i.e. s'il existe un isomorphisme de groupes topologiques de l'un sur l'autre.

Exemple. Soit G un groupe. Muni de la topologie discrète, G est un groupe topologique, que l'on appelle *groupe discret*.

Soit $n \in \mathbb{N} - \{0\}$. On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ le *groupe linéaire* complexe des matrices complexes n - n inversibles, muni de la topologie induite par la topologie usuelle sur \mathbb{C}^{n^2} , et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ le sous-groupe des matrices à coefficients réels, appelé le *groupe linéaire* réel. Soit

$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) = \{x \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) : \det x = 1\}$$

le groupe *groupe spécial linéaire* complexe,

$$\mathrm{U}(n) = \{x \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) : x^{-1} = x^*\}$$

le *groupe unitaire*, où $x^* = \bar{x}^t$ est la matrice adjointe de x , et $\mathrm{SU}(n) = \mathrm{U}(n) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ le *groupe spécial unitaire*. Soit

$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{x \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : \det x = 1\}$$

le *groupe spécial linéaire* réel,

$$\mathrm{O}(n) = \{x \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : x^{-1} = x^t\}$$

le *groupe orthogonal*, et $\mathrm{SO}(n) = \mathrm{O}(n) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ le *groupe spécial orthogonal*.

- Exercice E.15**
1. Montrer que tout sous-groupe d'un groupe topologique, muni de la topologie induite, est un groupe topologique. Montrer que le produit d'une famille (quelconque) de groupes topologique, muni de la topologie produit et de la structure de groupe produit, est un groupe topologique. Montrer que si G est un groupe topologique et H un sous-groupe distingué, alors le groupe quotient G/H , muni de la topologie quotient, est un groupe topologique.
 2. Montrer que le groupe abélien \mathbb{R}^n , muni de la topologie usuelle, est un groupe topologique localement compact. Montrer que $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ est un groupe topologique compact.
 3. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est ouvert dans \mathbb{C}^{n^2} , et que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est ouvert dans \mathbb{R}^{n^2} .
 4. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est un groupe topologique localement compact.
 5. Montrer que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n)$ et $\mathrm{SO}(n)$ sont des sous-groupes fermés de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Ce sont donc des groupes topologiques localement compacts.
 6. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n)$ et $\mathrm{SO}(n)$ sont des variétés topologiques (métrisables séparables), donc sont localement contractiles.
 7. Montrer que $\mathbb{S}_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, muni de la multiplication des nombres complexes, est un groupe topologique, isomorphe (en tant que groupe topologique) à $\mathrm{SO}(2)$ et à $\mathrm{U}(1)$.
 8. Montrer que $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$, $\mathrm{O}(n)$ et $\mathrm{SO}(n)$ sont compacts.
 9. Montrer que $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$ et $\mathrm{SO}(n)$ sont connexes par arcs, et que $\mathrm{SO}(n)$ a deux composantes connexes.
 10. Soit \mathcal{H} (respectivement \mathcal{H}^+) le sous-espace topologique de \mathbb{C}^{n^2} formé des matrices hermitiennes (respectivement hermitiennes définies positives). Montrer que l'application exponentielle est un homéomorphisme de \mathcal{H} sur \mathcal{H}^+ . Montrer qu'il existe un homéomorphisme $x \mapsto \sqrt{x}$ et un seul de \mathcal{H}^+ dans lui-même tel que $\sqrt{x^2} = x$ pour tout $x \in \mathcal{H}^+$. Montrer que l'application $\mathcal{H}^+ \times \mathrm{U}(n) \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ définie par $(x, y) \mapsto xy$ est un homéomorphisme (appelé décomposition polaire de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$), d'inverse $x \mapsto (\sqrt{x^*x}, \sqrt{x^*x}^{-1}x)$. En déduire que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est homéomorphe à $\mathrm{U}(n) \times \mathbb{R}^{n^2}$, que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ est homéomorphe à $\mathrm{SU}(n) \times \mathbb{R}^{n^2-1}$, que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est homéomorphe à $\mathrm{O}(n) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$, que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est homéomorphe à $\mathrm{SO}(n) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}-1}$.

Soient X un espace topologique et G un groupe topologique. Une *action* (à gauche) continue de G sur X est une action (à gauche) de G sur X qui est continue,

i.e. une application

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto gx \end{aligned}$$

continue telle que $g'(gx) = (g'g)x$ et $ex = x$ pour tous g, g' dans G et x dans X , où e est l'élément neutre de G . On dit que G opère (ou agit) continuellement sur X s'il est muni d'une action continue de G sur X . On suppose souvent de manière implicite qu'une action d'un groupe topologique sur un espace topologique est continue.

Remarque. Pour tout g dans G , l'application $x \mapsto gx$ est alors un homéomorphisme, d'inverse $x \mapsto g^{-1}x$.

Exemple. Une action d'un groupe discret G sur un espace topologique est continue si et seulement si $x \mapsto gx$ est continue pour tout g dans G .

Soit G un groupe agissant sur un ensemble X . La relation

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow (\exists g \in G, y = gx)$$

est une relation d'équivalence. La classe d'équivalence d'un point de X est appelée l'orbite de ce point. L'ensemble des classes d'équivalence est noté $G \backslash X$, et appelé l'espace des orbites de G dans X .

Soient G un groupe et H un sous-groupe. Alors H agit par translation à gauche sur G :

$$\begin{aligned} H \times G &\longrightarrow G \\ (h, g) &\longmapsto hg. \end{aligned}$$

On note Hg l'orbite de $g \in G$, et $H \backslash G$ le quotient. Le groupe H agit aussi par translation à droite sur G :

$$\begin{aligned} H \times G &\longrightarrow G \\ (h, g) &\longmapsto gh^{-1}. \end{aligned}$$

On note gH l'orbite de $g \in G$ et G/H le quotient. L'action par translation à gauche de G sur lui-même induit une action de G sur G/H :

$$\begin{aligned} G \times G/H &\longrightarrow G/H \\ (g, g'H) &\longmapsto gg'H. \end{aligned}$$

Lorsque G est un groupe topologique, X un espace topologique et l'action est continue, l'espace des orbites sera muni de la topologie quotient (voir la partie A.2). Si H est un sous-groupe d'un groupe topologique G , alors l'application $g \mapsto g^{-1}$ induit un homéomorphisme entre $H \backslash G$ et G/H . Si H est distingué, alors $G/H = H \backslash G$.

Remarque. La projection canonique $\pi : X \rightarrow G \backslash X$ est continue, et ouverte : si U est un ouvert de X , alors le saturé $\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{g \in G} gU$ de U est ouvert, donc $\pi(U)$ est ouvert.

Si G et X sont séparés, une action continue de G sur X est dite *propre* si l'application graphe

$$\begin{aligned} \mathbf{gr} : G \times X &\longrightarrow X \times X \\ (g, x) &\longmapsto (x, gx), \end{aligned}$$

qui est continue, est propre (i.e. fermée, et dont les images réciproques de points sont compactes, voir la partie A.4 dans l'appendice). Lorsque G est discret, une action (continue) propre de G sur X est aussi appelée une action *proprement discontinue*.

Proposition 3.3 Si X est localement compact et G séparé, une action continue de G sur X est propre si et seulement si, pour tout compact K de X , la partie

$$\{g \in G : K \cap gK \neq \emptyset\}$$

est compacte dans G .

Une action (continue) d'un groupe discret sur un espace localement compact est donc proprement discontinue si et seulement si pour tout compact K de X , la partie $\{g \in G : K \cap gK \neq \emptyset\}$ est finie. C'est cette définition qu'il faut retenir/utiliser dans la plupart des applications.

Démonstration. Si l'action est propre, pour tout compact K de X , alors $\mathbf{gr}^{-1}(K \times K)$ est compact (voir la proposition A.22), donc $\{g \in G : K \cap gK \neq \emptyset\} = pr_1(\mathbf{gr}^{-1}(K \times K))$ est compact.

Réciproquement, pour tout compact L de $X \times X$, soit K un compact de X tel que $L \subset K \times K$ (par exemple $K = pr_1(L) \cup pr_2(L) \subset X$). Alors $\mathbf{gr}^{-1}(L)$ est un fermé, contenu dans le compact $\{g \in G : K \cap gK \neq \emptyset\} \times K$, donc est compact. Comme $X \times X$ est localement compact et $G \times X$ séparé, la proposition A.22 montre que \mathbf{gr} est propre. \square

Proposition 3.4 Si X et G sont séparés et si G agit proprement sur X , alors les orbites sont fermées et l'espace des orbites $G \backslash X$ est séparé.

Démonstration. Comme l'application graphe \mathbf{gr} est propre, elle est fermée, donc son image $\text{im } \mathbf{gr} = \{(x, y) \in X \times X : \exists g \in G, y = gx\}$ est fermée dans $X \times X$. Si x n'est pas dans la même orbite que y , alors (x, y) n'est pas dans $\text{im } \mathbf{gr}$, donc il existe U, V ouverts de X tels que $(x, y) \in U \times V \subset X \times X - \text{im } \mathbf{gr}$. Alors $\pi(U), \pi(V)$ sont des ouverts (car π est ouverte), disjoints (car $(U \times V) \cap \text{im } \mathbf{gr}$ est vide), et contenant $\pi(x), \pi(y)$ respectivement. Donc $G \backslash X$ est séparé.

Les orbites, images réciproques par π (continue) des singletons (fermés car $G \backslash X$ est séparé) sont donc fermées. \square

Exercice E.16 1. Si G est un groupe topologique compact agissant (continuellement) sur un espace topologique séparé X , montrer que l'action de G sur X est propre.

2. Montrer que les espaces topologiques quotients $\text{SL}_n(\mathbb{C})/\text{SU}(n)$ et $\text{SL}_n(\mathbb{R})/\text{SO}(n)$ sont homéomorphes respectivement à \mathbb{R}^{n^2-1} et $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}-1}$.

3. Si $\text{SO}(n)$ est identifié à un sous-groupe de $\text{SO}(n+1)$ par l'application $x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ en notation par blocs, montrer que l'espace topologique quotient $\text{SO}(n+1)/\text{SO}(n)$ est homéomorphe à \mathbb{S}_n .

Une action d'un groupe G sur un ensemble X est dite *libre* si le stabilisateur $G_x = \{g \in G : gx = x\}$ de chaque point x de X est trivial (i.e. vaut $\{e\}$ où e est l'identité de G). Ceci équivaut à

$$\forall x \in X, \forall g, g' \in G, \quad gx = g'x \Rightarrow g = g'.$$

Donc l'action de G est libre si et seulement si l'application graphe \mathbf{gr} est injective.

3.4 Actions de groupes et revêtements

Cette partie introduit une classe d'exemples fondamentaux de revêtements, ceux définis par les actions propres et libres de groupes discrets. Ils jouent un rôle essentiel dans la théorie des revêtements.

Théorème 3.5 *Soit G un groupe discret agissant (continuellement) librement et proprement sur un espace topologique séparé X . Alors*

- (1) *pour tout x dans X , il existe un voisinage V de x tel que $gV \cap V = \emptyset$ pour tout g dans $G - \{e\}$*
- (2) *chaque orbite de G est discrète;*
- (3) *la projection canonique $X \rightarrow G \backslash X$ est un revêtement.*

Démonstration. (1) L'application graphe \mathbf{gr} est continue, injective et fermée (car propre), donc est un homéomorphisme sur son image. Comme $\{e\} \times X$ est un ouvert de $G \times X$, son image par \mathbf{gr} , qui est la diagonale de $X \times X$, est ouverte dans $\text{im } \mathbf{gr}$. Pour tout x dans X , il existe donc un voisinage V de x de X tel que $(V \times V) \cap \text{im } \mathbf{gr}$ soit contenu dans la diagonale de $X \times X$. Donc si $V \cap gV$ est non vide, alors $g = e$.

(2) Ceci découle de (1).

(3) Pour tout x dans X , soit V un voisinage ouvert de x comme dans (1). Alors $U = \pi(V)$ est un ouvert, car π est ouverte. De plus $\pi^{-1}(U) = \bigcup_{g \in G} gV$ et cette union est disjointe, car si $y \in gV \cap g'V$, alors $g^{-1}y \in V \cap (g^{-1}g')V$, donc $g^{-1}g' = e$ et $g = g'$. De plus, l'application $\pi|_{gV} : gV \rightarrow U$ est continue, ouverte, surjective. Elle est aussi injective. En effet, si $x, x' \in gV$ vérifient $\pi(x) = \pi(x')$, alors il existe $g' \in G$ tel que $x = g'x'$; l'élément x appartient à $gV \cap (g'g)V$, donc $g' = e$ et $x = x'$. \square

Corollaire 3.6 *Soit G un groupe fini (discret) agissant librement (par homéomorphismes) sur un espace séparé X . Alors $G \backslash X$ est séparé, et la projection canonique $X \rightarrow G \backslash X$ est un revêtement à $\text{Card}(G)$ feuilletts.*

Démonstration. Par la proposition 3.4 et le théorème 3.5 précédent, il suffit de montrer que l'application graphe \mathbf{gr} est propre. Comme un groupe fini discret est compact, ceci découle de l'assertion (1) de l'exercice E.16. Mais nous donnons une autre preuve ci-dessous.

Comme G est fini, l'image réciproque d'un point est finie, donc compact car $G \times X$ est séparé. Enfin, si F est un fermé de $G \times X$, alors pour tout g dans G , le fermé $F \cap (\{g\} \times X)$ est de la forme $\{g\} \times F_g$ où F_g est un fermé de X . Comme $X \times X$ est séparé, le sous-ensemble $F'_g = \{(x, y) \in X \times X : pr_1(x, y) = g pr_2(x, y)\}$ est fermé (voir par exemple l'exercice E.A.95). D'où

$$\mathbf{gr}(F) = \bigcup_{g \in G} \mathbf{gr}(F \cap (X \times \{g\})) = \bigcup_{g \in G} pr_1^{-1}(F_g) \cap F'_g$$

est fermé (car l'union est finie). \square

Exemples.

1. Si $\{\pm 1\}$ agit sur \mathbb{S}_n par $x \mapsto \pm x$, alors $\mathbb{P}_n(\mathbb{R}) = \{\pm 1\} \backslash \mathbb{S}_n$ est un espace topologique séparé, et l'application canonique $\mathbb{S}_n \rightarrow \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ est un revêtement à deux feuilletts (par le corollaire 3.6).
2. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N} - \{0\}$. Le groupe \mathcal{U}_p des racines p -èmes de l'unité agit (continuellement) sur la sphère de dimension impaire

$$\mathbb{S}_{2n+1} = \{(z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} : |z_0|^2 + \dots + |z_n|^2 = 1\}$$

par $(\lambda, (z_0, \dots, z_n)) \mapsto (\lambda z_0, \dots, \lambda z_n)$. Cette action est libre, donc $L_{n,p} = \mathcal{U}_p \backslash \mathbb{S}_{2n+1}$ est un espace topologique séparé, appelé *espace lenticulaire*, et la projection canonique $\mathbb{S}_{2n+1} \rightarrow L_{n,p}$ est un revêtement à p feuilletts (par le corollaire 3.6).

Corollaire 3.7 *Soit H un sous-groupe discret d'un groupe topologique séparé G , alors H est fermé, $H \backslash G$ est séparé et la projection canonique $G \rightarrow H \backslash G$ est un revêtement.*

Démonstration. Soit U un voisinage de l'identité, tel que $U \cap H = \{e\}$. Soit V un voisinage de l'identité tel que $VV^{-1} \subset U$. Supposons par l'absurde qu'il existe $g \in \overline{H} - H$. Alors Vg est un voisinage de g , qui rencontre H en au moins deux éléments distincts h, h' (car G est séparé). Soient v et v' dans V tels que $vg = h$ et $v'g = h'$. Alors $h'h^{-1} = v'v^{-1}$ est différent de e et appartient à U , contradiction. Donc H est fermé.

Maintenant, par la proposition 3.4 et le théorème 3.5, il suffit de montrer que l'application graphe $\mathbf{gr} : H \times G \rightarrow G \times G$ définie par $\mathbf{gr}(h, g) = (g, hg)$ est propre. Comme elle est injective, d'image

$$\text{im } \mathbf{gr} = \{(g, g') \in G \times G : g'g^{-1} \in H\}$$

et puisque $\mathbf{gr}^{-1} : (g, g') \mapsto (g'g^{-1}, g)$ est continue, il suffit de montrer que H est fermé. \square

Exemple. L'application canonique $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ est un revêtement. Par le paragraphe précédant l'exercice E.A.85, l'application $\mathbb{R}^n \rightarrow (\mathbb{S}_1)^n$ avec $(t_1, \dots, t_n) \mapsto (e^{2i\pi t_1}, \dots, e^{2i\pi t_n})$ est un revêtement.

3.5 Unicité des relèvements

L'une des propriétés fondamentales des revêtements est de pouvoir relever de manière unique en une application à valeurs dans l'espace total certaines applications à valeurs dans la base. Dans cette partie, nous étudions le problème de l'unicité (voir la partie 3.8 pour le problème de l'existence).

Soient $p : X \rightarrow B$ un revêtement et $f : Y \rightarrow B$ une application continue.

Un *relèvement* (ou *relevé*) de f est une application continue $\tilde{f} : Y \rightarrow X$ telle que $p \circ \tilde{f} = f$, c'est-à-dire telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \tilde{f} \nearrow & & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{f} & B \end{array} .$$

Une *section* de p est un relèvement de l'identité $B \rightarrow B$, c'est-à-dire une application continue $s : B \rightarrow X$ telle que $p \circ s = \text{id}_B$.

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ p \downarrow & \uparrow s & \\ & B & \end{array} .$$

Exemples. (1) Si p est un revêtement trivial, si $y \in Y$, $b = f(y)$ et $x \in p^{-1}(b)$ alors f admet au moins un relèvement \tilde{f} tel que $\tilde{f}(y) = x$. En effet, si D est un espace discret non vide, si $pr_1 : B \times D \rightarrow B$ est la première projection, et si $h : B \times D \rightarrow X$ est un isomorphisme de revêtements au-dessus de B , alors pour tout d dans D , $\tilde{f} : y \mapsto h(f(y), d)$ est un relèvement de f . En prenant $f = \text{id}$, on obtient que tout revêtement trivial (par exemple la restriction d'un revêtement à la préimage d'un ouvert distingué de la base) admet, pour tout point x de la fibre au-dessus d'un point b de la base, au moins une section s telle que $s(b) = x$.

(2) Si $p' : X' \rightarrow B$ est un revêtement, alors tout morphisme de revêtements de p sur p' est un relèvement de l'application continue p par le revêtement p' .

Nous donnerons plus loin un critère nécessaire et suffisant pour l'existence de relèvements.

Proposition 3.8 (Unicité des relèvements) *Si Y est connexe, alors deux relèvements de f qui coïncident en un point sont égaux.*

Démonstration. Soient $f', f'' : Y \rightarrow X$ deux relèvements de f coïncidant en un point $y \in Y$, et

$$A_0 = \{u \in Y : f'(u) = f''(u)\}, \quad A_1 = \{u \in Y : f'(u) \neq f''(u)\},$$

qui sont deux parties disjointes de Y . Soient $u \in Y$, V un voisinage ouvert distingué de $f(u)$, $h : V \times D \rightarrow p^{-1}(V)$ une trivialisatation de p au-dessus de V , et $V_d = h(V \times \{d\})$ pour tout $d \in D$. Si $u \in A_0$, soit $d \in D$ tel que $f'(u) \in V_d$. Alors

$(f')^{-1}(V_d) \cap (f'')^{-1}(V_d)$ est un voisinage ouvert de u contenu dans A_0 , donc A_0 est ouvert. Si $u \in A_1$, soient d' et d'' dans D tels que $f'(u) \in V_{d'}$ et $f''(u) \in V_{d''}$. Alors $d' \neq d''$ et $(f')^{-1}(V_{d'} \cap (f'')^{-1}(V_{d''}))$ est un voisinage ouvert de u contenu dans A_1 , donc A_1 est ouvert. Comme $y \in A_0$, et par connexité de Y , nous avons donc $A_1 = \emptyset$ et $f' = f''$. \square

Corollaire 3.9 1. *Soient $p : X \rightarrow B$ et $p' : X' \rightarrow B$ deux revêtements. Si X est connexe, alors deux morphismes de p sur p' qui coïncident en un point sont égaux.*

2. *Soit $p : X \rightarrow B$ un revêtement, d'espace total X connexe. Le groupe des automorphismes du revêtement p agit librement sur X .*

3. *Soit $p : X \rightarrow B$ un revêtement, de base B connexe. Deux sections de p qui coïncident en un point sont égales.*

4. *Soit G un groupe discret agissant proprement et librement sur un espace connexe séparé X , et $p : X \rightarrow G \backslash X$ le revêtement associé. Si $x \in X$, alors l'application qui à un automorphisme de revêtements ϕ associe l'unique élément g de G tel que $\phi(x) = gx$, est un isomorphisme du groupe $\text{Aut}(p)$ sur le groupe G . \square*

3.6 Relèvement des chemins et des homotopies

Dans cette partie, nous montrons que les revêtements ont la propriété de relèvement unique des chemins et des homotopies.

Proposition 3.10 (Relèvement des chemins) *Soit $p : X \rightarrow B$ un revêtement. Pour tout chemin α dans B d'origine b , pour tout x dans $p^{-1}(b)$, il existe un unique relèvement $\tilde{\alpha}$ de α d'origine x .*

Cette proposition est en fait un cas particulier de la proposition suivante, en prenant pour Y l'espace réduit un point.

Proposition 3.11 (Relèvement des homotopies) *Soient $p : X \rightarrow B$ un revêtement et $f : Y \rightarrow B$ une application continue, admettant un relèvement $\tilde{f} : Y \rightarrow X$. Pour toute application continue $h : Y \times [0, 1] \rightarrow B$ telle que $h(\cdot, 0) = f(\cdot)$, il existe un unique relèvement \tilde{h} de h tel que $\tilde{h}(\cdot, 0) = \tilde{f}(\cdot)$.*

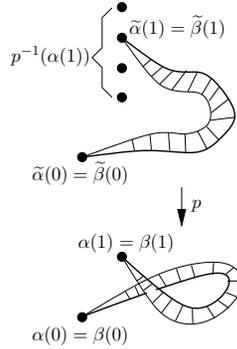
Démonstration. Le résultat est immédiat si p est trivial.

Par compacité de $[0, 1]$, pour tout $y \in Y$, il existe un voisinage ouvert U_y de y et $n = n_y \in \mathbb{N}$ non nul tel que $f(U_y \times [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}])$ soit contenu dans un voisinage distingué $V_{y,i}$ de $f(y, \frac{i}{n})$.

Soit \tilde{g}_0 un relèvement de $f|_{U_y \times [0, \frac{1}{n}]}$ tel que $\tilde{g}_0(z, 0) = \tilde{f}(z)$ pour tout z dans U_y . Par récurrence, on construit un relèvement \tilde{g}_i de $f|_{U_y \times [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]}$ tel que $\tilde{g}_i(z, \frac{i}{n}) = \tilde{g}_{i-1}(z, \frac{i}{n})$ pour tout z dans U_y . En recollant ces relevés, on obtient un relèvement \tilde{g}_y de $f|_{U_y \times [0, 1]}$ tel que $\tilde{g}_y(z, 0) = \tilde{f}(z)$ pour tout z dans U_y .

Si $y' \in Y$, et pour tout z dans $U_y \cap U_{y'}$, les relèvements \tilde{g}_y et $\tilde{g}_{y'}$ coïncident en $(z, 0)$, donc par connexité par arcs de $\{z\} \times [0, 1]$, coïncident sur $\{z\} \times [0, 1]$. Donc \tilde{g}_y et $\tilde{g}_{y'}$ coïncident sur $(U_y \cap U_{y'}) \times [0, 1]$. En recollant les \tilde{g}_y , on obtient un relèvement \tilde{h} cherché.

Pour tout y dans Y , deux tels relèvements coïncident en $(y, 0)$, donc sur $\{y\} \times [0, 1]$ par connexité par arc de $[0, 1]$, donc ils sont égaux. \square



Corollaire 3.12 Si α et β sont deux chemins homotopes, si $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\beta}$ sont des relèvements de α et β respectivement ayant même origine, alors $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\beta}$ ont même extrémité et sont homotopes.

Démonstration. Si $h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow B$ est une homotopie entre α et β , telle que

$$h(t, 0) = \alpha(t), \quad h(t, 1) = \beta(t), \quad h(0, s) = \alpha(0) = \beta(0), \quad h(1, s) = \alpha(1) = \beta(1),$$

si $\tilde{h} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ est le relèvement de h tel que $\tilde{h}(t, 0) = \tilde{\alpha}(t)$, alors par l'unicité dans la proposition 3.10, et comme les chemins constants se relèvent en des chemins constants, nous avons

$$\tilde{h}(t, 1) = \tilde{\beta}(t), \quad \tilde{h}(0, s) = \tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0), \quad \tilde{h}(1, s) = \tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1). \quad \square$$

Corollaire 3.13 Soient $x \in X$ et $b = p(x)$. Le morphisme $p_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(B, b)$ est injectif.

Démonstration. Soit α un lacet en x dans X . Si le lacet $p \circ \alpha$ en b dans B est homotope au lacet constant en b , alors α , qui par unicité est le relevé de $p \circ \alpha$ d'origine x , est homotope au lacet constant en x , par le corollaire 3.12. \square

Corollaire 3.14 Soient $p : X \rightarrow B$ un revêtement, d'espace total X connexe par arcs, $b \in B$ et $x \in p^{-1}(b)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) X est simplement connexe,

(2) deux lacets c et c' en b dans B sont homotopes si leurs relèvements d'origine x ont même extrémité.

Démonstration. Nous utilisons la caractérisation de la simple connexité donnée par le dernier point de l'exercice E.6.

Si X est simplement connexe, deux chemins dans X ayant même origine et même extrémité sont homotopes, donc leurs images par p aussi.

Réciproquement, si α et α' sont deux chemins dans X ayant même origine x et même extrémité, alors les chemins $p \circ \alpha$ et $p \circ \alpha'$ dans B ont leurs relevés dans X ayant même origine et même extrémité, donc sont homotopes par l'assertion (2), et par relèvement des homotopies, α et α' sont homotopes. \square

Exercice E.17 Montrer que si X est connexe par arcs, si $b \in B$ et $x, y \in p^{-1}(b)$, alors $p_*\pi_1(X, x)$ et $p_*\pi_1(X, y)$ sont conjugués dans $\pi_1(B, b)$.

3.7 Action sur la fibre du groupe fondamental de la base

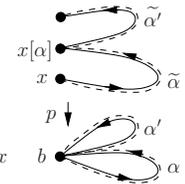
Dans cette partie, nous construisons et étudions une action naturelle du groupe fondamental de la base sur la fibre d'un revêtement.

Soient $p : X \rightarrow B$ un revêtement, $b \in B$ et $F = p^{-1}(b)$ la fibre au-dessus de b .

Pour tout x dans F et $g \in \pi_1(B, b)$, soit α un lacet en b dans B représentant g . On note $xg = \tilde{\alpha}(1) \in F$ l'extrémité de l'unique relèvement $\tilde{\alpha}$ de α d'origine x . Par le corollaire 3.12, le point xg de F ne dépend pas du choix du représentant α de g .

Proposition 3.15 L'application $(g, x) \mapsto xg$ est une action à droite du groupe $\pi_1(B, b)$ sur la fibre F .

Démonstration. Par unicité, pour tous les lacets α et α' en b , le relèvement d'origine x de la concaténation des chemins $\alpha \cdot \alpha'$ est la concaténation du relèvement $\tilde{\alpha}$ de α d'origine x et du relèvement $\tilde{\alpha}'$ de α' d'origine $\tilde{\alpha}(1)$. Le relevé d'origine x du chemin constant en b est le chemin constant en x . On obtient donc

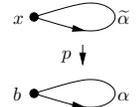


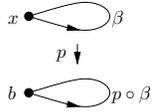
$$\forall x \in F, \quad \forall g, g' \in \pi_1(B, b), \quad (xg)g' = x(gg') \quad \text{et} \quad xe = x$$

où e est l'élément neutre de $\pi_1(B, b)$. \square

Proposition 3.16 Le stabilisateur de $x \in F$ par l'action de $\pi_1(B, b)$ sur la fibre F est $p_*\pi_1(X, x)$.

Démonstration. Soit $g \in \pi_1(B, b)$ fixant x . Si α est un lacet en b représentant g , de relevé d'origine x noté $\tilde{\alpha}$, alors $\tilde{\alpha}(1) = x$, donc $\tilde{\alpha}$ est un lacet en x , dont la classe d'homotopie a pour image g par p_* .





Réciproquement, soit $g \in \pi_1(X, x)$ et β un lacet en x représentant g . Alors β est par unicité le relevé de $p \circ \beta$ d'origine x et $\beta(1) = x$. Donc $x p_*(g) = x$. \square

Si X est un espace topologique, notons $\pi_0 X$ l'ensemble de ses composantes connexes par arcs.

Proposition 3.17 *Si B est connexe par arcs, l'application de F dans $\pi_0 X$, qui à $x \in F$ associe sa composante connexe par arcs dans X , induit une bijection*

$$F/\pi_1(B, b) \simeq \pi_0 X$$

entre $\pi_0 X$ et l'ensemble des orbites de $\pi_1(B, b)$ dans F .

Démonstration. L'application $F \rightarrow \pi_0 X$ est surjective, car si $y \in X$, si α est un chemin dans B entre $p(y)$ et b , alors le relèvement de α d'origine y a pour extrémité un point de F .

Si deux points x et x' de F sont joints par un chemin α dans X , alors $p \circ \alpha$ est un lacet en b dans B , dont le relèvement d'origine x a pour extrémité x' . Donc $x[p \circ \alpha] = x'$.

Enfin, par construction, pour tous x et x' dans F , si $x' = xg$ pour un g dans $\pi_1(B, b)$, alors il existe un chemin entre x et x' . \square

Il découle des propositions 3.17 et 3.16 que si B est connexe par arcs, alors X est connexe par arcs si et seulement si $\pi_1(B, b)$ agit transitivement sur F . On a de plus le fait suivant

Corollaire 3.18 *Si X est connexe par arcs, pour tout x dans F , l'application de $\pi_1(B, b)$ dans F définie par $g \mapsto xg$ induit une bijection*

$$p_* \pi_1(X, x) \backslash \pi_1(B, b) \simeq F. \quad \square$$

En particulier, si X est connexe par arcs et $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, alors p est un revêtement à n feuillets si et seulement si $p_* \pi_1(X, x)$ est un sous-groupe d'indice n de $\pi_1(B, b)$.

Corollaire 3.19 *Si X est connexe par arcs, alors p est un homéomorphisme si et seulement si le morphisme $p_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(B, b)$ est un isomorphisme de groupes (sa surjectivité suffit par le corollaire 3.13).* \square

Le corollaire suivant est assez souvent utilisé pour montrer que deux espaces sont homéomorphes (voir par exemple la preuve du théorème de Poincaré sur les groupes de réflexions [Har1]).

Corollaire 3.20 *Un revêtement connexe par arcs d'un espace simplement connexe est un homéomorphisme.*

Démonstration. Si $p : X \rightarrow B$ est un tel revêtement, alors p_* est injective, et d'image nulle, donc est un isomorphisme. Par le corollaire précédent, p est donc un homéomorphisme. \square

Proposition 3.21 *Soient G un groupe discret, agissant proprement et librement sur un espace topologique X séparé et connexe par arcs, $p : X \rightarrow B = G \backslash X$ la projection canonique, $b \in B$ et $x \in F = p^{-1}(b)$. Pour tout $\gamma \in \pi_1(B, b)$, il existe un et un seul $g_\gamma \in G$ tel que $x\gamma = g_\gamma x$. L'application $\pi_1(B, b) \rightarrow G$ définie par $\gamma \mapsto g_\gamma$ est un morphisme de groupes, surjectif, de noyau $p_* \pi_1(X, x)$.*

Démonstration. Par définition, F est l'orbite de x par G , ce qui montre l'existence de g_γ . L'unicité vient du fait que l'action est libre. Il est clair que $g_e = e$.

Soient g dans G et γ dans $\pi_1(B, b)$. Soit α un lacet en b représentant γ . Alors $x\gamma$ est l'extrémité du relèvement $\tilde{\alpha}$ de α d'origine x et $g(x\gamma)$ est donc l'extrémité du relèvement $g\tilde{\alpha}$ de α d'origine gx . Par unicité, on a donc $g(x\gamma) = (g_\gamma x)\gamma$.

Par conséquent, pour tous γ, γ' dans $\pi_1(B, b)$,

$$g_{\gamma'\gamma} x = x(\gamma'\gamma) = (x\gamma')\gamma = (g_{\gamma'} x)\gamma = g_{\gamma'}(x\gamma) = g_{\gamma'}(g_\gamma x) = (g_{\gamma'} g_\gamma) x$$

ce qui montre que $\gamma \mapsto g_\gamma$ est un morphisme de groupes.

La surjectivité découle du fait que $\pi_1(B, b)$ agit transitivement sur F . Le noyau de $\gamma \mapsto g_\gamma$ est le stabilisateur de x dans $\pi_1(B, b)$, donc est $p_* \pi_1(X, x)$. \square

En particulier, sous les hypothèses de la proposition précédente, $p_* \pi_1(X, x)$ est alors un sous-groupe distingué de $\pi_1(B, b)$ et $\pi_1(B, b)/p_* \pi_1(X, x)$ est isomorphe à G .

Corollaire 3.22 *Soient G un groupe discret, agissant proprement et librement sur un espace topologique X séparé et simplement connexe, et $B = G \backslash X$. Alors $\pi_1(B, b)$ est isomorphe à G .* \square

Exemples :

1. Comme la projection canonique $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est un revêtement, et puisque \mathbb{S}_1 est homéomorphe à \mathbb{R}/\mathbb{Z} , nous avons donc

$$\pi_1(\mathbb{S}_1) \simeq \mathbb{Z}.$$

Plus généralement, $\pi_1(\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n) \simeq \mathbb{Z}^n$.

2. Comme la projection canonique $\mathbb{S}_n \rightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{S}_n = \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ est un revêtement, et que \mathbb{S}_n est simplement connexe pour $n \geq 2$, on a donc

$$\text{si } n \geq 2, \text{ alors } \pi_1(\mathbb{P}_n(\mathbb{R})) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Comme $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$ est homéomorphe au cercle, nous avons bien sûr $\pi_1(\mathbb{P}_1(\mathbb{R})) \simeq \mathbb{Z}$.

3. Comme $\mathbb{S}_{2n+1} \rightarrow \mathbb{U}_p \backslash \mathbb{S}_{2n+1} = L_{n,p}$ est un revêtement, et puisque \mathbb{S}_{2n+1} est simplement connexe pour $n \geq 1$, le groupe fondamental de l'espace lenticulaire $L_{n,p}$ est donc

$$\pi_1(L_{n,p}) \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}.$$

3.8 Relèvement des applications

Dans cette partie, nous étudions l'existence de relèvements d'applications à valeurs dans la base d'un revêtement.

Théorème 3.23 (Théorème du relèvement) *Soient $p : X \rightarrow B$ un revêtement, Y un espace connexe et localement connexe par arcs, et $f : Y \rightarrow B$ une application continue. Soient $y \in Y$, $b = f(y)$ et $x \in p^{-1}(b)$. Il existe un relèvement $\tilde{f} : Y \rightarrow X$ de f tel que $\tilde{f}(y) = x$ si et seulement si*

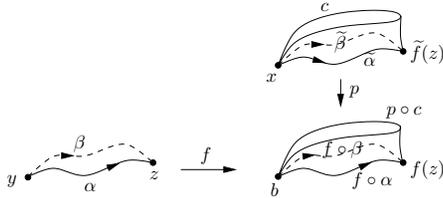
$$f_*\pi_1(Y, y) \subset p_*\pi_1(X, x).$$

Démonstration. Si un tel relèvement existe, le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} & (X, x) & \\ \tilde{f} \nearrow & \downarrow p & \\ (Y, y) & \xrightarrow{f} & (B, b) \end{array}$$

commute, i.e. $f = p \circ \tilde{f}$, donc $f_* = p_* \circ \tilde{f}_*$ et la condition est nécessaire.

Réciproquement, supposons que $f_*\pi_1(Y, y) \subset p_*\pi_1(X, x)$. Pour tout z dans Y , choisissons un chemin α de y à z . Alors $f \circ \alpha$ est un chemin de b à $f(z)$. On note $\tilde{f}(z)$ l'extrémité du relevé $\tilde{\alpha}$ de $f \circ \alpha$ d'origine x .



Si β est un autre chemin de y à z , notons $\tilde{\beta}$ le relevé de $f \circ \beta$ d'origine x . Alors

$$[(f \circ \alpha) \cdot \overline{(f \circ \beta)}] = [f \circ (\alpha \cdot \tilde{\beta})] \in f_*\pi_1(Y, y) \subset p_*\pi_1(X, x).$$

Soit c un lacet en x dans X tel que $(f \circ \alpha) \cdot \overline{(f \circ \beta)}$ soit homotope à $p \circ c$. Par relèvement des homotopies et unicité du relèvement d'origine donnée d'un chemin, on en déduit que $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\beta}$ ont même extrémité. Donc $\tilde{f}(z)$ ne dépend pas du choix de α .

Soit U un voisinage ouvert de $\tilde{f}(z)$ tel que $p(U)$ soit ouvert et $p|_U$ soit un homéomorphisme sur son image. Soit $V \subset f^{-1}(p(U))$ un voisinage ouvert connexe par arcs de z . Pour tout w dans V , si α' est un chemin de z à w contenu dans V , alors $\tilde{f}(w)$ est l'extrémité du relèvement de $f \circ (\alpha \cdot \alpha') = f \circ \alpha \cdot (f \circ \alpha')$ d'origine x , donc appartient à U . Par conséquent, f est continue. \square

Corollaire 3.24 *Si $p : X \rightarrow B$ est un revêtement, pour toute application continue $f : Y \rightarrow B$ telle que Y soit localement connexe par arcs et simplement connexe, il existe un et un seul relèvement $\tilde{f} : Y \rightarrow X$ tel que $\tilde{f}(y) = x$. \square*

Corollaire 3.25 *Deux revêtements $p : X \rightarrow B$ et $p' : X' \rightarrow B$, tels que X et X' soient simplement connexes et localement connexes par arcs, sont isomorphes. Soient $x \in X$ et $x' \in X'$ tels que $p(x) = p'(x')$, il existe alors un unique isomorphisme de revêtements $\phi : X \rightarrow X'$ envoyant x sur x' .*

Démonstration. Par le corollaire précédent, soit \tilde{p} le relèvement de p tel que $\tilde{p}(x) = x'$ et \tilde{p}' le relèvement de p' tel que $\tilde{p}'(x') = x$. Alors $\tilde{p} \circ \tilde{p}'$ est un morphisme de revêtements de p' , fixant x' , donc qui vaut l'identité (voir le corollaire 3.9) car X' est connexe. De même $\tilde{p}' \circ \tilde{p} = \text{id}_X$ et \tilde{p} est un isomorphisme de revêtements. L'unicité découle aussi du corollaire 3.9. \square

Complément : revêtement image réciproque

Nous pouvons aussi définir une catégorie dont les objets sont tous les revêtements (avec base variable), dont les morphismes sont les suivants.

Si $f : X \rightarrow Y$ et $f' : X' \rightarrow Y'$ sont deux revêtements alors un *morphisme de revêtements* de f sur f' est un couple (ψ, ϕ) d'applications continues $\psi : X \rightarrow X'$ et $\phi : Y \rightarrow Y'$ telles que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\psi} & X' \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ Y & \xrightarrow{\phi} & Y' \end{array}$$

Si les bases sont égales, on dit parfois morphisme de revêtements "au-dessus de l'identité" lorsqu'il s'agit de la notion de morphisme de revêtements définie dans la partie 3.1, pour la distinguer de celle introduite juste ci-dessus.

Le couple (id, id) est un morphisme de revêtements, dit *identité* de f sur f , et si $f'' : X'' \rightarrow Y''$ est un revêtement et (ψ', ϕ') un morphisme de revêtements de f' sur f'' , alors $(\psi' \circ \psi, \phi' \circ \phi)$ est un morphisme de revêtements de f sur f'' , dit *composé*.

On montre comme dans le corollaire 3.9 que, pour $p : X \rightarrow B$ et $p' : X' \rightarrow B'$ deux revêtements et $h : B' \rightarrow B$ une application continue, si X est connexe, alors deux morphismes de p sur p' au-dessus de h qui coïncident en un point sont égaux.

Soient $p : X \rightarrow B$ un revêtement et $f : B' \rightarrow B$ une application continue.

Le *revêtement image réciproque* de p par f est l'application $p' : X' \rightarrow B'$ où X' est le sous-espace topologique de $X \times B'$ défini par

$$X' = \{(x, b') \in X \times B' : f(b') = p(x)\}$$

et p' est la restriction à X' de la seconde projection $\text{pr}_2 : X \times B' \rightarrow B'$. La restriction g à X' de la première projection $\text{pr}_1 : X \times B' \rightarrow X$ est une application continue,

rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g} & X \\ p' \downarrow & & \downarrow p \\ B' & \xrightarrow{f} & B . \end{array}$$

Proposition 3.26 *L'application $p' : X' \rightarrow B'$ est un revêtement, et (g, f) est un morphisme de revêtements de p' sur p . L'application $s \mapsto g \circ s$ est une bijection de l'ensemble des sections de p' dans l'ensemble des relèvements de f .*

Démonstration. Si V est un ouvert distingué de B pour p , et si $h : V \times D \rightarrow p^{-1}(V)$ est une trivialisatoin locale de p au-dessus de V , alors $f^{-1}(V)$ est un ouvert de B' . L'application h' de $f^{-1}(V) \times D$ dans $p'^{-1}(f^{-1}(V))$ définie par $(b', d) \mapsto (h(f(b'), d), b')$, qui est un homéomorphisme d'inverse l'application $(x, b') \mapsto (b', \text{pr}_2 \circ h^{-1}(x))$, est une trivialisatoin locale de p' au-dessus de $f^{-1}(V)$.

Si s' est une section de p' , alors $g \circ s'$ est un relèvement de f par le revêtement p , car $p \circ g \circ s' = f \circ p' \circ s' = f$. Si F est un relèvement de f , notons $s' : B' \rightarrow X \times B'$ l'application définie par $b' \mapsto (F(b'), b')$. Alors s' prend ses valeurs dans X' , car $p(F(b')) = f(b')$, et s' est une section de $p' = \text{pr}_{2|X'}$. \square

Voici une autre preuve, utilisant les revêtements image réciproque, du théorème d'existence des relèvements. Reprenons les notations de l'énoncé 3.23.

Supposons que $f_*\pi_1(Y, y) \subset p_*\pi_1(X, x)$. Considérons le revêtement image réciproque de p par f :

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g} & X \\ p' \downarrow & & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{f} & B . \end{array}$$

Si C est la composante connexe de (x, y) dans X' , alors $p'|_C : C \rightarrow Y$ est un revêtement, par le lemme 3.28 ci-dessous. Soit α un lacet en y dans Y . Puisque $f_*\pi_1(Y, y) \subset p_*\pi_1(X, x)$, il existe un lacet β en x dans X tel que $f \circ \alpha$ soit homotope à $p \circ \beta$. Par relèvement des homotopies (voir la proposition 3.11), il existe donc un lacet β' en x dans X tel que $f \circ \alpha = p \circ \beta'$. Alors $\tilde{\alpha} : t \mapsto (\beta'(t), \alpha(t))$ est un lacet en (x, y) dans C tel que $p' \circ \tilde{\alpha} = \alpha$. Donc $p'_* : \pi_1(C, (x, y)) \rightarrow \pi_1(Y, y)$ est surjectif. Par les corollaires 3.13 et 3.19, $p'|_C$ est donc un homéomorphisme, et $f = g \circ (p'|_C)^{-1}$ est un relèvement de f .

Exercice E.18 *Montrer que si $q : Y \rightarrow B'$ est un revêtement et si (h, f) est un morphisme de revêtements de q sur p , alors il existe un unique morphisme de revêtements $\psi : Y \rightarrow X'$ tel que $h = g \circ \psi$:*

Montrer que le revêtement p' (ainsi que l'application g) est déterminé (à isomorphisme près) par les deux propriétés ci-dessus.

3.9 Structure des morphismes de revêtements

Dans cette partie essentiellement technique, nous introduisons les outils permettant de montrer l'équivalence des définitions de revêtement galoisien (voir la partie 3.10). Nous étudions pour cela les propriétés des morphismes de revêtements.

Soient $p : X \rightarrow B$ et $p' : X' \rightarrow B$ deux revêtements, $b \in B$, $F = p^{-1}(b)$ la fibre au-dessus de b dans X et $F' = p'^{-1}(b)$ celle dans X' .

Soit $f : X \rightarrow X'$ un morphisme de revêtements de p sur p' . En particulier, $f(F) \subset F'$. De plus,

$$\forall g \in \pi_1(B, b), \quad \forall x \in F, \quad f(xg) = f(x)g .$$

En effet, si $g = [\alpha]$, alors xg est l'extrémité du chemin $\tilde{\alpha}$ de X d'origine x relèvement de α par p . Le chemin $f \circ \tilde{\alpha}$ dans X' est un relèvement par p' de α d'origine $f(x)$, donc son extrémité $f(xg)$ vaut $f(x)g$.

Notons $\text{Mor}(p, p')$ l'ensemble des morphismes de revêtements de p sur p' , et notons $\text{Mor}_{\pi_1(B, b)}(F, F')$ l'ensemble des applications $\pi_1(B, b)$ -équivariantes de F dans F' .

Proposition 3.27 *Si B est connexe et localement connexe par arcs, alors l'application*

$$\begin{array}{ccc} \Theta : \text{Mor}(p, p') & \rightarrow & \text{Mor}_{\pi_1(B, b)}(F, F') \\ & & f \mapsto f|_F \end{array}$$

est une bijection.

Démonstration. Étape 1 : Ramènon-nous tout d'abord au cas où X est connexe par arcs.

Lemme 3.28 *Soit $p : X \rightarrow B$ un revêtement, de base B connexe et localement connexe par arcs. Si C est une composante connexe de X , alors $p|_C : C \rightarrow B$ est un revêtement.*

Démonstration. Pour tout $b \in B$, soit V un voisinage distingué et connexe de b , et $h : V \times D \rightarrow p^{-1}(V)$ une trivialisatoin de p au-dessus de V . Notons D' l'ensemble des d dans D tels que $h(V \times \{d\}) \subset C$. Par connexité, si $d \notin D'$, alors $h(V \times \{d\}) \cap C = \emptyset$, et donc $h|_{V \times D'}$ est une trivialisatoin de $p|_C$ au-dessus de V .

Si $x \in C$, notons α un chemin entre $p(x)$ et b , et $\tilde{\alpha}$ son relevé d'origine x . Alors $\tilde{\alpha}(1) \in p^{-1}(V) \cap C$, donc D' est non vide. \square

Soit $(X_i)_{i \in I}$ la famille des composantes connexes par arcs de X . Par la proposition 3.17, les orbites de $\pi_1(B, b)$ dans F sont les $F \cap X_i$ pour $i \in I$. Les restrictions à chaque X_i donnent donc des bijections

$$\text{Mor}(p, p') \simeq \prod_{i \in I} \text{Mor}(p|_{X_i}, p') \quad \text{et} \quad \text{Mor}_{\pi_1(B, b)}(F, F') \simeq \prod_{i \in I} \text{Mor}_{\pi_1(B, b)}(F \cap X_i, F') .$$

Si le résultat est vrai pour chaque X_i , il est donc vrai pour X .

Étape 2 : On suppose maintenant X connexe par arcs. En particulier, l'action de $\pi_1(B, b)$ sur F est transitive (voir la proposition 3.17).

Pour montrer que Θ est injective, soient f et g dans $\text{Mor}(p, p')$ telle que $f|_F = g|_F$. Comme F est non vide et X connexe, on obtient $f = g$ par le corollaire 3.9.

Pour montrer que Θ est surjective, on considère $\phi : F \rightarrow F'$ une application $\pi_1(B, b)$ -équivariante. Soient $x \in F$ et $x' = \phi(x) \in F'$.

Il existe un (unique) relèvement $f : X \rightarrow X'$ de l'application continue $p : X \rightarrow B$ par le revêtement $p' : X' \rightarrow B$ tel que $f(x) = x'$. En effet, par le théorème du relèvement 3.23, il suffit de montrer que $p_*\pi_1(X, x)$ est contenu dans $p'_*\pi_1(X', x')$. Par la proposition 3.16, le stabilisateur de x (respectivement x') par l'action de $\pi_1(B, b)$ sur F (respectivement F') est $p_*\pi_1(X, x)$ (respectivement $p'_*\pi_1(X', x')$). Comme ϕ est équivariante, si $g \in p_*\pi_1(X, x)$, alors

$$x'g = \phi(x)g = \phi(xg) = \phi(x) = x'.$$

Donc $g \in p'_*\pi_1(X', x')$.

Comme $f|_F$ et ϕ sont $\pi_1(B, b)$ -équivariants, comme l'action de $\pi_1(B, b)$ sur F est transitive et comme $f(x) = \phi(x)$, on a donc $f|_F = \phi$, ce qui montre la surjectivité. \square

Corollaire 3.29 *Sous les hypothèses de la proposition 3.27, la restriction à F induit une bijection de l'ensemble $\text{Isom}(p, p')$ des isomorphismes de revêtements de p sur p' à valeurs dans l'ensemble $\text{Isom}_{\pi_1(B, b)}(F, F')$ des bijections $\pi_1(B, b)$ -équivariantes de F sur F' .*

Démonstration. Si $f : X \rightarrow X'$ est un isomorphisme de revêtements, alors $f|_F$ est une bijection (d'inverse $g|_{F'}$ où $g : X' \rightarrow X$ est l'isomorphisme de revêtements inverse de f).

Réciproquement, si $\phi : F \rightarrow F'$ est une bijection $\pi_1(B, b)$ -équivariante, d'inverse $\psi : F' \rightarrow F$, soient $f : X \rightarrow X'$ et $g : X' \rightarrow X$ les morphismes de revêtements tels que $f|_F = \phi$ et $g|_{F'} = \psi$. Alors $g \circ f$ est un morphisme de revêtements de p sur p , tel que $g \circ f|_F = \text{id}_{X|_F}$, donc par unicité $g \circ f = \text{id}_X$. De même $f \circ g = \text{id}_{X'}$ et $f : X \rightarrow X'$ est un isomorphisme. \square

En particulier, les revêtements p et p' sont isomorphes si et seulement s'il existe une bijection $\pi_1(B, b)$ -équivariante de F sur F' .

Corollaire 3.30 *Si $p : X \rightarrow B$ est un revêtement, de base B connexe et localement connexe par arcs, s'il existe $b \in B$ tel que l'action de $\pi_1(B, b)$ sur $F = p^{-1}(b)$ soit triviale, alors p est un revêtement trivial.*

Démonstration. L'application $\text{pr}_1 : B \times F \rightarrow B$ est un revêtement, et l'action de $\pi_1(B, b)$ sur $\text{pr}_1^{-1}(b) = \{b\} \times F$ est triviale. La seconde projection $\text{pr}_1^{-1}(b) \rightarrow p^{-1}(b)$ est donc une bijection $\pi_1(B, b)$ -équivariante. \square

Corollaire 3.31 *Tout revêtement d'un espace simplement connexe et localement connexe par arcs est trivial.*

Démonstration. Toute action d'un groupe trivial est triviale. \square

Avant de donner d'autres applications de la proposition 3.27, voici quelques rappels de théorie des groupes.

Soit H un sous-groupe d'un groupe G . Le *normalisateur* de H dans G est

$$N(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}.$$

Il est facile de montrer que $N(H)$ est le plus grand sous-groupe de G dans lequel H est distingué, et que H est distingué dans G si et seulement si $N(H) = G$.

Pour l'action à droite par translations à droite $(g, Hg) \mapsto Hg'g$ de G sur $H \setminus G$, notons $\text{Aut}_G(H \setminus G)$ le groupe des bijections G -équivariantes de $H \setminus G$.

Lemme 3.32 *Les groupes $\text{Aut}_G(H \setminus G)$ et $H \setminus N(H)$ sont isomorphes.*

Démonstration. Soient $\phi \in \text{Aut}_G(H \setminus G)$ et $n \in G$ tels que $\phi(He) = Hn$. Par G -équivariance,

$$\forall g \in G, \quad \phi(Hg) = Hng. \quad (*)$$

En particulier, $Hn = \phi(He) = \phi(Hh) = Hnh$ pour tout $h \in H$. Donc n appartient à $N(H)$. On a donc une application

$$\begin{array}{ccc} \text{Aut}_G(H \setminus G) & \rightarrow & H \setminus N(H) \\ \phi & \mapsto & Hn \end{array}.$$

C'est un morphisme de groupe injectif par (*). Pour tout n dans $N(H)$, l'application $\bar{\phi} : G \rightarrow H \setminus G$ définie par $\bar{\phi}(g) = Hng$, vérifie $\bar{\phi}(hg) = Hnhg = H(nhn^{-1})ng = \bar{\phi}(g)$ pour tout h dans H . Elle induit donc une application $\phi_n : H \setminus G \rightarrow H \setminus G$. Celle-ci est G -équivariante et bijective, d'inverse $\phi_{n^{-1}}$, et son image par $\text{Aut}_G(H \setminus G) \rightarrow H \setminus N(H)$ est Hn . \square

En particulier, le groupe des bijections G -équivariantes de $H \setminus G$ (pour l'action à droite de G sur $H \setminus G$) agit transitivement sur G/H si et seulement si $N(H) = G$, c'est-à-dire si et seulement si H est distingué dans G .

Corollaire 3.33 *Si $p : X \rightarrow B$ est un revêtement, d'espace total X connexe et localement connexe par arcs, et si $x \in X$, alors les groupes $\text{Aut}(p)$ et $p_*\pi_1(X, x) \setminus N(p_*\pi_1(X, x))$ sont isomorphes.*

Démonstration. Soient $b = p(x)$ et $F = p^{-1}(b)$. Puisque X est connexe par arcs, l'action à droite de $G = \pi_1(B, b)$ sur F est transitive, donc il existe une bijection G -équivariante entre F et $H \setminus G$ où H est le stabilisateur de x par l'action de G sur F , qui est $p_*\pi_1(X, x)$ (voir les propositions 3.17 et 3.16). Par le corollaire 3.29 et le lemme précédent, on a donc

$$\text{Aut}(p) \simeq \text{Aut}_G(H \setminus G) \simeq H \setminus N(H) = p_*\pi_1(X, x) \setminus N(p_*\pi_1(X, x)). \quad \square$$

Voici enfin les dernières propriétés des automorphismes de revêtements dont nous aurons besoin dans la suite.

Proposition 3.34 Soit $p : X \rightarrow B$ un revêtement, d'espace total X connexe et séparé, et B localement connexe. Le groupe discret $\Gamma = \text{Aut}(p)$ des automorphismes de p agit (continuellement) proprement et librement sur X . Si Γ' est un sous-groupe de Γ et si $f : \Gamma' \backslash X \rightarrow B$ est l'application induite par p , alors f est un revêtement, et la projection canonique $\pi : X \rightarrow \Gamma' \backslash X$ est un morphisme de revêtements de p sur f .

Démonstration. Comme X est connexe, le groupe Γ agit librement sur X par le corollaire 3.9. Soit $\mathbf{gr} : \Gamma \times X \rightarrow X \times X$ l'application graphe $(g, x) \mapsto (x, gx)$. Comme Γ agit librement et comme $\Gamma \times X$ est séparé, l'image réciproque d'un point par \mathbf{gr} est un point, donc compact. Soient F un fermé de $\Gamma \times X$ et $(x, y) \in \overline{\mathbf{gr}(F)}$. Comme $p \times p$ est continue et B séparé (voir les exercices E.23 dans la partie 3.13 et E.A.95 dans la partie A.5), si Δ est la diagonale de $B \times B$, alors

$$(p \times p)(x, y) \in (p \times p)(\overline{\mathbf{gr}(F)}) \subset \overline{(p \times p)(\mathbf{gr}(F))} \subset \overline{\Delta} = \Delta.$$

Donc $p(x) = p(y)$. Soit V un voisinage distingué connexe de $p(x)$, et V_x, V_y les composantes connexes de $p^{-1}(V)$ contenant x, y respectivement. Comme $(x, y) \in \overline{\mathbf{gr}(F)}$, l'intersection $(V_x \times V_y) \cap \mathbf{gr}(F)$ est non vide. Soient $g \in \Gamma$ et $u \in X$ tels que $u \in V_x$ et $gu \in V_y$. Comme g est un automorphisme de revêtements de p , on a donc $gV_x = V_y$ et en particulier $y = gx$. Donc \mathbf{gr} est fermée. Par conséquent, Γ agit proprement.

Tout sous-groupe Γ' de Γ agit aussi librement et proprement. Si V est un ouvert distingué connexe dans B pour p , alors, Γ' permutant les composantes connexes de $p^{-1}(V)$, il est immédiat que V est aussi un ouvert distingué dans B pour f . \square

Proposition 3.35 Soient $p : X \rightarrow B$ et $p' : X' \rightarrow B$ deux revêtements, d'espaces totaux X et X' connexes et de base B localement connexe. Si $\phi : X \rightarrow X'$ est un morphisme de revêtements de p sur p' , alors ϕ est un revêtement.

Démonstration. Soient $x' \in X'$, $b = p'(x')$ et V un voisinage connexe de b , distingué pour p et p' . Soit $s' : V \rightarrow p'^{-1}(V)$ la section de $p'_{|p'^{-1}(V)}$ telle que $s'(b) = x'$.

Si $\phi(X)$ rencontre $s'(V)$, soient $y \in X$ et $b' \in V$ tels que $\phi(y) = s'(b')$. Soit $s : V \rightarrow p^{-1}(V)$ la section de $p_{|p^{-1}(V)}$ telle que $s(b') = y$. Alors $\phi \circ s$ et s' sont deux sections de $p'_{|p'^{-1}(V)}$ qui coïncident en b' , donc sont égales, car V est connexe (voir le corollaire 3.9). En particulier, comme $x' \in s'(V)$, on a $x' \in \phi(X)$. Donc si $x' \notin \phi(X)$, alors $\phi(X)$ ne rencontre pas le voisinage $s'(V)$ de x' , et le complémentaire de $\phi(X)$ est ouvert.

Pour tout x dans $\phi^{-1}(x')$, qui est discret, car contenu dans la fibre $p^{-1}(p'(x'))$, notons $s_x : V \rightarrow p^{-1}(V)$ la section de $p_{|p^{-1}(V)}$ telle que $s_x(b) = x$. Comme ci-dessus, $\phi \circ s_x = s'$. Donc l'homéomorphisme $s'(V) \times \phi^{-1}(x') \rightarrow \phi^{-1}(s'(V)) = p^{-1}(V)$ défini par $(u, x) \mapsto s_x \circ p'(u)$ est une trivialisatation de ϕ au-dessus de $s'(V)$.

En particulier, ϕ est ouverte. D'où $\phi(X)$ est ouvert et fermé dans X' , donc est égal à X' par connexité. Comme $\phi^{-1}(x')$ est non vide, on en déduit que ϕ est un revêtement. \square

3.10 Revêtements galoisiens

Le but de cette partie est de décrire de manière intrinsèque la collection des revêtements isomorphes aux revêtements de la forme $X \rightarrow G \backslash X$ où G est un groupe discret agissant librement et proprement sur un espace topologique séparé X .

Théorème 3.36 Soient $p : X \rightarrow B$ un revêtement, d'espace total X connexe et localement connexe par arcs, $x \in X$, $b = p(x)$ et $F = p^{-1}(b)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) l'action de $\text{Aut}(p)$ sur F est transitive ;
- (2) $p_*\pi_1(X, x)$ est distingué dans $\pi_1(B, b)$;
- (3) $p_*\pi_1(X, y) = p_*\pi_1(X, z)$ pour tous y et z dans F ;
- (4) pour tout lacet α de B en b , ou bien tout relèvement de α est un lacet, ou bien aucun relèvement de α n'est un lacet.

Si X est séparé, ces conditions sont équivalentes à :

- (5) il existe un groupe discret Γ agissant librement et proprement sur X et un homéomorphisme $f : \Gamma \backslash X \rightarrow B$ tel que si $\pi : X \rightarrow \Gamma \backslash X$ est la projection canonique, alors le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \pi \swarrow & & \searrow p \\ \Gamma \backslash X & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Démonstration. Soient $G = \pi_1(B, b)$ et $H = p_*\pi_1(X, x)$. Comme X est connexe par arcs, il existe par le corollaire 3.18 une bijection G -équivariante de F sur $H \backslash G$, pour l'action à droite de G sur $H \backslash G$. Donc par le corollaire 3.29, $\text{Aut}(p)$ agit transitivement sur F si et seulement si le groupe des bijections G -équivariantes de $H \backslash G$ agit transitivement sur $H \backslash G$. Par la remarque précédant le corollaire 3.33, les assertions (1) et (2) sont donc équivalentes.

Si l'assertion (1) est vérifiée, alors l'assertion (4) l'est aussi.

Si l'assertion (4) est vérifiée, pour tous y , et z dans F , si α est un lacet en y dans X , alors α est un relèvement de $p \circ \alpha$ qui est un lacet, donc le relèvement β de $p \circ \alpha$ d'origine z est aussi un lacet, et $p_*[\alpha] = p_*[\beta]$. Donc $p_*\pi_1(X, y) \subset p_*\pi_1(X, z)$. En échangeant y et z , l'assertion (3) est donc vérifiée.

Si l'assertion (3) est vérifiée, pour tout lacet α en b dans B , soit c son relèvement d'origine x , soit y l'extrémité de c , et soit $\phi_c : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(X, y)$ l'isomorphisme de groupe $[\beta] \mapsto [\overline{c} \cdot \beta \cdot c]$ (voir la proposition 2.3). Comme $p_*([\overline{c} \cdot \beta \cdot c]) = [\alpha]^{-1} p_*([\beta]) [\alpha]$, nous avons alors

$$[\alpha] p_*\pi_1(X, x) [\alpha]^{-1} = p_*(\phi_c(\pi_1(X, x))) = p_*\pi_1(X, y) = p_*\pi_1(X, x),$$

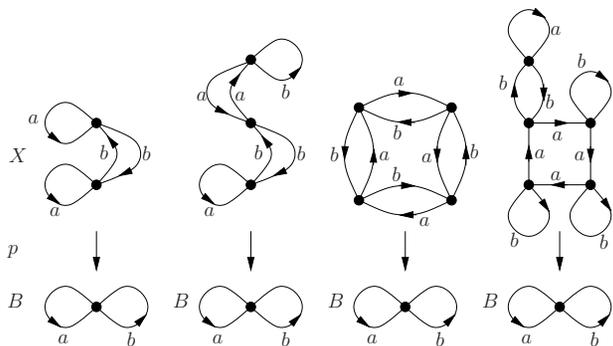
donc l'assertion (2) est vérifiée.

Supposons maintenant que X est séparé. Si l'assertion (5) est vérifiée, alors Γ est contenu dans $\text{Aut}(\pi)$ et agit transitivement sur chaque fibre de π , donc (1) est

vérifiée. Réciproquement, si l'assertion (1) est vérifiée, par la proposition 3.34, le groupe discret $\Gamma = \text{Aut}(p)$ agit proprement et librement sur X , et l'application $f : \Gamma \backslash X \rightarrow B$ induite par p est un revêtement à un feuillet, donc un homéomorphisme, tel que $f \circ \pi = p$. Par conséquent, l'assertion (5) est vérifiée. \square

Un revêtement $p : X \rightarrow B$, d'espace total X connexe et localement connexe par arcs, est dit *galoisien* si l'une des propriétés (1)-(4) du théorème précédent est vérifiée. Le groupe $\Gamma = \text{Aut}(p)$ s'appelle alors le *groupe de Galois* de p .

Exercice E.19 *Montrer que les applications $p : X \rightarrow B$ suivantes entre graphes sont des revêtements. Quels sont ceux qui sont galoisiens ? Quels sont leurs groupes d'automorphismes de revêtements ? (Les sommets de X sont envoyés par p sur l'unique sommet de B , et la restriction de p à chaque arête orientée du graphe X étiquetée par une lettre, est un homéomorphisme préservant l'orientation sur l'arête orientée de B étiquetée par la même lettre).*



3.11 Revêtements universels

Le but de cette partie est de montrer l'existence de revêtements simplement connexes pour les espaces topologiques suffisamment gentils.

Soit B un espace topologique connexe et localement connexe par arcs. Un *revêtement universel* de B est un revêtement $\tilde{\pi} : \tilde{B} \rightarrow B$ d'espace total \tilde{B} connexe tel que pour tout revêtement $p : X \rightarrow B$ d'espace total X connexe, pour tous $\tilde{b} \in \tilde{B}$ et $x \in X$ tels que $\pi(\tilde{b}) = p(x)$, il existe un morphisme de revêtements $\phi : \tilde{B} \rightarrow X$ de π sur p tel que $\phi(\tilde{b}) = x$.

Par le corollaire 3.9, le morphisme ϕ est unique. Un revêtement universel de B est unique à isomorphisme près (même preuve que le corollaire 3.25). Cet isomorphisme est unique une fois effectué un choix de point base dans la fibre au-dessus d'un point base de B . Pour cette raison, on dit parfois par abus "le revêtement universel" de B .

Lemme 3.37 *Un revêtement universel de B est galoisien.*

Démonstration. Pour tout b de B , si $x, y \in p^{-1}(b)$, alors il existe par la propriété universelle un morphisme de revêtements $\phi_{x,y} : \tilde{B} \rightarrow \tilde{B}$ de p tel que $\phi_{x,y}(x) = y$. Comme $\phi_{x,y}$ est un automorphisme de revêtements (d'inverse $\phi_{y,x}$), ceci montre que l'assertion (1) du théorème 3.36 est vérifiée. \square

Le corollaire 3.24 s'énonce ainsi :

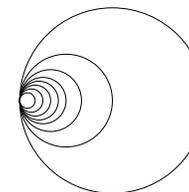
Proposition 3.38 *Si $p : X \rightarrow B$ est un revêtement, d'espace total X simplement connexe, alors p est un revêtement universel.* \square

Par exemple, l'application $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}_1$ définie par $t \mapsto e^{2i\pi t}$, les projections canoniques $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{S}_n \rightarrow \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ pour $n \geq 2$, et $\mathbb{S}_{2n+1} \rightarrow L_{n,p}$ (où $L_{n,p}$ est l'espace lenticulaire, défini juste avant le corollaire 3.7) sont des revêtements universels.

Un espace topologique Y est *semilocallement simplement connexe* si tout point y de Y admet un voisinage U tel que tout lacet en y contenu dans U soit homotope dans Y au lacet constant en y (ou de manière équivalente tel que $i_* : \pi_1(U, y) \rightarrow \pi_1(Y, y)$ soit le morphisme nul, pour $i : U \rightarrow Y$ l'inclusion.)

Si Y est localement contractile, par exemple si Y est une variété topologique, ou un CW-complexe (voir la partie 4.3), alors Y est semilocallement simplement connexe.

Exercice E.20 *Considérons le cercle S_n de centre $(\frac{1}{n+1}, 0)$ et de rayon $\frac{1}{n+1}$ dans \mathbb{R}^2 . Soit $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$, muni de la topologie induite par celle de \mathbb{R}^2 , appelé l'anneau hawaïen. Montrer que B est connexe et localement connexe par arcs, mais n'est pas semilocallement simplement connexe. Montrer que B n'admet pas de revêtement universel.*



Attention, la propriété d'être semilocallement simple connexe n'est pas une propriété locale (c'est-à-dire un ouvert d'un espace topologique semilocallement simplement connexe ne l'est pas forcément). Par exemple, le cône CB sur l'anneau hawaïen B est contractile, mais le cône CB privé de son sommet est un ouvert qui se rétracte par déformation forte sur B , donc n'est pas semilocallement simplement connexe.

Théorème 3.39 *Soit B un espace topologique séparé, connexe et localement connexe par arcs. Alors B admet un revêtement simplement connexe si et seulement si B est semilocallement simplement connexe.*

Démonstration. Si $p : X \rightarrow B$ est un revêtement simplement connexe de B , pour tout point b de B , si V est un voisinage distingué de b , et $s : V \rightarrow X$ une section de $p|_{p^{-1}(V)}$, alors l'inclusion $i : V \rightarrow B$ est égale à $p \circ s$, donc par functorialité, $i_* = 0$.

Réciproquement, si B est semilocallement simplement connexe, soit $b \in B$, soit \tilde{B} l'ensemble des classes d'homotopie (relativement extrémités) des chemins d'origine b et soit

$$\begin{aligned} \tilde{\pi} : \tilde{B} &\rightarrow B \\ [\beta] &\mapsto \beta(1) \end{aligned}$$

l'application quotient de l'application d'évaluation en 1, qui est surjective car B est connexe par arcs.

On munit l'ensemble des chemins dans B d'origine b de la topologie compacte-ouverte, et \tilde{B} de la topologie quotient. Comme l'application d'évaluation en un point est continue pour la topologie compacte-ouverte (voir l'exercice E.A.94), l'application $\tilde{\pi}$ est continue.

Le groupe discret $G = \pi_1(B, b)$ agit sur \tilde{B} par

$$\begin{aligned} G \times \tilde{B} &\rightarrow \tilde{B} \\ ([\alpha], [\beta]) &\mapsto [\alpha \cdot \beta] . \end{aligned}$$

Cette action est continue et libre, car si $[\alpha \cdot \beta] = [\beta]$, alors $[\alpha]$ est la classe d'homotopie $[\epsilon_b]$ du lacet constant ϵ_b en b . Les orbites de G sont les fibres de $\tilde{\pi}$, car si $\tilde{\pi}([\beta]) = \tilde{\pi}([\beta'])$, alors $\beta' \cdot \bar{\beta}$ est un lacet en b et $[\beta'] = [\beta' \cdot \bar{\beta}][\beta]$.

Si $p : \tilde{B} \rightarrow G \backslash \tilde{B}$ est la projection canonique, alors l'application $\tilde{\pi}$ induit par passage au quotient une application $f : G \backslash \tilde{B} \rightarrow B$ telle que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} \tilde{B} & & \\ p \downarrow & \searrow \tilde{\pi} & \\ G \backslash \tilde{B} & \xrightarrow{f} & B , \end{array}$$

et f est continue et bijective.

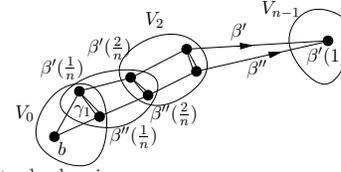
Lemme 3.40 *Pour tout $[\beta]$ dans \tilde{B} , il existe un voisinage ouvert $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{[\beta]}$ de $[\beta]$ dans \tilde{B} tel que*

- pour tout g dans G , si $\mathcal{O} \cap g\mathcal{O}$ est non vide, alors $g = e$,
- $\tilde{\pi}(\mathcal{O})$ est ouvert dans B .

Démonstration. Soit $[\beta]$ dans \tilde{B} . Par compacité de $[0, 1]$, il existe $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ et, pour $i = 0, \dots, n-1$, des ouverts V_i connexes par arcs, tel que

- (i) tout lacet dans V_i est homotope dans B au lacet constant,
- (ii) $\beta([\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}])$ est contenu dans V_i .

Soit $\tilde{\mathcal{O}}$ l'ouvert de l'espace des chemins dans B d'origine b , formé des chemins β' d'origine b tels que $\beta'([\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]) \subset V_i$ et $\beta'(\frac{i}{n})$ appartient à la même composante connexe par arcs de $V_i \cap V_{i-1}$ que $\beta(\frac{i}{n})$ (les composantes connexes par arcs d'un espace localement connexe par arcs sont ouvertes, voir la fin de la partie A.1). Soient β' et β'' dans $\tilde{\mathcal{O}}$ tels que $\beta'(1) = \beta''(1)$.



Soit γ_i un chemin dans $V_i \cap V_{i-1}$ joignant $\beta'(\frac{i}{n})$ à $\beta''(\frac{i}{n})$, tels que γ_0 et γ_n soient constants. Soit $\beta'_i = \beta''_{[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]}$.

Soit c le chemin

$$c = (\gamma_0 \cdot \beta'_0 \cdot \bar{\gamma}_1) \cdot (\gamma_1 \cdot \beta'_1 \cdot \bar{\gamma}_2) \cdot \dots \cdot (\gamma_{n-2} \cdot \beta'_{n-2} \cdot \bar{\gamma}_{n-1}) \cdot (\gamma_{n-1} \cdot \beta'_{n-1} \cdot \bar{\gamma}_n) .$$

Alors par la première propriété des V_i , nous avons $\beta'' \sim c \sim \beta'$.

En particulier, deux chemins dans B , suffisamment proches, ayant mêmes extrémités, sont homotopes (relativement aux extrémités). Soit $\tilde{\mathcal{O}}$ l'ensemble des classes d'homotopie (relativement aux extrémités) des éléments de $\tilde{\mathcal{O}}$. Cet ensemble $\tilde{\mathcal{O}}$ est ouvert dans \tilde{B} (car le saturé de $\tilde{\mathcal{O}}$ est ouvert).

Soient $g \in G$ et $[\beta'], [\beta''] \in \tilde{\mathcal{O}}$ tels que $[\beta'] = g[\beta'']$. Alors $\beta'(1) = \beta''(1)$, donc par ce qui précède, $[\beta'] = [\beta'']$. Comme G agit librement, nous avons donc $g = e$.

Nous avons $\tilde{\pi}(\tilde{\mathcal{O}}) = V_{n-1}$ par la définition de $\tilde{\mathcal{O}}$ et la connexité par arcs de V_{n-1} , donc $\tilde{\pi}(\tilde{\mathcal{O}})$ est ouvert dans B . \square

Lemme 3.41 *L'application $\tilde{\pi}$ est ouverte, l'espace \tilde{B} est séparé, et l'action de G sur \tilde{B} est propre.*

Démonstration. L'application $\tilde{\pi}$ est ouverte par le lemme précédent.

Montrons que l'espace \tilde{B} est séparé. Soient x , et y dans \tilde{B} . Si $\tilde{\pi}(x) \neq \tilde{\pi}(y)$, comme $\tilde{\pi}$ est continue et B séparé, alors x , et y ont des voisinages disjoints. Si $\tilde{\pi}(x) = \tilde{\pi}(y)$, alors il existe g dans G tel que $y = gx$. Donc $\tilde{\mathcal{O}}_x$ et $g\tilde{\mathcal{O}}_x$ sont des voisinages ouverts de x et y , disjoints sauf si $g = e$, c'est-à-dire $x = y$.

Soit $\mathbf{gr} : G \times \tilde{B} \rightarrow \tilde{B} \times \tilde{B}$ l'application graphe. Puisque G agit librement, l'image réciproque d'un singleton est un singleton, donc est compact car $G \times \tilde{B}$ est séparé.

Comme f est continue et bijective, l'espace quotient $G \backslash \tilde{B}$ est séparé. Donc la diagonale Δ de $(G \backslash \tilde{B}) \times (G \backslash \tilde{B})$ est fermée, et l'image $\text{im}(\mathbf{gr}) = (p \times p)^{-1}(\Delta)$ est fermée dans $\tilde{B} \times \tilde{B}$. L'application $\mathbf{gr}^{-1} : \text{im}(\mathbf{gr}) \rightarrow G \times \tilde{B}$ est $([\beta'], [\beta'']) \mapsto ([\beta' \cdot \bar{\beta}], [\beta])$, donc est continue. Donc \mathbf{gr} est fermée. \square

Par le lemme précédent, l'application f est ouverte, donc est un homéomorphisme, et p est un revêtement (voir le théorème 3.5). Par conséquent, $\tilde{\pi}$ est un revêtement.

Il suffit maintenant de montrer que \tilde{B} est simplement connexe.

Soient c un chemin d'origine b dans B et $c_t : s \mapsto c(st)$, qui est un chemin dans B , pour tout $t \in [0, 1]$. Comme $(s, t) \mapsto c(s, t)$ est continue et comme $\mathcal{C}([0, 1] \times [0, 1], B) = \mathcal{C}([0, 1], \mathcal{C}([0, 1], B))$ (voir l'exercice E.A.94), l'application $t \mapsto [c_t]$ est un chemin dans \tilde{B} , d'origine $[c_b]$ et d'extrémité $[c]$. Donc \tilde{B} est connexe par arcs.

De plus, $t \mapsto [c_t]$ est le relèvement de c d'origine $[\epsilon_b]$ pour le revêtement $\tilde{\pi}$. Soit γ un lacet en $[\epsilon_b]$ dans \tilde{B} . Comme γ est le relèvement de $\tilde{\pi} \circ \gamma$ d'origine $[\epsilon_b]$, on a par unicité $\gamma(t) = [(\tilde{\pi} \circ \gamma)_t]$ pour tout $t \in [0, 1]$. Si $h(t, s) = [((\tilde{\pi} \circ \gamma)_t)_s]$, alors h est une homotopie entre $[\epsilon_b]$ et γ .

(Remarque.) Voici une autre preuve. Soient c , et c' deux lacets d'origine b dans B . Les relèvements de c , et c' d'origine $[\epsilon_b]$ sont $t \mapsto [c_t]$ et $t \mapsto [c'_t]$ respectivement. S'ils ont même extrémité, alors $[c] = [c']$, donc c et c' sont homotopes. Le corollaire 3.14 montre que \tilde{B} est simplement connexe.) \square

Le résultat suivant découle en particulier du théorème 3.39 et de la proposition 3.38.

Corollaire 3.42 *Tout espace topologique séparé, connexe, localement contractile admet un revêtement universel.* \square

Soit B un espace topologique séparé, connexe, localement connexe par arcs, et semilocallement simplement connexe. Si $\tilde{\pi} : \tilde{B} \rightarrow B$ est un revêtement universel de B , alors par unicité, \tilde{B} est simplement connexe. Le groupe $\Gamma = \text{Aut}(\tilde{\pi})$ des automorphismes de revêtements de $\tilde{\pi}$ agit librement et proprement sur X (proposition 3.34), et transitivement sur les fibres (car $\tilde{\pi}$ est galoisien). Donc le revêtement $\Gamma \backslash \tilde{B} \rightarrow B$ est un homéomorphisme, et pour tous b dans B et x dans $\tilde{\pi}^{-1}(b)$, les groupes Γ et $\pi_1(B, b)$ sont isomorphes

$$\text{Aut}(\tilde{\pi}) \simeq \pi_1(B, b)$$

par l'unique isomorphisme $\phi : \text{Aut}(\tilde{\pi}) \rightarrow \pi_1(B, b)$ tel que $\gamma x = x\phi(\gamma)^{-1}$ pour tout γ dans Γ (voir le corollaire 3.22).

3.12 Classification des revêtements

Le but de cette partie est d'établir une correspondance entre les revêtements connexes d'un espace topologique (suffisamment gentil) et les sous-groupes de son groupe fondamental.

Soit B un espace topologique séparé, connexe, localement connexe par arcs, et semilocallement simplement connexe. Fixons-nous un point $b \in B$, un revêtement universel $\tilde{\pi} : \tilde{B} \rightarrow B$ de B et $x \in \tilde{\pi}^{-1}(b)$. Identifions $\text{Aut}(\tilde{\pi})$ avec $\pi_1(B, b)$ comme à la fin de la partie précédente.

Si H est un sous-groupe de $\text{Aut}(\tilde{\pi})$, alors l'application $\tilde{\pi} : \tilde{B} \rightarrow B$ induit une application $\pi_H : H \backslash \tilde{B} \rightarrow B$, appelée le *revêtement de B associé à H* . Nous appellerons *revêtement connexe de B* tout revêtement de B d'espace total connexe.

Théorème 3.43 *L'application $H \mapsto \pi_H$ induit une bijection de l'ensemble des classes de conjugaison de sous-groupes de $\text{Aut}(\tilde{\pi})$ sur l'ensemble des classes d'isomorphisme de revêtements connexes de B . Elle induit aussi une bijection de l'ensemble des sous-groupes distingués de $\text{Aut}(\tilde{\pi})$ dans l'ensemble des classes d'isomorphisme de revêtements galoisiens de B , ainsi que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une bijection*

de l'ensemble des classes de conjugaison de sous-groupes d'indice n de $\text{Aut}(\tilde{\pi})$ dans l'ensemble des classes d'isomorphisme de revêtements à n feuilletés de B .

Démonstration. Soit $G = \text{Aut}(\tilde{\pi})$. Par construction, la fibre de π_H au-dessus de b est en bijection G -équivariante avec $H \backslash G$, et donc est de cardinal n si et seulement si H est d'indice n dans G

L'application π_H est un revêtement par la proposition 3.34, qui est galoisien si et seulement si H est distingué dans G , par le théorème 3.36.

Si H et H' sont conjugués par $g \in G$ (c'est-à-dire si $H' = gHg^{-1}$), alors l'automorphisme de revêtements $g : \tilde{B} \rightarrow \tilde{B}$ de $\tilde{\pi}$ induit un isomorphisme de revêtements $H \backslash \tilde{B} \rightarrow H' \backslash \tilde{B}$ de π_H sur $\pi_{H'}$ (défini par $Hx \mapsto Hgx$). Donc l'application $H \mapsto \pi_H$ induit une application Ψ de l'ensemble des classes de conjugaison de sous-groupes de G dans l'ensemble des classes d'isomorphisme de revêtements connexes de B .

Réciproquement, si les revêtements π_H et $\pi_{H'}$ sont isomorphes, alors par le corollaire 3.29, les fibres de π_H et $\pi_{H'}$ au-dessus de b sont en bijection G -équivariante. Donc il existe une bijection G -équivariante $\phi : H \backslash G \rightarrow H' \backslash G$. Si $\phi(He) = H'g_0$, par G -équivariance de ϕ , on a pour tout h dans H ,

$$H'g_0 = \phi(He) = \phi(Hh) = \phi(He)h = H'g_0h,$$

donc $g_0Hg_0^{-1} \subset H'$, et en utilisant ϕ^{-1} , nous avons $g_0Hg_0^{-1} = H'$. Donc Ψ est injective.

(Remarque.) Voici une autre preuve. Pour H un sous-groupe de G , on note $X_H = H \backslash \tilde{B}$, et x_H le point de X_H image de $x \in \tilde{B}$. Par construction, $H = (\pi_H)_* \pi_1(X_H, x_H)$, donc si $\phi : X_H \rightarrow X_{H'}$ est un isomorphisme, alors comme $\pi_H = \pi_{H'} \circ \phi$ et $\phi_* : \pi_1(X_H, x_H) \rightarrow \pi_1(X_{H'}, \phi(x_H))$ est un isomorphisme de groupes, on a $H = (\pi_H)_* \pi_1(X_H, x_H) = (\pi_{H'})_* \pi_1(X_{H'}, \phi(x_H))$, qui est conjugué à H' par l'exercice E.17.)

Enfin, si $p : X \rightarrow B$ est un revêtement connexe et $u \in F = p^{-1}(b)$, alors la fibre F est en bijection G -équivariante avec $H \backslash G$, où $H = p_* \pi_1(X, u)$, donc les fibres des revêtements connexes p et π_H sont en bijection G -équivariante. Par le corollaire 3.29, les revêtements p et π_H sont isomorphes. Donc Ψ est surjective. \square

Remarques. (1) En particulier, pour tout revêtement connexe $p : X \rightarrow B$, il existe un revêtement $\pi_X : \tilde{B} \rightarrow X$ tel que le diagramme suivant commute (on dit que tout revêtement connexe de B est factorisé par son revêtement universel)

$$\begin{array}{ccc} \tilde{B} & & \\ & \searrow \pi_X & \\ \tilde{\pi} \downarrow & & X \\ & \swarrow p & \\ B & & \end{array}$$

(2) Soient H un sous-groupe distingué de $G = \text{Aut}(\tilde{\pi})$, et $H \backslash G$ le groupe quotient. Alors son revêtement associé $\pi_H : H \backslash \tilde{B} \rightarrow B$ est galoisien, et nous avons un isomorphisme de groupes

$$\text{Aut}(\pi_H) \simeq H \backslash G.$$

Le groupe discret $H \setminus G$ agit donc librement et proprement sur $H \setminus \tilde{B}$, avec quotient homéomorphe à B (voir la proposition 3.34).

(3) Si H et H' sont des sous-groupes de $G = \pi_1(B, b)$, alors l'ensemble $\text{Mor}(\pi_H, \pi_{H'})$ des morphismes de revêtements de π_H sur $\pi_{H'}$ est en bijection avec $\text{Mor}_G(H \setminus G, H' \setminus G)$, l'ensemble des applications G -équivariantes de $H \setminus G$ dans $H' \setminus G$ (voir la proposition 3.27).

(4) L'application $H \mapsto \pi_H$ induit une bijection de l'ensemble des classes de conjugaison de sous-groupes d'indice fini de $\pi_1(B, b)$ sur l'ensemble des classes d'isomorphisme de revêtements connexes finis de B .

Exemple. Comme les seuls sous-groupes de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sont $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\{0\}$, pour $n \geq 2$, les revêtements connexes de l'espace projectif réel $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ sont, à isomorphisme près, son revêtement universel $\mathbb{S}_n \rightarrow \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ et l'identité $\mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$.

Exercice E.21 Montrer que les revêtements connexes du cercle \mathbb{S}_1 sont, à isomorphisme près, son revêtement universel $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}_1$ avec $t \mapsto e^{2i\pi t}$, et ses revêtements à n feuilletés $\mathbb{S}_1 \rightarrow \mathbb{S}_1$ avec $z \mapsto z^n$ pour $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Proposition 3.44 Pour tout ensemble non vide E muni d'une action à droite de $\pi_1(B, b)$, il existe un revêtement $p_E : X_E \rightarrow B$ et une bijection $\pi_1(B, b)$ -équivariante $u_E : p_E^{-1}(b) \rightarrow E$. Si E' est un autre ensemble muni d'une action à droite de $\pi_1(B, b)$, et si $f : E \rightarrow E'$ est une application (resp. bijection) $\pi_1(B, b)$ -équivariante, alors il existe un unique morphisme (resp. isomorphisme) de revêtements $\phi : X_E \rightarrow X_{E'}$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} p_E^{-1}(b) & \xrightarrow{u_E} & E \\ \phi|_{p_E^{-1}(b)} \downarrow & & \downarrow f \\ p_{E'}^{-1}(b) & \xrightarrow{u_{E'}} & E' \end{array} .$$

Démonstration. Soient $E = \coprod_{\alpha \in A} E_\alpha$ la partition de E en orbites pour $\pi_1(B, b)$, x_α un point de E_α , et H_α le stabilisateur de x_α dans $\pi_1(B, b)$. Soit $\pi_\alpha : X_\alpha = H_\alpha \setminus \tilde{B} \rightarrow B$ le revêtement de B associé au sous-groupe H_α de $\pi_1(B, b)$. Posons $X_E = \coprod_{\alpha \in A} X_\alpha$ (muni de la topologie somme disjointe) et $p_E : X_E \rightarrow B$ l'application dont la restriction à X_α est π_α . Alors p_E est un revêtement de fibre $p_E^{-1}(b) = \coprod_{\alpha \in A} \pi_\alpha^{-1}(b)$, et on note u_E l'application de $p_E^{-1}(b)$ dans E dont la restriction à $\pi_\alpha^{-1}(b)$ vaut la composition des bijections $\pi_\alpha^{-1}(b) \simeq H_\alpha \setminus \pi_1(B, b) \simeq E_\alpha$.

La seconde assertion découle de la proposition 3.27 et de son corollaire 3.29, appliqués à $u_{E'}^{-1} \circ f \circ u_E$, qui est une application (resp. bijection) $\pi_1(B, b)$ -équivariante de $p_E^{-1}(b)$ dans $p_{E'}^{-1}(b)$. \square

Remarque. Ce résultat dit que la catégorie des revêtements d'un espace B (vérifiant les hypothèses de cette partie) est équivalente à la catégorie des ensembles non vides munis d'une action de $\pi_1 B$.

3.13 Autres exercices

Exercice E.22 (1) Soient $p : X \rightarrow B$ un revêtement et U un ouvert de B . Montrer que la restriction $p|_{p^{-1}(U)} : p^{-1}(U) \rightarrow U$ est un revêtement.

(2) Soient $p : X \rightarrow B$ et $p' : X' \rightarrow B'$ deux revêtements. Montrer que l'application de $X \times X'$ dans $B \times B'$ définie par $(x, x') \mapsto (p(x), p'(x'))$ est un revêtement.

(3) Soient $p : X \rightarrow B$ et $p' : X' \rightarrow B$ deux revêtements, $X \times_B X'$ le sous-espace topologique de $X \times X'$ défini par

$$X \times_B X' = \{(x, x') \in X \times X' \mid p(x) = p(x')\},$$

et $\pi : X \times_B X' \rightarrow B$ l'application définie par $\pi(x, x') = p(x)$. Montrer que π est un revêtement.

Exercice E.23 Soit $p : X \rightarrow B$ un revêtement. Montrer que X est séparé si et seulement si B est séparé. Montrer que X est compact si et seulement si B est compact et p est un revêtement fini.

Exercice E.24 Soient G un groupe topologique séparé et H un sous-groupe. Montrer que $H \setminus G$ est séparé si et seulement si H est fermé dans G . Si $G = \mathbb{R}$ et $H = \mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$, montrer que l'espace topologique quotient G/H est muni de la topologie grossière.

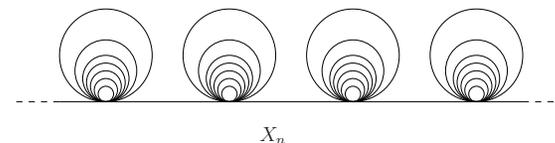
Exercice E.25 (1) Montrer que la projection canonique

$$\text{SL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \text{PSL}_2(\mathbb{R}) = \text{SL}_2(\mathbb{R}) / \{\pm \text{Id}\}$$

est un revêtement à deux feuilletés.

(2) Soit \mathbb{U}_p le groupe des racines p -èmes de l'unité, montrer que la projection canonique $\text{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \text{PSL}_n(\mathbb{C}) = \text{SL}_n(\mathbb{C}) / \mathbb{U}_p \text{Id}$ est un revêtement à n feuilletés.

Exercice E.26 Soit B l'anneau hawaïen (voir l'exercice E.20), muni du point base x commun à tous les cercles S_n . Pour tout cercle S_n de B , on note X_n l'espace topologique obtenu par recollement en son point base d'une copie de $\overline{B - S_n}$ sur chaque point entier de \mathbb{R} .



1) Montrer qu'il existe un revêtement $p_n : X_n \rightarrow B$, unique à isomorphisme de revêtements près, tel que la restriction de p_n à chaque copie de $\overline{B - S_n}$ soit un homéomorphisme sur son image, et la restriction de p à \mathbb{R} soit un revêtement de S_n . Montrer que p_n et p_m sont deux revêtements de B non isomorphes pour $n \neq m$.

2) Pour toute suite $(\epsilon_i)_{i \in \mathbb{N}}$ dans $\{-1, +1\}$, notons $c_{(\epsilon_i)}$ le lacet dans B en x dont la restriction à $[1 - \frac{1}{2^n}, 1 - \frac{1}{2^{n+1}}]$ vaut $t \mapsto \frac{1}{n}(e^{\epsilon_n 2i\pi 2^{n+1}t} + 1)$ (c'est-à-dire qu'il parcourt le cercle S_n à vitesse 2^{n+1} dans le sens positif si $\epsilon_n = 1$, et négatif sinon), pour tout $n \in \mathbb{N}$. Vérifier que $c_{(\epsilon_i)}$ est bien un lacet dans B en x . Montrer que si $\epsilon_n \neq \epsilon'_n$, alors les actions des lacets $c_{(\epsilon_i)}$ et $c_{(\epsilon'_i)}$ sur la fibre $p_n^{-1}(x)$ du revêtement p_n sont différentes.

3) En déduire que le groupe fondamental de B est non dénombrable.

Exercice E.27 Soient $p : X \rightarrow Y$ et $q : Y \rightarrow B$ des revêtements, tels que q soit fini. Montrer que $q \circ p : X \rightarrow B$ est un revêtement. (En particulier, la composition de deux revêtements finis est un revêtement fini.) Donner un exemple de deux revêtements $p : X \rightarrow Y$ et $q : Y \rightarrow B$ tels que p soit un revêtement fini et que $q \circ p$ ne soit pas un revêtement (on pourra prendre q un revêtement à deux feuillettes, B égal à l'anneau hawaïen (voir l'exercice E.20), et p un revêtement p_n comme ci-dessus).

Exercice E.28 Quel est le nombre de classes d'isomorphisme de revêtements connexes à deux feuillettes du bouquet de k cercles? Combien sont galoisiens?

Pour $n = 1, \dots, 5$, quel est le nombre (de classes d'isomorphismes) de revêtements connexes à n feuillettes du bouquet de deux cercles $\mathbb{S}_1 \vee \mathbb{S}_1$? Combien sont galoisiens? Quels sont leurs groupes d'automorphismes de revêtements?

Exercice E.29 Construire un revêtement universel du bouquet de deux cercles $\mathbb{S}_1 \vee \mathbb{S}_1$ et de $\mathbb{S}_1 \vee \mathbb{S}_2$.

Exercice E.30 Quels sont (à isomorphisme près) les revêtements connexes du tore $\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1$, de l'espace lenticulaire $L_{n,p}$, de $\mathbb{S}_1 \vee \mathbb{S}_2$?

Exercice E.31 Soit \mathbb{S}_2 la sphère unité de \mathbb{R}^3 , soit \mathbb{S}_3 la sphère des $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ tels que $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$, et soit G le sous-groupe des isométries de \mathbb{C} engendré par $z \mapsto e^{i\frac{\pi}{3}}z$ et $z \mapsto \bar{z}$. Pour $g \in G$, on note $\epsilon(g) = 1$ si g est une rotation, et $\epsilon(g) = -1$ sinon. Le groupe G agit à gauche sur l'espace topologique produit $X = \mathbb{S}_3 \times \mathbb{S}_2$ par

$$(g, (z_1, z_2, t)) \mapsto (gz_1, gz_2, \epsilon(g)t).$$

Notons B l'espace topologique quotient $G \backslash X$ et $p : X \rightarrow B$ la projection canonique.

(1) Montrer que G est fini. Montrer que p est un revêtement. Calculer le groupe fondamental de B .

(2) Donner, à isomorphisme de revêtements près, la liste des revêtements connexes de B . Parmi ceux-ci lesquels sont galoisiens?

Exercice E.32 Notons $\mathbb{S}_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ le cercle, et $T = \mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1$ le tore. Le groupe à deux éléments $G = \{\pm 1\}$ agit sur T par

$$(\epsilon, (w, z)) = (w^\epsilon, z^\epsilon)$$

avec $z, z' \in \mathbb{S}_1$ et $\epsilon \in G$. Notons S l'espace topologique quotient $G \backslash T$ et $\pi : T \rightarrow S$ la projection canonique.

(1) Calculer $\pi_1(T - \{x_1, \dots, x_k\})$, où x_1, \dots, x_k sont des points deux à deux distincts de T .

(2) Montrer que G laisse fixe exactement quatre points x_1, x_2, x_3, x_4 de T , et que $\pi : T - \{x_1, \dots, x_4\} \rightarrow S - \{\pi(x_1), \dots, \pi(x_4)\}$ est un revêtement.

(3) Montrer, à l'aide de dessins, que S est homéomorphe à la sphère \mathbb{S}_2 .

Exercice E.33 Soit C l'ensemble des couples $(p, q) \in \mathbb{C}^2$ tels que $4p^3 + 27q^2 \neq 0$. Rappelons que, pour $(p, q) \in C$, l'équation $X^3 + pX + q = 0$ admet trois racines complexes distinctes. Notons

$$B = \{(p, q, x) \in C \times \mathbb{C} : x^3 + px + q = 0\} \quad \text{et}$$

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 : x + y + z = 0, x \neq y \neq z \neq x\}.$$

Notons $\pi : A \rightarrow B$ l'application $(x, y, z) \mapsto (p, q, x)$ où p et q sont définis par

$$X^3 + pX + q = (X - x)(X - y)(X - z).$$

Notons $\rho : B \rightarrow C$ la projection $(p, q, x) \mapsto (p, q)$.

(1) Montrer que π, ρ et $\rho \circ \pi$ sont des revêtements finis.

(2) Montrer que A, B et C sont connexes par arcs.

(3) Soit $a = (-1, 0) \in C$. Montrer que l'action du groupe fondamental de $\pi_1(C, a)$ sur la fibre $\rho^{-1}(a)$ définit un morphisme surjectif de $\pi_1(C, a)$ sur le groupe symétrique \mathcal{S}_3 .

(4) Parmi les revêtements π, ρ et $\rho \circ \pi$, lesquels sont galoisiens? Quels sont les groupes d'automorphismes de revêtements de π, ρ et $\rho \circ \pi$?

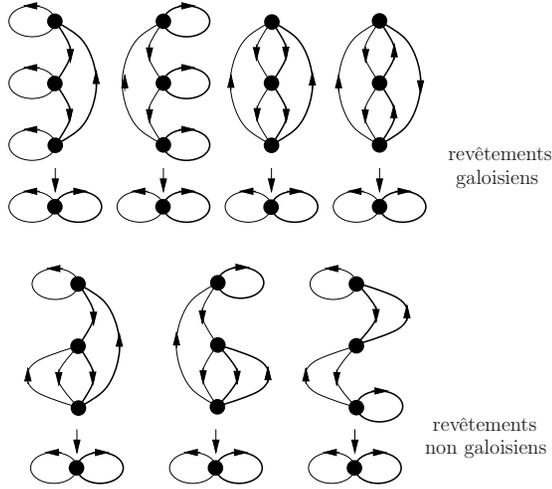
(5) Notons K le sous-espace de la sphère $\mathbb{S}_3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 + |w|^2 = 2\}$ défini par

$$K = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z| = |w| = 1, z^3 = w^2\}.$$

Montrer que C et $\mathbb{S}_3 - K$ ont le même type d'homotopie. Montrer que K est homéomorphe au cercle $\mathbb{S}_1 = \{(z, w) \in \mathbb{S}_3 : w = 0\}$, mais que $\mathbb{S}_3 - K$ et $\mathbb{S}_3 - \mathbb{S}_1$ ne sont pas homéomorphes.

3.14 Indications pour la résolution des exercices

Exercice E.28 Supposons $k \geq 1$. Nous allons montrer qu'il y a exactement $2^k - 1$ classes d'isomorphisme de revêtements connexes à deux feuillettes du bouquet de k cercles, qui sont tous galoisiens, et 7 classes d'isomorphisme de revêtements connexes à $n = 3$ feuillettes du bouquet de 2 cercles, dont 4 sont galoisiens (voir dessin ci-dessous). Le calcul pour $n = 4, 5$ est laissé au lecteur.



Le bouquet de k cercles B_k est un espace connexe et localement connexe par arcs, localement contractile. Son groupe fondamental est isomorphe au groupe libre L_k à k générateurs s_1, \dots, s_k . Donc, par le théorème de classification des revêtements, l'ensemble des classes d'isomorphisme de revêtements connexes à n feuilletts de B_k est en bijection avec l'ensemble des classes de conjugaison de sous-groupes d'indice n de L_k . De plus, les revêtements galoisiens correspondent aux sous-groupes distingués. Rappelons que tout sous-groupe d'indice 2 d'un groupe G est distingué dans G .

Les sous-groupes distingués d'indice n de L_k sont les noyaux des morphismes de groupes surjectifs sur les groupes d'ordre n . Par la propriété universelle des groupes libres, si G est un groupe, et g_1, \dots, g_k des éléments de G , il existe un et un seul morphisme de groupe $f : L_k \rightarrow G$ tel que $f(x_i) = g_i$ pour $i = 1, \dots, k$. De plus f est surjectif si et seulement si $\{g_1, \dots, g_k\}$ engendrent G . Il existe en particulier exactement $\text{Card}(G)^k$ morphismes de L_k dans G , si G est fini.

Il existe, à isomorphisme près, un seul groupe d'ordre 2, qui est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, et un seul groupe d'ordre 3, qui est $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Une partie finie de l'un de ces deux groupes l'engendre si et seulement si elle n'est pas réduite à l'élément neutre. Deux morphismes non nuls distincts dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ont des noyaux distincts, et deux morphismes non nuls dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ont même noyau si et seulement si l'un est le double de l'autre.

Donc, il y a exactement $2^k - 1$ classes d'isomorphisme de revêtements connexes à deux feuilletts de B_k , et $\frac{3^k - 1}{2}$ (donc A si $k = 2$) classes d'isomorphisme de revêtements connexes galoisiens à trois feuilletts, du bouquet de k cercles.

Remarque. : Les seuls groupes d'ordre 2 ou 3 sont tous les deux abéliens. Tout morphisme de L_k dans un groupe abélien factorise à travers l'abélianisé de L_k , qui

est le groupe abélien libre \mathbb{Z}^k de rang k . On peut donc aussi se ramener à compter le nombre de sous-groupes d'indice 2 ou 3 de \mathbb{Z}^k .

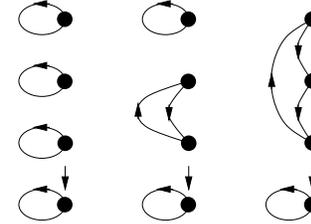
Calculons maintenant le nombre de revêtements connexes non galoisiens du bouquet de deux cercles. Tout revêtement X d'un bouquet de cercles B est un graphe, et si on oriente les cercles de B , alors chaque arête de X est naturellement munie d'une orientation (c'est-à-dire l'application de revêtement $p : X \rightarrow B$ préserve l'orientation). Si x est le point base de B , alors par relèvement des chemins, tout cercle orienté c de B définit une permutation σ_c de $F = p^{-1}(x)$, avec $\sigma_c(x)$ l'extrémité de l'unique arête de X au-dessus de c d'origine x . Réciproquement, la donnée pour tout cercle c de B d'une permutation σ_c de $F = p^{-1}(x)$ définit un graphe X , d'ensemble de sommets F , en recollant une arête orientée d'origine x et d'extrémité $\sigma_c(x)$ pour tout x dans F et tout cercle c de B . Ce graphe X revêt naturellement B . Tout isomorphisme de revêtements d'un revêtement $p : X \rightarrow B$ induit une bijection σ de $F = p^{-1}(x)$. Comme il préserve les relèvements de chemins, cet isomorphisme de revêtements induit donc une conjugaison sur les permutations $\sigma_c \mapsto \sigma \sigma_c \sigma^{-1}$.

Comme il existe un unique homéomorphisme à homotopie près de l'intervalle $[0, 1]$ dans lui-même fixant 0 et 1, on en déduit que l'ensemble des classes d'isomorphisme de revêtements (par forcément connexes) à n feuilletts du bouquet de k cercles est en bijection avec

$$\mathcal{S}_n^k / \mathcal{S}_n$$

où \mathcal{S}_n est le groupe symétrique sur n lettres, le quotient étant pris pour l'action diagonale de \mathcal{S}_n par conjugaison sur chacun des facteurs de \mathcal{S}_n^k .

Dans le cas particulier où $k = 2$ et $n = 3$, alors modulo conjugaison, il existe trois permutations de \mathcal{S}_3 , qui sont id, la transposition, le cycle de longueur 3, correspondant aux trois possibilités suivantes de relèvement d'un cercle de B (modulo permutations de la fibre) :



Si le revêtement est non galoisien, alors le relèvement d'un des deux cercles orientés de B est du second type. Si le revêtement est connexe, le relèvement de l'autre cercle orienté de B est alors du second ou troisième type. Il est alors facile de montrer qu'il y a trois classes d'isomorphismes de revêtements non galoisiens connexes à trois feuilletts du bouquet de 2 cercles.

Exercice E.31 On note $r : z \mapsto e^{i\frac{2\pi}{5}}z$, qui est une rotation d'angle $\frac{2\pi}{5}$ et $s : z \mapsto \bar{z}$ qui est la symétrie par rapport à l'axe réel.

(1) Le groupe G est le groupe des isométries du décagone régulier de \mathbb{C} , donc est fini. C'est le groupe diédral D_{10} d'ordre 20.

L'action de G sur X est libre, car si $g \in G$ et $g(z_1, z_2, t) = (z_1, z_2, t)$, alors $\epsilon(g)t = t$ et t non nul implique que g est une rotation, et comme z_1 ou z_2 est non nul, g vaut l'identité. L'espace X est séparé, et le groupe fini G agit librement sur X , donc p est un revêtement.

Une sphère de dimension au moins 2 est simplement connexe. L'espace X est donc simplement connexe, car produit d'espaces simplement connexes. Le groupe fondamental de B est donc isomorphe au groupe d'automorphismes G du revêtement universel p :

$$\pi_1(B) \simeq G .$$

(2) Donnons la liste des sous-groupes de G , à conjugaison près. Comme G est d'ordre 20, ses sous-groupes sont d'ordre 1, 2, 4, 5, 10 ou 20. Soit $H_0 = G$ et $H_1 = \{1\}$ le sous-groupe trivial. Les seuls éléments d'ordre 2 sont la symétrie centrale r^5 et les symétries rs^k pour $k = 0, \dots, 9$. Les éléments rs^k et $rs^{k'}$ sont conjugués si et seulement si k et k' ont la même parité. À conjugaison près, il y a donc exactement trois sous-groupes d'ordre 2, qui sont

$$H_2 = \{1, r^5\}, H_3 = \{1, s\}, H_4 = \{1, sr\} .$$

Parmi ceux-ci, seul H_2 est distingué (c'est le centre de D_{10}).

Par le théorème de Sylow, comme $10 = 2^2 \cdot 5$, le nombre n de 2-Sylow vérifie $n = 1 \pmod 2$ et $n \mid 5$, donc $n = 1$ ou 5, et le nombre m de 5-Sylow vérifie $m = 1 \pmod 4$ et $m \mid 4$, donc $m = 1$.

Soit $H_5 = \{1, r^5, s, sr^5\}$, qui est un sous-groupe (car $sr^k s = r^{-k}$ pour tout k), d'ordre 4, donc un 2-Sylow. Comme il n'est pas distingué ($rsr^{-1} = sr^{-2} \notin H_5$), il y a donc cinq 2-Sylow, qui sont conjugués.

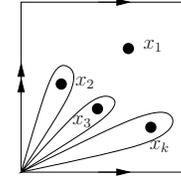
Le seul 5-Sylow est $H_6 = \{1, r^2, r^4, r^6, r^8\}$, qui est donc distingué.

Tout sous-groupe d'ordre 10 contient l'unique 5-Sylow. S'il contient une puissance impaire de la rotation r , alors c'est $H_7 = \{r^k : 0 \leq k \leq 9\}$, qui est distingué. S'il contient un sr^{2k} , alors c'est $H_8 = \{1, r^2, r^4, r^6, r^8, s, sr^2, sr^4, sr^6, sr^8\}$, qui est distingué. S'il contient un sr^{2k+1} , alors c'est $H_9 = \{1, r^2, r^4, r^6, r^8, sr, sr^3, sr^5, sr^7, sr^9\}$, qui est distingué.

Comme $p : X \rightarrow B$ est un revêtement universel, l'application $H \mapsto (\pi_H : H \backslash X \rightarrow B)$ induit une bijection entre l'ensemble des classes de conjugaison de sous-groupes de G et l'ensemble des classes d'isomorphisme de revêtements connexes de B . Donc les revêtements connexes de B sont, à isomorphisme près, les π_{H_k} pour $k = 0, \dots, 9$. Ceux qui sont galoisiens sont les π_{H_k} où H_k est distingué, c'est-à-dire

$$\pi_{H_0}, \pi_{H_1}, \pi_{H_2}, \pi_{H_6}, \pi_{H_7}, \pi_{H_8}, \pi_{H_9} .$$

Exercice E.32 (1) Si $k = 0$, nous avons vu en cours que $\pi_1(T) = \mathbb{Z}^2$. Supposons donc $k \geq 1$. Quitte à faire agir deux rotations, supposons qu'aucun des x_1, \dots, x_n n'est sur le cercle $\mathbb{S}_1 \times \{1\}$ ni sur $\{1\} \times \mathbb{S}_1$.



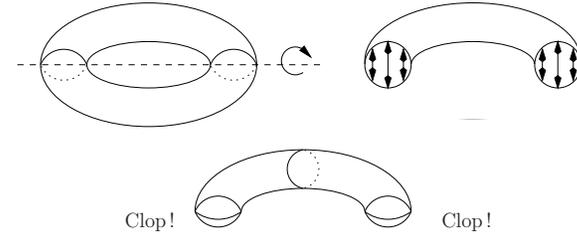
Considérons le tore comme le quotient du carré par le recollement des côtés opposés. On note γ_k un lacet issu d'un sommet dans le carré, et dont la composante connexe du complémentaire dans le carré ne contenant pas le bord, contient exactement un des points x_k pour $k = 2, \dots, k$. Alors l'espace topologique $T - \{x_1, \dots, x_k\}$ se rétracte par déformation forte sur le bouquet de $k + 1$ cercles, qui est la réunion des deux lacets correspondant au bord du carré et des $k - 1$ lacets γ_k . Donc

$$\pi_1(T - \{x_1, \dots, x_k\}) = *_{k+1} \mathbb{Z}$$

est un groupe libre à $k + 1$ générateurs.

(2) Les seuls points fixes du seul élément non trivial de G sont clairement $(\pm 1, \pm 1)$. Le groupe fini G agit donc librement sur le complémentaire de l'ensemble de ces points fixes, qui est un espace topologique séparé. Par un résultat du cours, la projection canonique $T - \{x_1, \dots, x_4\} \rightarrow G \backslash (T - \{x_1, \dots, x_4\})$ est un revêtement. Donc la restriction $\pi : T - \{x_1, \dots, x_4\} \rightarrow S - \{\pi(x_1), \dots, \pi(x_4)\}$ est un revêtement.

(3) En représentant le tore comme un tore de révolution autour de l'axe vertical de \mathbb{R}^3 , l'application $(z, w) \mapsto (z^{-1} = \bar{z}, w^{-1} = \bar{w})$ est la composée des symétries orthogonales $(z, w) \mapsto (\bar{z}, w)$, et $(z, w) \mapsto (z, \bar{w})$ par rapport au plan horizontal et l'un des plans verticaux de coordonnées. C'est donc la rotation d'angle π autour d'un axe de coordonnée horizontal.



Le quotient $G \backslash T$ est donc le quotient d'un cylindre par la relation d'équivalence engendrée par l'identification d'un point et de son conjugué sur chaque cercle du bord. Il s'agit topologiquement de la sphère \mathbb{S}_2 .

Exercice E.33 (1) On commence par une remarque préliminaire. Soit

$$P = \sum_{i=0}^n a_i X^i = a_n \prod_{i=1}^n (X - x_i)$$

un polynôme non constant de degré n à coefficient complexes, n'ayant que des racines simples. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $\sup_i |b_i - a_i| < \delta$, alors le polynôme $Q = \sum_{i=0}^n b_i X^i$ admet n racines distinctes y_1, \dots, y_n tels que $\sup_i |y_i - x_i| < \epsilon$. (En effet, si γ est le bord d'un petit disque centré en x_i , alors l'indice $\int_{\gamma} \frac{P'}{P}$ variant continuellement en les coefficients de P , et étant à valeurs entières, est localement constant en les coefficients de P . De plus, cet indice est le nombre de racines simples contenues dans l'intérieur du petit disque.)

Pour montrer que π, ρ et $\rho \circ \pi$ sont des revêtements finis, il suffit de montrer que ce sont des homéomorphismes locaux dont le cardinal des fibres est fini (non nul), et constant.

Les applications π, ρ sont continues, car polynomiales, et sont des homéomorphismes locaux par la remarque préliminaire. Donc $\rho \circ \pi$ est aussi un homéomorphisme local.

Par le rappel sur la condition pour que les racines d'un polynôme complexe de degré 3 ait trois racines distinctes, si $(p, q, x) \in B$, alors $\pi^{-1}(p, q, x)$ contient deux points distincts (x, y, z) et (x, z, y) où x, y, z sont les trois racines distinctes de $X^3 + pX + q = 0$; de même, $\rho^{-1}(p, q)$ contient exactement les trois points $(p, q, x), (p, q, y)$ et (p, q, z) . Donc π, ρ et $\rho \circ \pi$ sont des revêtements à respectivement 2, 3, 6 feuillettes.

(2) L'espace A est le complémentaire de trois droites complexes $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ dans le plan complexe P de \mathbb{C}^3 d'équation $x + y + z = 0$. Soient deux points de A et D la droite complexe passant par ces deux points. Comme D et les Δ_i sont distinctes, l'intersection $A \cap D$ est le complémentaire d'un nombre fini de points dans le plan réel D , donc est connexe par arc. Donc A est connexe par arcs.

Comme A est connexe par arcs, et puisque π et $\rho \circ \pi$ sont continues et surjectives, $B = \pi(A)$ et $C = \rho \circ \pi(A)$ sont connexes par arcs.

(3) Notons \mathcal{S}_3 le groupe des bijections de l'ensemble $\rho^{-1}(a)$, qui est de cardinal trois. Soit $a = (p, q) \in C$ et $(p, q, x), (p, q, y), (p, q, z)$ les images réciproques de (p, q) par ρ . L'action à droite de $\pi_1(C, a)$ sur la fibre $\rho^{-1}(a)$ est un morphisme de groupes ϕ de $\pi_1(C, a)$ dans \mathcal{S}_3 . Montrons que la transposition fixant (p, q, x) et échangeant $(p, q, y), (p, q, z)$ est dans l'image de ce morphisme. Par symétrie, et comme les transpositions engendrent le groupe symétrique, ceci montrera que ϕ est surjectif.

Comme (x, y, z) appartient à A , les nombres complexes y et z sont distincts de $-2x, x$ et $-\frac{x}{2}$. Comme \mathbb{C} privé de trois points est connexe par arcs, il existe un chemin γ dans \mathbb{C} , d'origine y , d'extrémité z , tel que $\gamma(t) \neq -2x, x, -\frac{x}{2}$ pour tout t dans $[0, 1]$. Donc $(x, \gamma(t), -x - \gamma(t))$ appartient à A pour tout t dans $[0, 1]$.

Alors $\alpha : t \mapsto (p_t, q_t) = \rho \circ \pi(x, \gamma(t), -x - \gamma(t))$ est un lacet d'origine a dans C , dont les relevés d'origines $(p, q, x), (p, q, y), (p, q, z)$ sont, par unicité, les chemins

$$\alpha_1 : t \mapsto (p_t, q_t, x), \alpha_2 : t \mapsto (p_t, q_t, \gamma(t)), \alpha_3 : t \mapsto (p_t, q_t, -x - \gamma(t))$$

respectivement. Le chemin α_1 est un lacet en (p, q, x) , le chemin α_2 a pour origine (p, q, y) et extrémité (p, q, z) , et le chemin α_3 a pour origine (p, q, z) et extrémité (p, q, y) . Donc l'action de $[\alpha] \in \pi_1(C, a)$ sur la fibre $\rho^{-1}(a)$ est la transposition voulue.

Comme l'image d'un groupe abélien par un morphisme de groupes est un groupe abélien, et que \mathcal{S}_3 n'est pas abélien, on en déduit que $\pi_1(C, a)$ n'est pas abélien.

(4) Tout revêtement à deux feuillettes $f : Y \rightarrow Z$ d'espace total Y connexe par arcs est galoisien : si $b \in Z$ et $f^{-1}(\{b\}) = \{u, v\}$, si β est un lacet en b , alors par unicité, le relèvement de β d'origine u est un lacet si et seulement si celui d'origine v est un lacet. (Dans le cas où B est localement connexe par arcs et semi-localement connexe par arcs, on peut aussi utiliser la classification des revêtements connexes, en disant que tout sous-groupe d'indice 2 est distingué.) Donc π est galoisien, de groupe d'automorphismes $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Reprenons les notations de la question précédente. Puisque α admet un relèvement qui est un lacet et un relèvement qui ne l'est pas, le revêtement ρ n'est pas galoisien. Comme tout automorphisme de revêtements permute les relevés d'un lacet, et puisque α admet un unique relèvement qui est un lacet, tout automorphisme de revêtements de ρ fixe le point (p, q, x) , donc est trivial car B est connexe par arcs. Donc le groupe des automorphismes de revêtements de ρ est trivial.

Le groupe fini \mathcal{S}_3 agit continuellement et librement par permutation des coordonnées sur A . De plus, cette action est par automorphismes de revêtements pour $\rho \circ \pi$ (permuter les racines d'un polynôme ne change pas ses coefficients). Par un résultat du cours, si $f : A \rightarrow \mathcal{S}_3 \setminus A$ est la projection canonique, alors l'application $\rho \circ \pi$ induit une application continue $g : \mathcal{S}_3 \setminus A \rightarrow C$ qui est un revêtement. De plus, g est un revêtement à un feuillet, car \mathcal{S}_3 agit transitivement sur toute fibre de $\rho \circ \pi$, donc g est un homéomorphisme. On en déduit que $\rho \circ \pi$ est un revêtement galoisien, de groupe d'automorphismes de revêtements le groupe (isomorphe à \mathcal{S}_3) des permutations des coordonnées.

(5) Si $a, b > 0$, alors l'équation $at^6 + bt^4 - 2 = 0$ admet une et une seule solution $t = t(a, b)$ strictement positive. En effet, en posant $u = t^2$ et $f(u) = au^3 + bu^2 - 2$, alors les racines de f' sont $u = 0$ et $u = -\frac{2b}{3a} < 0$, donc f est strictement croissante entre 0 et $+\infty$, et $f(0) = -1 < 0$. De plus, par un argument déjà vu, $t(a, b)$ dépend continuellement de a, b .

L'application $(p, q) \mapsto (z, w) = (\frac{p}{3}, i\frac{q}{2})$ est un homéomorphisme de \mathbb{C}^2 dans lui-même, envoyant C sur le complémentaire de la courbe complexe d'équation $z^3 = w^2$. L'application $(z, w) \mapsto (t^2 z, t^3 w)$ où $t = t(|w|^2, |z|^2)$ induit une rétraction par déformation forte de C sur $\mathbb{S}_3 - K$ (noter que $|w|^2 > 0$ et $|z|^2 > 0$ si $(p, q) \in C$). Donc C et $\mathbb{S}_3 - K$ ont le même type d'homotopie.

L'application de \mathbb{S}_1 dans K qui à $e^{i\theta}$ associe $(e^{2i\theta}, e^{3i\theta})$ est un homéomorphisme, d'inverse $(z, w) \mapsto \frac{w}{z}$.

Par la projection stéréographique par rapport à un point de \mathbb{S}_1 , l'espace $\mathbb{S}_3 - \mathbb{S}_1$ est homéomorphe au complémentaire d'une droite dans \mathbb{R}^3 , qui se rétracte par déformation forte sur un plan privé d'un point. Donc le groupe fondamental de $\mathbb{S}_3 - \mathbb{S}_1$ est isomorphe à \mathbb{Z} , qui est abélien. Or le groupe fondamental de $\mathbb{S}_3 - K$ est isomorphe au groupe fondamental de C , qui est non abélien par la question (3). Donc $\pi_1(\mathbb{S}_3 - K)$ et $\pi_1(\mathbb{S}_3 - \mathbb{S}_1)$ ne sont pas isomorphes, ce qui implique que $\mathbb{S}_3 - K$ et $\mathbb{S}_3 - \mathbb{S}_1$ ne sont pas homéomorphes.

4 Groupe fondamentaux, revêtements et CW-complexes

4.1 Propriétés universelles sur les groupes

Rappelons qu'une partie A d'un groupe G est une *partie génératrice* de G (ou *engendre* G) si le plus petit sous-groupe de G contenant A est G .

Si A est une partie génératrice d'un groupe G , si $f : G \rightarrow H$ est un morphisme de groupes surjectif, alors $f(A)$ est une partie génératrice de H .

Si G est un groupe et A une partie de G , l'ensemble des éléments de G de la forme

$$a_1^{\epsilon_1} \dots a_n^{\epsilon_n}$$

avec $n \in \mathbb{N}$, $\epsilon_i = \pm 1$, et $a_i \in A$ (en convenant que c'est l'élément neutre e de G si $n = 0$), est un sous-groupe de G , noté $\langle A \rangle$. Il est clair que $\langle A \rangle$ est le plus petit sous-groupe de G contenant A . On l'appelle le *sous-groupe de G engendré par A* .

Si G est un groupe et A une partie de G , l'ensemble des éléments de G de la forme

$$g_1 a_1^{\epsilon_1} g_1^{-1} \dots g_n a_n^{\epsilon_n} g_n^{-1}$$

avec $n \in \mathbb{N}$, $\epsilon_i = \pm 1$, $a_i \in A$ et $g_i \in G$ (en convenant que c'est l'élément neutre e de G si $n = 0$), est un sous-groupe de G , noté $N(A)$. Il est clair que $N(A)$ est le plus petit sous-groupe distingué de G contenant A . On l'appelle le *sous-groupe distingué engendré par A* . On a $N(A) = \langle \{gag^{-1} \mid a \in A, g \in G\} \rangle$.

Groupe libre

Soit S un ensemble. On appelle *groupe libre engendré par S* tout couple (L, i) , où L est un groupe et $i : S \rightarrow L$ une application, vérifiant la *propriété universelle* suivante :

pour tout couple (G, j) où G est un groupe et $j : S \rightarrow G$ est une application, il existe un unique morphisme de groupes $f : L \rightarrow G$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{i} & L \\ & j \searrow & \downarrow f \\ & & G \end{array} .$$

Proposition 4.1 *Un tel couple (L, i) existe et est unique, à unique isomorphisme près.*

Démonstration. L'unicité découle de la propriété universelle : si (L', i') est un autre groupe libre engendré par S , alors il existe un morphisme de groupes $\phi : L \rightarrow L'$ tel que $\phi \circ i = i'$, et un morphisme de groupes $\phi' : L' \rightarrow L$ tel que $\phi' \circ i' = i$. Comme id est un morphisme de groupe tel que $\text{id} \circ i' = i'$, nous avons $\phi \circ \phi' = \text{id}$ par unicité, et de même $\phi' \circ \phi = \text{id}$, donc ϕ est un isomorphisme de L dans L' tel que $\phi \circ i = i'$, et c'est le seul par l'unicité dans la propriété universelle.

Nous donnerons dans la partie 4.4 (corollaire 4.14) une preuve topologique de l'existence de (L, i) . Voici une construction algébrique.

Soit E l'ensemble des suites finies d'éléments de $S \times \{\pm 1\}$, notées $(s_1^{\epsilon_1}, \dots, s_n^{\epsilon_n})$ avec $n \in \mathbb{N}$, $s_i \in S$, $\epsilon_i \in \{\pm 1\}$ (par convention, c'est la suite vide \emptyset si $n = 0$). On appelle aussi une telle suite un *mot* en $S \cup S^{-1}$, et l'entier n est appelé la *longueur* de ce mot, et notée $\ell(w)$.

La concaténation des suites

$$(s_1^{\epsilon_1}, \dots, s_n^{\epsilon_n})(t_1^{\eta_1}, \dots, t_m^{\eta_m}) = (s_1^{\epsilon_1}, \dots, s_n^{\epsilon_n}, t_1^{\eta_1}, \dots, t_m^{\eta_m})$$

est une loi de composition associative sur E , ayant \emptyset comme élément neutre à gauche et à droite, et vérifiant, en notant par abus une suite réduite à un élément $(s_i^{\epsilon_i})$ par cet élément $s_i^{\epsilon_i}$, la relation $(s_1^{\epsilon_1}, \dots, s_n^{\epsilon_n}) = s_1^{\epsilon_1} \dots s_n^{\epsilon_n}$.

Soit \mathcal{R} la plus petite relation d'équivalence compatible avec cette loi de composition et identifiant $s^\epsilon s^{-\epsilon}$ et \emptyset pour tout $s \in S$ et $\epsilon \in \{\pm 1\}$. On note L l'ensemble quotient E/\mathcal{R} .

Il n'est pas trop difficile de vérifier que la loi de composition de E induit une loi de groupe sur L , d'élément neutre e l'image dans L de la suite vide \emptyset , l'inverse de l'image du mot $s_1^{\epsilon_1} \dots s_n^{\epsilon_n}$ étant l'image du mot $s_n^{-\epsilon_n} \dots s_1^{-\epsilon_1}$.

Soit $i : S \rightarrow L$ l'application telle que $i(s)$ soit l'image dans L de s^{+1} . Le couple (L, i) vérifie la propriété universelle ci-dessus. En effet, soit (G, j) un groupe muni d'un application $j : S \rightarrow G$. Posons

$$\bar{f}(s_1^{\epsilon_1} \dots s_n^{\epsilon_n}) = j(s_1)^{\epsilon_1} \dots j(s_n)^{\epsilon_n}.$$

L'application $\bar{f} : E \rightarrow G$ est compatible avec la loi de composition, et avec la relation d'équivalence \mathcal{R} , donc passe au quotient en un morphisme de groupes f de L dans G tel que $f \circ i = j$. Ce morphisme est unique, car $i(S)$ engendre L . \square

Nous noterons par abus $L = L(S)$ le couple (L, i) . Il découle de la propriété universelle appliquée à un groupe à deux éléments que i est injectif, et nous identifierons S à son image dans $L(S)$ par l'application i . Par la preuve ci-dessus, S est une partie génératrice de $L(S)$, dite *standard*.

Si G est un groupe muni d'une application j de S dans G , nous appellerons *morphisme canonique* associé à (G, j) le morphisme de groupes $f : L(S) \rightarrow G$ donné par la propriété universelle ci-dessus. Si $j(S)$ engendre G , alors f est surjectif.

Un groupe est dit *libre* s'il est isomorphe à un groupe libre engendré par un ensemble S . Nous appellerons *rang* d'un groupe libre le cardinal d'un tel ensemble S (voir l'exercice E.34).

Le résultat suivant donne la structure des éléments du groupe libre, avec laquelle on travaille souvent en pratique.

Proposition 4.2 *Tout élément de $L(S)$ s'écrit de manière unique comme un produit $s_1^{\epsilon_1} \dots s_n^{\epsilon_n}$ où $s_i \in S$ et $\epsilon_i = \pm 1$ ($n = 0$ correspondant à l'élément neutre de $L(S)$), tel que $\epsilon_i = \epsilon_{i+1}$ si $s_i = s_{i+1}$.*

Démonstration. Reprenons les notations de la preuve précédente. Un mot $s_1^{\epsilon_1} \dots s_n^{\epsilon_n} \in E$ est dit *réduit* s'il ne contient pas de sous-mot $s_i^{\epsilon_i} s_{i+1}^{\epsilon_{i+1}}$ tel que $s_i = s_{i+1}$ et $\epsilon_i = -\epsilon_{i+1}$. Par exemple, tout mot de longueur au plus 1 est réduit.

Pour montrer la proposition, il suffit de montrer que tout mot w en $S \cup S^{-1}$ est équivalent pour \mathcal{R} à un et un seul mot réduit.

Si $w = s_1^{\epsilon_1} \dots s_n^{\epsilon_n}$ contient un sous-mot $s_i^{\epsilon_i} s_{i+1}^{\epsilon_{i+1}}$ tel que $s_i = s_{i+1}$ et $\epsilon_i = -\epsilon_{i+1}$, alors w est équivalent au mot $w' = s_1^{\epsilon_1} \dots s_{i-1}^{\epsilon_{i-1}} s_{i+2}^{\epsilon_{i+2}} \dots s_n^{\epsilon_n}$, dont la longueur est $\ell(w) - 2$. Tout mot équivalent à w de longueur minimale est donc réduit. Il suffit donc de montrer que tout mot est équivalent à un unique mot de longueur minimale. Si deux mots w_0, w_1 sont équivalents pour \mathcal{R} , alors par définition de \mathcal{R} , on peut passer de l'un à l'autre par un nombre fini de transformations de la forme $w \rightarrow w'$ ou son inverse $w' \rightarrow w$ comme ci-dessus. Par récurrence sur le nombre de transformations, on montre que si w_0 est réduit, alors w_0 est une sous-suite de la suite w_1 , donc $\ell(w_1) \geq \ell(w_0)$. \square

On peut donc identifier le groupe $L(S)$ avec l'ensemble des mots réduits en $S \cup S^{-1}$, muni de la loi de composition de *concaténation avec réduction* (on concatène les mots réduits, puis on prend le mot réduit équivalent).

Remarque. Si S' est une partie de S , alors le morphisme canonique $L(S') \rightarrow L(S)$ est injectif par la proposition précédente.

Exercice E.34 *Si S, S' sont deux ensembles, montrer que $L(S)$ et $L(S')$ sont isomorphes si et seulement si S, S' ont même cardinal.*

Groupes définis par générateurs et relations

Soit G un groupe. Une *présentation* de G est un couple (S, R) , où

- S est un ensemble muni d'une application $i : S \rightarrow G$ tel que $i(S)$ soit une partie génératrice de G ,
- R est une partie du groupe libre $L(S)$ engendré par S ,

tel que le sous-groupe distingué $N(R)$ de $L(S)$ engendré par R soit le noyau du morphisme canonique $L(S) \rightarrow G$. Nous avons en particulier un isomorphisme de groupes

$$L(S)/N(R) \rightarrow G.$$

Un groupe est *de type fini* s'il admet une partie génératrice finie. Un groupe est *de présentation finie* s'il admet une présentation (S, R) telle que S et R soient finies. Si $S = \{s_i\}, R = \{r_j\}$, on note aussi $\langle s_i \mid r_j = 1 \rangle$ la présentation (S, R) . Par exemple,

- (S, \emptyset) est une présentation du groupe libre $L(S)$,
- $\langle x \mid x^n = 1 \rangle$ est une présentation du groupe fini cyclique d'ordre n ,
- $\langle a, b \mid [a, b] = 1 \rangle$, où $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$, est une présentation du groupe abélien $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Exercice E.35 Montrer que le groupe diédral infini D_∞ (le sous-groupe des isométries de \mathbb{R} engendré par la translation de longueur 1 et la symétrie en l'origine) admet $\langle a, b \mid a^2 = 1, aba = b^{-1} \rangle$ pour présentation.

Tout groupe G admet une présentation : si S est une partie génératrice de G (par exemple $S = G$), soit R le noyau du morphisme canonique $L(S) \rightarrow G$. Alors $N(R) = R$ et (S, R) est une présentation de G .

Un groupe de type fini étant dénombrable, il existe des groupes qui ne sont pas de type fini (le groupe additif \mathbb{R} par exemple). Si S est dénombrable infini, alors $L(S)$ n'est pas de type fini. Il existe des groupes de type fini qui ne sont pas de présentation finie. En effet, il existe une infinité non dénombrable de classes d'isomorphisme de groupes de type fini (voir par exemple [Har2, page 69]). Comme l'ensemble des classes d'isomorphisme de groupes de présentation finie est dénombrable, il existe une infinité non dénombrable de classes d'isomorphisme de groupes de type fini qui ne sont pas de présentation finie.

Exemple. Soit $w_n = 2^{2^n} + 1$ le n -ème nombre de Fermat. Le groupe dont une présentation est

$$\langle a, b \mid [a^{w_n-2} b a^{2-w_n}, b] = 1, \forall n \in \mathbb{N} \rangle$$

n'est pas de présentation finie. Le groupe dont une présentation est

$$\langle a, b, c, d \mid a^n b a^{-n} = c^n d c^{-n}, \forall n \in \mathbb{N} \rangle$$

n'est pas de présentation finie. (Ces affirmations ne sont pas immédiates, voir par exemple [Har2].)

Nous donnerons dans la partie 4.5 une interprétation topologique des présentations de groupe.

Somme amalgamée de groupes

Nous appellerons *famille inductive* de groupes une famille $(G_i)_{i \in I}$ de groupes, munie pour tout couple (i, j) d'un ensemble F_{ij} de morphismes de groupes de G_i dans G_j . Nous appellerons *limite inductive* de cette famille tout groupe G muni d'une famille de morphismes de groupes $f_i : G_i \rightarrow G$ telle que $f_j \circ f = f_i$ pour tout f dans F_{ij} , qui vérifie la *propriété universelle* suivante :

pour tout groupe H muni d'une famille de morphismes de groupes $h_i : G_i \rightarrow H$ telle que $h_j \circ f = h_i$ pour tout f dans F_{ij} , il existe un unique morphisme de groupes $\phi : G \rightarrow H$ tel que $\phi \circ f_i = h_i$ pour tout $i \in I$.

Proposition 4.3 Le couple $(G, (f_i)_{i \in I})$ existe et est unique, à unique isomorphisme près.

Démonstration. L'unicité découle de la propriété universelle : si $(G', (f'_i)_{i \in I})$ est une autre limite inductive, alors l'unique morphisme de groupes $\psi : G \rightarrow G'$ tel que $\psi \circ f_i = f'_i$ est un isomorphisme.

Voir l'exercice E.49 dans la partie 4.6 pour une preuve topologique de l'existence. Voici une construction algébrique.

Soit $L = L(\coprod_{i \in I} G_i)$, l'inclusion $G_i \rightarrow \coprod_{i \in I} G_i$ induit un morphisme canonique injectif $L(G_i) \rightarrow L$, par lequel on identifie $L(G_i)$ à un sous-groupe de L . Soit $\pi_i : L(G_i) \rightarrow G_i$ le morphisme canonique, et N le sous-groupe distingué de L engendré par la réunion de $\bigcup_{i \in I} \text{Ker } \pi_i$ et de l'ensemble des $x^{-1} f(x)$ pour $i, j \in I$, $x \in G_i$ et $f \in F_{ij}$. Enfin, soit G le groupe quotient $N \backslash L$. L'inclusion $L(G_i) \rightarrow L$ induit par passage au quotient un morphisme de groupes $f_i : G_i \rightarrow G$.

Soit H un groupe muni d'un morphisme $h_i : G_i \rightarrow H$ pour tout $i \in I$, tels que $h_j \circ f = h_i$ pour tout f dans F_{ij} . Soit $j : \coprod_{i \in I} G_i \rightarrow H$ l'application valant h_i sur G_i , soit $\tilde{\phi} : L \rightarrow H$ le morphisme canonique associé à (H, j) . L'application $\tilde{\phi}$ vaut l'élément neutre sur N , donc induit un morphisme de groupes $\phi : G \rightarrow H$. Celui-ci vérifie $\phi \circ f_i = h_i$ pour tout $i \in I$ par construction. Comme $\bigcup_{i \in I} f_i(G_i)$ engendre G , un tel morphisme ϕ est unique. Donc $(G, (f_i)_{i \in I})$ vérifie la propriété universelle des limites inductives. \square

Nous noterons $(G, (f_i)_{i \in I})$ par abus

$$G = \varinjlim G_i.$$

Il découle de l'unicité que $\bigcup_{i \in I} f_i(G_i)$ engendre G , et que le morphisme *canonique* $\phi : G \rightarrow H$ donné par la propriété universelle est surjectif si $\bigcup_{i \in I} h_i(G_i)$ engendre H .

Exemple. Considérons la famille inductive de groupes formée de trois groupes A, B, C et des deux morphismes de groupes $i_1 : C \rightarrow A, i_2 : C \rightarrow B$. Sa limite inductive est appelée la *somme amalgamée de A et B au-dessus de C* (au moyen de i_1, i_2), et notée $A *_C B$. Il s'agit donc d'un groupe G muni de morphismes de groupes $j_1 : A \rightarrow G$ et $j_2 : B \rightarrow G$ tels que $j_2 \circ i_2 = j_1 \circ i_1$, vérifiant la propriété universelle suivante :

pour tout groupe H muni de morphismes de groupes $h_1 : A \rightarrow H, h_2 : B \rightarrow H$ tels que $h_2 \circ i_2 = h_1 \circ i_1$, il existe un unique morphisme de groupes $\phi : G \rightarrow H$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{i_2} & B \\ i_1 \downarrow & & \swarrow j_2 \\ & G & \searrow \phi \\ A & \xrightarrow{j_1} & H \end{array}$$

Remarques. (1) Si B est trivial, alors $A *_C B$ est le quotient $A/N(i_1(C))$ de A par le sous-groupe distingué engendré par $i_1(C)$.

(2) Une somme amalgamée $A *_C B$ peut être un groupe trivial, même si A et B ne sont pas triviaux. Par exemple, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} *_2 \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, où les morphismes $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

et $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sont les projections canoniques, est le groupe dont une présentation est $\langle x, y \mid x^3 = 1, y^2 = 1, x = y \rangle$, donc est le groupe trivial.

Si i_1 et i_2 sont injectifs, on appelle $A *_C B$ le *produit amalgamé de A et B au-dessus de C*. On montrera ci-dessous que j_1 et j_2 sont alors injectifs, et on identifie A et B avec leurs images par j_1, j_2 dans $A *_C B$.

Exemple. Dans l'exemple précédent, si C est le groupe trivial, le produit amalgamé $A *_C B$ est noté $A * B$, et appelé le *produit libre* de A et B. Nous identifions A et B avec leurs images dans $A * B$. Il faut prendre garde à ne pas confondre produit libre $A * B$ et produit direct $A \times B$. C'est l'unique groupe G muni de morphismes de groupes $j_1 : A \rightarrow G, j_2 : B \rightarrow G$ vérifiant la propriété universelle suivante :

pour tout groupe H muni de morphismes de groupes $h_1 : A \rightarrow H, h_2 : B \rightarrow H$, il existe un unique morphisme de groupes $\phi : G \rightarrow H$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{j_1} & G & \xleftarrow{j_2} & B \\ & \searrow h_1 & \downarrow \phi & \swarrow h_2 & \\ & & H & & \end{array}$$

Exercice E.36 (1) Montrer que si les injections $C \rightarrow A, C \rightarrow B$ dans un produit amalgamé $A *_C B$ sont propres, alors $A *_C B$ est infini. En particulier, montrer que le produit libre de deux groupes non triviaux est infini.

(2) Montrer que $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est isomorphe au groupe diédral infini D_∞ .

(3) Montrer que $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ est isomorphe à $PSL_2(\mathbb{Z}) = SL_2(\mathbb{Z})/\{\pm 1\}$ (on pourra envoyer le générateur de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur l'image de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et le générateur de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ sur l'image de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$). Montrer que $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ (pour les inclusions évidentes $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$) est isomorphe à $SL_2(\mathbb{Z})$.

Exemple. Plus généralement, si A est un groupe, $(G_i)_{i \in I}$ une famille de groupes et $A \rightarrow G_i$ un morphisme de groupes pour tout i, la limite inductive de cette famille inductive de groupes est appelée la *somme amalgamée des G_i au-dessus de A*, et notée $(*_{A}G_i, (f_i)_{i \in I})$ (et par abus, $*_{A}G_i$).

Si A est le groupe trivial, cette somme amalgamée est appelée *produit libre* de $(G_i)_{i \in I}$. On le note $(*_{i \in I}G_i, (f_i)_{i \in I})$ (et par abus, $*G_i$) (et $G_1 * G_2 * \dots * G_n$ si $I = \{1, 2, \dots, n\}$). Nous identifierons G_i à son image dans $*_{i \in I}G_i$ par l'injection canonique $f_i : G_i \rightarrow *_{i \in I}G_i$.

Exercice E.37 Soient trois groupes A_1, A_2, C et, pour $k = 1, 2$, un morphisme de groupes $i_k : C \rightarrow A_k$ et une présentation (S_k, R_k) de A_k . Montrer que, en identifiant

$L(S_i)$ avec son image par l'application canonique $L(S_i) \rightarrow L(S_1 \amalg S_2)$, en notant $\pi_i : L(S_i) \rightarrow A$ la projection canonique, alors

$$\langle S_1 \amalg S_2, R_1 \cup R_2 \cup \{ab^{-1} \mid a \in \pi_1^{-1}(i_1(c)), b \in \pi_2^{-1}(i_2(c)), c \in C\} \rangle$$

est une présentation de la somme amalgamée $A_1 *_C A_2$.

Exercice E.38 (1) Soit $\{S_i\}_{i \in I}$ une famille d'ensembles. Montrer que $*_{i \in I}L(S_i)$ est isomorphe à $L(\amalg_{i \in I}S_i)$.

(2) Soit $\{G_i\}_{i \in I}$ une famille de groupes. Montrer que

- $*_{i \in I}G_{\sigma(i)}$ est isomorphe à $*_{i \in I}G_i$ pour toute permutation σ de I ;
- $*_{\alpha \in A}(*_{i \in I_\alpha}G_i)$ est isomorphe à $*_{i \in I}G_i$ pour toute partition $I = \amalg_{\alpha \in A}I_\alpha$.

En particulier, le produit libre de n copies de \mathbb{Z} est un groupe libre de rang n. Les deux dernières propriétés sont connues sous le nom de la commutativité et de l'associativité du produit libre. En particulier, $G_1 * (G_2 * G_3)$ et $(G_1 * G_2) * G_3$ sont canoniquement isomorphes, ainsi que $G_1 * G_2$ et $G_2 * G_1$.

Formes normales dans les produits amalgamés

Soient A un groupe, $(G_i)_{i \in I}$ une famille de groupes et $A \rightarrow G_i$ un morphisme injectif de groupes pour tout i. Identifions A avec son image dans G_i . Notons $G = *_{A}G_i, f_i : G_i \rightarrow G$ le morphisme de groupes canonique, et $f = f_{i|A} = f_{j|A}$ pour tous i, j .

Soit R_i un ensemble de représentants des classes à gauche de A dans G_i , tel que $e \in R_i$. L'application $(a, s) \mapsto as$ est donc une bijection de $A \times R_i$ sur G_i , envoyant $A \times (R_i - \{e\})$ sur $G_i - A$. Si $s \in \amalg_{i \in I}R_i$, notons i_s l'élément $i \in I$ tel que s appartienne à l'image de l'inclusion canonique $R_i \rightarrow \amalg_{i \in I}R_i$. Appellons *mot réduit* toute suite finie

$$(a, s_1, \dots, s_n)$$

où $n \in \mathbb{N}, a \in A, s_k \in \amalg_{i \in I}R_i$, telle que $s_k \neq e$ pour tout k et $i_{s_k} \neq i_{s_{k+1}}$ pour $k = 1, \dots, n - 1$.

Théorème 4.4 Pour tout g dans G, il existe un unique mot réduit (a, s_1, \dots, s_n) tel que $g = f(a)f_{i_{s_1}}(s_1)\dots f_{i_{s_n}}(s_n)$.

Ce résultat implique le fait remarquable que les morphismes f_i sont aussi injectifs. Nous identifierons G_i avec son image dans G par f_i . Tout élément g de G s'écrit donc de manière unique

$$g = as_1\dots s_n$$

où $a \in A, n \in \mathbb{N}, s_k \in \amalg_{i \in I}(R_i - \{e\})$ et $i_{s_k} \neq i_{s_{k+1}}$ pour $k = 1, \dots, n - 1$. Cette écriture s'appelle la *forme normale* de g. En particulier, dans G, nous avons $G_i \cap G_j = A$ si $i \neq j$ et les $R_i - \{e\}$ sont deux à deux disjoints.

Le cas des produits libres s'obtient en prenant $A = \{e\}$ et $R_i = G_i - \{e\}$: un élément g de $*_{i \in I}G_i$ s'écrit de manière unique (après identification de G_i avec

son image dans $*_{i \in I} G_i$ par le morphisme canonique) $g = g_1 \dots g_n$ où $n \in \mathbb{N}$ (par convention $g = e$ si $n = 0$), $g_k \in \coprod_{i \in I} (G_i - \{e\})$ et $i_{g_{k+1}} \neq i_{g_k}$.

En prenant $A = \{e\}$ et $G_i = \mathbb{Z}$ pour tout i , ce théorème permet facilement de montrer que $G = *_{i \in I} \mathbb{Z}$, muni de l'application $j : I \rightarrow G$ définie par $j(i) = f_i(1)$, vérifie la propriété universelle des groupes libres, donc que

$$*_{i \in I} \mathbb{Z} = L(I).$$

La proposition 4.2 (qui n'a pas été utilisée pour construire les sommes amalgamées) en est un corollaire.

Démonstration. (D'après [Ser, page 9].) Soit X l'ensemble des mots réduits. Nous allons définir une action de G sur X , c'est-à-dire un morphisme de groupes de G dans le groupe des bijections de X . Par la propriété universelle, il suffit de définir une action de G_i sur X , de sorte que l'action induite de A ne dépende pas de i .

Soient $i \in I$ et Y_i l'ensemble des mots réduits de la forme $(1, s_1, \dots, s_n)$ tels que $i_{s_1} \neq i$. Les ensembles $A \times Y_i$ et $A \times (R_i - \{e\}) \times Y_i$ s'envoient dans X par les applications

$$(a, (1, s_1, \dots, s_n)) \mapsto (a, s_1, \dots, s_n) \text{ et } (a, s, (1, s_1, \dots, s_n)) \mapsto (a, s, s_1, \dots, s_n).$$

Nous obtenons ainsi une bijection $(A \times Y_i) \cup (A \times (R_i - \{e\}) \times Y_i) \rightarrow X$. Comme $A \cup (A \times (R_i - \{e\}))$ s'identifie avec G_i , nous avons une bijection

$$\theta_i : G_i \times Y_i \rightarrow X.$$

Le groupe G_i agit sur $G_i \times Y_i$ par translation à gauche sur le premier facteur $g'(g, y) = (g'g, y)$. En transportant par la bijection θ_i , nous obtenons donc une action de G_i sur X . Sa restriction à A est définie par $a'(a, s_1, \dots, s_n) = (a' a, s_1, \dots, s_n)$, qui ne dépend pas de i . Nous avons donc construit une action de G sur X .

De plus, si $m = (a, s_1, \dots, s_n)$ est un mot réduit, et si $g = f(a)f_{i_{s_1}}(s_1) \dots f_{i_{s_n}}(s_n)$, alors, par récurrence sur n , l'image par g du mot réduit trivial (e) est le mot m lui-même. L'application $\beta : X \rightarrow G$ définie par $(a, s_1, \dots, s_n) \mapsto f(a)f_{i_{s_1}}(s_1) \dots f_{i_{s_n}}(s_n)$, composée avec l'application $G \rightarrow X$ définie par $g \mapsto g(e)$, est donc l'identité. Donc β est injective. Ceci montre l'unicité de l'écriture réduite d'un élément de G .

Comme G est engendré par $\bigcup_{i \in I} f_i(G_i)$, si $g \in G$, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ et $g_k \in G_{i_k}$ pour $k = 1, \dots, n$ tels que $g = f_{i_1}(g_1) \dots f_{i_n}(g_n)$. Comme $g_n = a_n s_n$ où $a_n \in A$ et $s_n \in R_{i_n}$, nous avons $g = f_{i_1}(g_1) \dots f_{i_{n-1}}(g_{n-1} a_n) f_{i_n}(s_n)$ si $n \geq 2$, et $g = f(a_n) f_{i_n}(s_n)$ si $n = 1$. Par récurrence sur n , tout élément g admet donc au moins une écriture réduite. \square

4.2 Le théorème de van Kampen

Le théorème suivant est l'un des moyens les plus utilisés pour calculer des groupes fondamentaux d'espaces topologiques.

Théorème 4.5 (Théorème de van Kampen) Soient B un espace topologique séparé et connexe par arcs, U_0, U_1, U_2 trois ouverts connexes par arcs tels que $U_0 = U_1 \cap U_2$ et $B = U_1 \cup U_2$, et $b \in U_0$. Nous avons un isomorphisme

$$\pi_1(U_1, b) *_{\pi_1(U_0, b)} \pi_1(U_2, b) \simeq \pi_1(B, b).$$

Démonstration. Nous ne donnerons la preuve que si U_0, U_1, U_2 sont localement connexes par arcs et semilocalement simplement connexes, voir par exemple [Olu] pour le cas général. Comme la plupart des espaces topologiques rencontrés (CW-complexes, variétés topologiques, ...) seront localement contractiles, cette restriction n'est pas gênante.

Soient $i_1 : U_0 \rightarrow U_1, i_2 : U_0 \rightarrow U_2, j_1 : U_1 \rightarrow X$ et $j_2 : U_2 \rightarrow X$ les inclusions. Par functorialité, comme $j_2 \circ i_2 = j_1 \circ i_1$, nous avons un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(U_0, b) & \xrightarrow{i_{1*}} & \pi_1(U_1, b) \\ i_{2*} \downarrow & & \downarrow j_{1*} \\ \pi_1(U_2, b) & \xrightarrow{j_{2*}} & \pi_1(B, b) \end{array}.$$

Par unicité de la somme amalgamée, pour montrer le théorème, il suffit donc de montrer que $\pi_1(B, b)$ vérifie la propriété universelle. Soient H un groupe, $h_1 : \pi_1(U_1, b) \rightarrow H$ et $h_2 : \pi_1(U_2, b) \rightarrow H$ des morphismes de groupes tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(U_0, b) & \xrightarrow{i_{1*}} & \pi_1(U_1, b) \\ i_{2*} \downarrow & & \downarrow h_1 \\ \pi_1(U_2, b) & \xrightarrow{h_2} & H \end{array}.$$

Nous cherchons à construire le morphisme canonique $\phi : \pi_1(B, b) \rightarrow H$, tel que $\phi \circ j_{i_*} = h_i$ pour $i = 1, 2$.

Par la proposition 2.11, $j_{1*} \pi_1(U_1, b) \cup j_{2*} \pi_1(U_2, b)$ engendre $\pi_1(B, b)$. Ceci montre en particulier l'unicité du morphisme canonique.

Pour $k = 1, 2$, le groupe $\pi_1(U_k, b)$ agit à droite sur H par $(\gamma, g) \mapsto gh_k(\gamma)$, où $\gamma \in \pi_1(U_k, b)$ et $g \in H$. Soit $p_k : X_k \rightarrow U_k$ un revêtement de U_k de fibre H associé à cette action (voir la proposition 3.44, l'espace topologique U_k vérifiant les conditions de la partie 3.12).

Puisque $j_{2*} \circ i_{2*} = j_{1*} \circ i_{1*}$, les fibres des revêtements $p_{1|p_1^{-1}(U_0)}$ et $p_{2|p_2^{-1}(U_0)}$ sont en bijection $\pi_1(U_0, b)$ -équivalente, donc ces revêtements sont isomorphes (voir la proposition 3.44). Soit $\psi : p_1^{-1}(U_0) \rightarrow p_2^{-1}(U_0)$ un isomorphisme de revêtements. Soit X l'espace topologique obtenu en recollant X_1 à X_2 par ψ (voir le paragraphe précédant l'exercice E.A.89).

Les applications $p_1 : X_1 \rightarrow B, p_2 : X_2 \rightarrow B$, vérifiant $p_2 \circ \psi = p_1$ sur $p_1^{-1}(U_0)$, induisent une application continue $p : X \rightarrow B$, qui est un revêtement. De plus, si $q : X_1 \amalg X_2 \rightarrow X_1 \cup_\psi X_2 = X$ est la projection canonique, alors $q|_{X_k}$ est un isomorphisme de revêtements de p_k sur $p|_{X_k}$ pour $k = 1, 2$.

Le revêtement p , de fibre H au-dessus de b , définit (voir la partie 3.7) une action à droite de $\pi_1(B, b)$ sur H , que nous noterons $(g, x) \mapsto x \cdot g$, où $x \in H$ et $g \in \pi_1(B, b)$. Par les isomorphismes précédents, nous avons pour $i = 1, 2$

$$\forall x \in H, \quad \forall g \in \pi_1(U_k, b), \quad x \cdot j_{k*}(g) = xh_k(g).$$

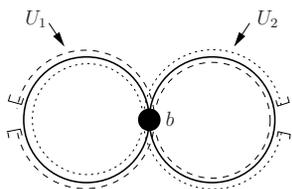
Si e est l'élément neutre de H , considérons l'application $\phi : \pi_1(B, b) \rightarrow H$ définie par $\phi(g) = e \cdot g$. Nous avons en particulier $\phi \circ j_{k*} = h_k$ pour $k = 1, 2$.

Si $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ et $g_\ell \in \pi_1(U_{i_\ell}, b)$ pour $\ell = 1 \dots n$, alors par récurrence sur n ,

$$\begin{aligned} \phi(j_{i_1*}(g_1) \dots j_{i_n*}(g_n)) &= eh_{i_1}(g_1) \dots h_{i_n}(g_n) = (eh_{i_1}(g_1))(eh_{i_2}(g_2)) \dots (eh_{i_n}(g_n)) = \\ &= \phi(j_{i_1*}(g_1)) \dots \phi(j_{i_n*}(g_n)). \end{aligned}$$

Comme $j_{1*}\pi_1(U_1, b) \cup j_{2*}\pi_1(U_2, b)$ engendre $\pi_1(B, b)$, ceci montre que $\phi : \pi_1(B, b) \rightarrow H$ est un morphisme de groupes. C'est le morphisme canonique cherché. \square

Exemple. Soit B le bouquet de deux cercles $\mathbb{S}_1 \vee \mathbb{S}_1$, recollés au point b . Soit y un point du cercle différent de b , U_1 l'ouvert de B obtenu en enlevant le point y sur un des deux cercles, U_2 l'ouvert de B obtenu en enlevant le point y sur l'autre cercle, et $U_0 = U_1 \cap U_2$.

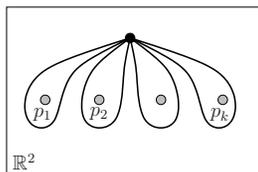


Alors U_0 est contractile (il se rétracte par déformation forte sur le point commun b), U_1 et U_2 ont le type d'homotopie du cercle (ils se rétractent par déformation forte sur l'un des deux cercles de B). Donc $\pi_1(U_0, b) = 0$, $\pi_1(U_1, b) \simeq \mathbb{Z}$, $\pi_1(U_2, b) \simeq \mathbb{Z}$, et

$$\pi_1(B, b) \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

Le groupe fondamental du bouquet de deux cercles est donc un groupe libre de rang 2. Par récurrence, le groupe fondamental du bouquet de k cercles est un groupe libre de rang k .

Comme le plan \mathbb{R}^2 privé de k points p_1, \dots, p_k se rétracte par déformation forte sur un bouquet de k cercles plongé dans $\mathbb{R}^2 - \{p_1, \dots, p_k\}$, le groupe fondamental de $\mathbb{R}^2 - \{p_1, \dots, p_k\}$ est aussi un groupe libre de rang k , pour tout $k \in \mathbb{N}$.



Remarque. Il faut prendre garde à ne pas confondre le groupe libre $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ et le groupe abélien libre $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Le résultat suivant découle immédiatement du théorème de van Kampen.

Corollaire 4.6 Soit B un espace topologique connexe, localement connexe par arcs et semilocallement simplement connexe. Soient X_1 et X_2 deux sous-espaces connexes, de réunion $X_1 \cup X_2 = B$, d'intersection $X_0 = X_1 \cap X_2$ connexe et $b \in X_0$. On suppose qu'il existe des voisinages U_1 de X_1 et U_2 de X_2 tels que $U_1, U_2, U_1 \cap U_2$ se rétractent par déformation forte sur X_1, X_2, X_0 respectivement. Alors nous avons un isomorphisme

$$\pi_1(X_1, b) *_{\pi_1(X_0, b)} \pi_1(X_2, b) \simeq \pi_1(B, b). \quad \square$$

4.3 CW-complexes

Le but de ce chapitre est d'introduire une classe d'espaces topologiques comprenant la plupart des espaces topologiques rencontrés dans ce cours, à homéomorphisme près.

Pour $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, une *cellule* de dimension n (ou encore *n-cellule*) est un espace topologique homéomorphe à la boule unité fermée \mathbb{B}_n . Une *cellule ouverte* de dimension n (ou encore *n-cellule ouverte*) est un espace topologique homéomorphe à $\mathbb{B}_n - \mathbb{S}_{n-1}$. Si e est une cellule, notons ∂e son bord en tant que variété topologique (voir le théorème d'invariance du domaine 5.26 pour vérifier que tout homéomorphisme de la boule préserve son bord.) et $\dot{e} = e - \partial e$. Si $n = 0$, nous convenons que e est un singleton, que ∂e est vide, et que $\dot{e} = e$. Si $f : e \rightarrow X$ est une application continue, notons $\partial f = f|_{\partial e}$ la restriction de f au bord de e .

Nous renvoyons à l'appendice A.2, pour la définition et les propriétés des recollements

$$X \cup_f Y = (X \amalg Y) / \mathcal{R}$$

d'un espace topologique X sur un espace topologique Y le long d'une application continue $f : A \rightarrow X$ où $A \subset Y$. Attention à la notion de relation d'équivalence engendrée par une relation : \mathcal{R} est la relation engendrée par la relation $x \sim f(x)$, pour tout $x \in A$. En particulier, si A est fermé, alors l'application canonique $Y \rightarrow X \cup_f Y$ est un homéomorphisme sur son image, qui est fermée. Nous identifions alors Y avec son image dans $X \cup_f Y$, par cette application. Nous renvoyons aussi à l'appendice A.2, pour la définition de la topologie faible sur un ensemble X muni d'une famille de parties $(X_i)_{i \in I}$ où X_i est munie d'une topologie : $F \subset X$ est fermé (respectivement ouvert) dans X si et seulement si $F \cap X_i$ est fermé (respectivement ouvert) dans X_i pour tout i ; de plus, une application $f : X \rightarrow Y$, où Y est un espace topologique, est continue si et seulement si $f|_{X_i} : X_i \rightarrow Y$ est continue pour tout $i \in I$.

Nous dirons qu'un espace topologique X est *obtenu par recollement de cellules* de dimension n sur un espace topologique Y s'il existe une famille $(e_\alpha)_{\alpha \in A}$ où e_α

est une cellule de dimension n munie d'une application continue $g_\alpha : \partial e_\alpha \rightarrow Y$, telle qu'il existe un homéomorphisme

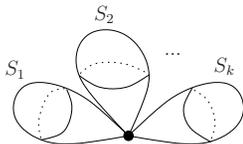
$$(\coprod_\alpha e_\alpha) \cup_{\coprod_\alpha g_\alpha} Y \rightarrow X.$$

(Les g_α ne sont pas supposés être injectifs.) La donnée d'une telle famille et d'un tel homéomorphisme s'appelle une *décomposition cellulaire* de X relative à Y . Elle est le plus souvent sous-entendue. Si $f_\alpha : e_\alpha \rightarrow X$ est l'application induite, alors f_α est continue et appelée l'*application caractéristique* de e_α . (Ce ne sont pas toujours des homéomorphismes sur leur image). Sa restriction $f_{\alpha|_{\partial e_\alpha}}$ est un homéomorphisme sur son image, qui est un ouvert de X . Si Y est séparé, l'image de g_α est un compact de Y , donc un fermé de Y . Si Y est séparé, la topologie de X est la topologie faible définie par la famille $\{Y\} \cup \{f_\alpha(e_\alpha)\}_\alpha$ de fermés de X . Les e_α (par abus $f_\alpha(e_\alpha)$) s'appellent les *cellules* de X relatives à Y . On identifie ∂e_α avec son image dans X par f_α , et on appelle les e_α les *cellules ouvertes* de X relatives à Y . Ce sont les composantes connexes de $X - Y$. L'application $\partial f_\alpha = g_\alpha : \partial e_\alpha \rightarrow Y \subset X$ est appelée l'*application d'attachement* de la cellule e_α de X sur Y . Si $n = 0$, alors X est (homéomorphe à) l'espace topologique somme disjointe de X et de l'ensemble A muni de la topologie discrète.

Rappelons qu'un *bouquet de sphères* de dimension n indexées par I est un espace topologique homéomorphe à l'espace

$$\bigvee_{i \in I} S_i = \left(\prod_{i \in I} S_i \right) / \sim$$

(muni de la topologie quotient de la topologie somme disjointe), où S_i est une copie de la sphère \mathbb{S}_n , pointée en un point base x_i , et \sim la relation d'équivalence engendrée par $x_i \sim x_j$ pour tous i, j .



La restriction de la projection canonique à chaque sphère S_i est un homéomorphisme sur son image, par lequel on identifie S_i et son image. À homéomorphisme près, le bouquet de sphères ne dépend pas des points bases choisis.

Proposition 4.7 *Si un espace topologique X est obtenu par recollement de cellules de dimension n sur un espace topologique Y , alors le quotient $X/\langle Y \rangle$ de X par la relation d'équivalence engendrée par $x \sim y$ pour tous x, y dans Y est un espace topologique discret si Y est vide, et un bouquet de sphères de dimension n sinon.*

Démonstration. C'est immédiat si Y est vide (auquel cas $n = 0$, X est un espace topologique discret, et $X/\langle Y \rangle = X$). Sinon, soit $(e_\alpha)_{\alpha \in A}$ une décomposition cellulaire de X relative à Y . Soit \sim_α la relation d'équivalence sur e_α engendrée par $x \sim_\alpha y$ si $x, y \in \partial e_\alpha$. Alors $S_\alpha = e_\alpha / \sim_\alpha$ est homéomorphe à une sphère (voir aussi l'exemple

(3) ci-dessous), que nous munissons du point base image de ∂e_α . L'inclusion $\coprod_\alpha e_\alpha \rightarrow (\coprod_\alpha e_\alpha) \cup_{\coprod_\alpha g_\alpha} Y$ induit clairement par passage au quotient un homéomorphisme

$$\bigvee_{\alpha \in A} S_\alpha \simeq ((\coprod_\alpha e_\alpha) \cup_{\coprod_\alpha g_\alpha} Y) / \langle Y \rangle. \quad \square$$

Un espace topologique X muni d'une famille $(X^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ de sous-espaces est un *CW-complexe* si, en utilisant la convention que $X^{(-1)} = \emptyset$,

1. $X^{(n)}$ est obtenu par recollement de cellules de dimension n sur $X^{(n-1)}$,
2. $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^{(n)}$ et la topologie de X coïncide avec topologie faible définie par la famille $(X^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$.

Voici quelques définitions et propriétés générales (immédiates) des CW-complexes.

Le sous-espace $X^{(n)}$ s'appelle le *n -squelette* de X . Il est fermé dans X . Le 0-squelette $X^{(0)}$ est un espace discret.

Nous appellerons *décomposition cellulaire* de X la donnée pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'une décomposition cellulaire de $X^{(n)}$ relative à $X^{(n-1)}$. Elle est le plus souvent fixée et sous-entendue, les propriétés qui suivent des CW-complexes n'en dépendent pas. Les *cellules, cellules ouvertes, applications caractéristiques, applications d'attachement* de (la décomposition cellulaire fixée de) X sont celles des $X^{(n)}$ relatives aux $X^{(n-1)}$. L'ensemble X est réunion disjointe de ses cellules ouvertes (qui sont les composantes connexes des $X^{(n)} - X^{(n-1)}$). Attention, les (images par les applications caractéristiques des) cellules de X sont des fermés de X , mais les cellules ouvertes ne sont pas forcément des ouverts de X . Une cellule de X de dimension 0 est appelée un *sommet* de X . Une cellule (resp. cellule ouverte) de X de dimension 1 est appelée une *arête* (resp. arête ouverte) de X . L'adhérence d'une arête ouverte est formée d'un ou de deux sommets de X , appelés les *extrémités* de l'arête.

La topologie de X est la topologie faible définie par la famille de ses cellules.

La *dimension* de X est la borne supérieure des dimensions de ses cellules ouvertes (ce qui est bien défini par le théorème d'invariance du domaine 1.1). Un *graphe* (topologique) est un CW-complexe de dimension ≤ 1 .

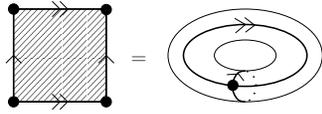
Le CW-complexe X est *fini* s'il n'a qu'un nombre fini de cellules ouvertes. Il est alors de dimension finie. La seconde condition des CW-complexes est automatiquement vérifiée si le CW-complexe est fini, comme ce sera le cas dans la plupart des exemples qui suivent.

Un *sous-CW-complexe* de X est un sous-espace topologique Y de X , tel que si $Y^{(n)} = X^{(n)} \cap Y$, alors Y muni de la famille $(Y^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est un CW-complexe. Il faut et il suffit pour cela que Y soit union de cellules ouvertes de X dont l'adhérence est contenue dans Y . Par exemple, $X^{(k)}$ est un sous-CW-complexe de X de dimension $\leq k$.

Si X et Y sont des CW-complexes, une application continue de X dans Y est dite *cellulaire* si elle envoie le n -squelette de X dans le n -squelette de Y pour tout $n \in \mathbb{N}$.

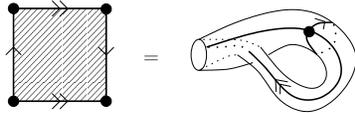
Il découle par récurrence de l'exercice E.A.96 qu'un CW-complexe de dimension finie est normal, donc séparé (voir aussi la proposition 4.8). En particulier, les cellules de X sont des compacts de X . Un CW-complexe fini est donc compact.

Exemples : (1) Le tore \mathbb{T}^2 admet une structure de CW-complexe ayant une 0-cellule, deux 1-cellules et une 2-cellule.



En effet, \mathbb{T}^2 est homéomorphe à l'espace topologique quotient du carré unité $[0, 1] \times [0, 1]$ par la relation d'équivalence engendrée par $(1, t) \sim (0, t)$ et $(t, 1) \sim (t, 0)$. La 0-cellule est l'image de $(0, 0)$, les deux 1-cellules sont les applications de $[0, 1]$ dans \mathbb{T}^2 obtenues par passage au quotient des applications $t \mapsto (t, 0)$ et $t \mapsto (0, t)$, et la 2-cellule est la projection canonique $[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{T}^2$.

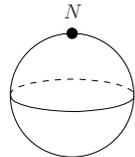
(2) La bouteille de Klein \mathbb{K}_2 admet une structure de CW-complexe ayant aussi un sommet, deux arêtes et une 2-cellule.



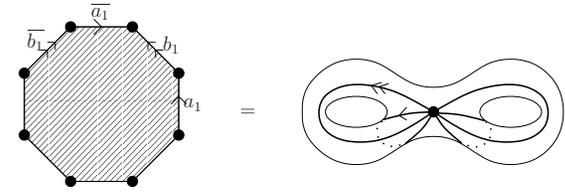
En effet, \mathbb{K}_2 est homéomorphe à l'espace topologique quotient du carré unité $[0, 1] \times [0, 1]$ par la relation d'équivalence engendrée par $(1, t) \sim (0, 1-t)$ et $(t, 1) \sim (t, 0)$. La 0-cellule est l'image de $(0, 0)$, les deux 1-cellules sont les applications de $[0, 1]$ dans \mathbb{K}_2 obtenues par passage au quotient des applications $t \mapsto (t, 0)$ et $t \mapsto (0, t)$, et la 2-cellule est la projection canonique $[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{K}_2$.

Les 1-squelettes de \mathbb{K}_2 et de \mathbb{T}^2 sont naturellement homéomorphes, mais l'application d'attachement de la 2-cellule de \mathbb{K}_2 n'est pas homotope à l'application d'attachement de la 2-cellule de \mathbb{T}^2 .

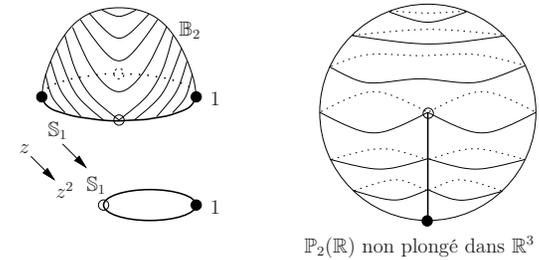
(3) Pour $n \geq 0$, la sphère \mathbb{S}_n admet une structure de CW-complexe fini ayant exactement un sommet N et une n -cellule, avec application d'attachement $f_n : \mathbb{S}_{n-1} \subset \mathbb{B}^n \rightarrow \{N\}$ l'application constante si $n \geq 1$, et l'application vide si $n = 0$. Plus généralement, un bouquet de sphères pointées de dimension n , indexées par un ensemble S , admet une structure de CW-complexe, avec un sommet et $\text{Card}(S)$ cellules de dimension n , dont les applications d'attachements sont les applications constantes sur le sommet.



(4) Soit P un $4g$ -gone euclidien, de bord orienté dans le sens trigonométrique, et dont les arêtes consécutives sont notées $a_1, b_1, \bar{a}_1, \bar{b}_1, \dots, a_g, b_g, \bar{a}_g, \bar{b}_g$, et paramétrées de manière affine et préservant l'orientation par l'intervalle $[0, 1]$. La surface Σ_g orientable connexe compacte de genre $g \geq 1$ est homéomorphe au quotient de P par la relation d'équivalence engendrée par la relation identifiant le point de coordonnée t sur l'arête a_i (resp. b_i) avec le point de coordonnée $1-t$ sur l'arête \bar{a}_i (resp. \bar{b}_i). Elle admet donc une structure de CW-complexe fini ayant un sommet, $2g$ arêtes, une 2-cellule.



(5) Comme l'espace projectif réel $\mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{R})$ s'obtient par attachement de la cellule \mathbb{B}_{n+1} de dimension $n+1$ sur $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ par l'application d'attachement $f_{n+1} : \mathbb{S}_n = \partial\mathbb{B}_{n+1} \rightarrow \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ qui est la projection canonique, et que $\mathbb{P}_0(\mathbb{R})$ est un singleton, on en déduit que $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ admet une structure de CW-complexe fini ayant une k -cellule pour tout $k = 0, \dots, n$, dont le k -squelette est $\mathbb{P}_k(\mathbb{R})$, et l'application d'attachement de la $(k+1)$ -cellule sur le k -squelette étant la projection canonique $f_{k+1} : \mathbb{S}_k = \partial\mathbb{B}_{k+1} \rightarrow \mathbb{P}_k(\mathbb{R})$.



(6) Comme l'espace projectif complexe $\mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{C})$ s'obtient par attachement de la cellule \mathbb{B}_{2n+2} de dimension $2n+2$ sur $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ par l'application d'attachement $f_{n+1} : \mathbb{S}_{2n+1} = \partial\mathbb{B}_{2n+2} \rightarrow \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ qui est la projection canonique, et que $\mathbb{P}_0(\mathbb{C})$ est un singleton, on en déduit que $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ admet une structure de CW-complexe fini ayant une $2k$ -cellule pour tout $k = 0, \dots, n$, dont le $2k$ -squelette et le $(2k+1)$ -squelette sont $\mathbb{P}_k(\mathbb{C})$, et l'application d'attachement de la $(2k+2)$ -cellule sur le $(2k+1)$ -squelette étant la projection canonique $f_{k+1} : \mathbb{S}_{2k+1} = \partial\mathbb{B}_{2k+2} \rightarrow \mathbb{P}_k(\mathbb{C})$.

(7) L'ensemble $\mathbb{P}_\infty(\mathbb{R}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$, muni de la famille de parties $(\mathbb{P}_n(\mathbb{R}))_{n \in \mathbb{N}}$ et de la topologie faible qu'elle définit, est un CW-complexe infini, ayant exactement une cellule en chaque dimension. L'ensemble $\mathbb{P}_\infty(\mathbb{C}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$, muni de la famille de parties $(\mathbb{P}_n(\mathbb{C}))_{n \in \mathbb{N}}$ et de la topologie faible qu'elle définit, est un CW-complexe infini, ayant exactement une cellule en chaque dimension paire.

Exercice E.39 Pour tout CW-complexe B , et tout revêtement $p : X \rightarrow B$, l'espace X admet une et une seule structure de CW-complexe telle que l'application p soit cellulaire.

4.4 Groupe fondamental des CW-complexes

Nous donnons ci-dessous quelques propriétés de la topologie et du groupe fondamental des CW-complexes.

Proposition 4.8 Tout CW-complexe est séparé et localement contractile (donc localement connexe par arc, et semi-localement simplement connexe).

Démonstration. Pour montrer qu'un CW-complexe X est localement contractile, il suffit de montrer que pour tout x dans X , pour tout entier n assez grand et pour tout voisinage V de x , il existe un voisinage ouvert V_n de x dans $X^{(n)}$, contenu dans V , tel que $V_n = V_{n+1} \cap X^{(n)}$, et une homotopie $h_n : V_n \times [0, 1] \rightarrow V_n$ entre l'application identité et l'application constante en x , telle que $h_{n+1}|_{V_n \times [0, 1]} = h_n$. En effet, $V_\infty = \bigcup_{n > 1} V_n$ est alors un ouvert de X contenu dans V et contenant x , qui est contractile, car l'application $h : V_\infty \times [0, 1] \rightarrow V_\infty$ définie par $h(x, s) = h_n(x, s)$ si $x \in V_n$, est une homotopie entre l'application identité de V_∞ et l'application constante en x .

On fixe une décomposition cellulaire de X . Soit \mathring{e} la cellule ouverte de X contenant x , et n_0 sa dimension. On pose V_{n_0} une boule dans \mathring{e} centrée en x et de rayon suffisamment petit pour que $V_{n_0} \subset V$. On suppose V_n, h_n construits pour un $n \geq n_0$. Soit $(e_i)_i$ la famille des cellules de dimension $n+1$ de X , avec $f_i : e_i \rightarrow X$ l'application caractéristique. Il existe un homéomorphisme entre $\partial e_i \times [0, 1]$ et un voisinage de ∂e_i dans e_i , et on identifie ce voisinage et $\partial e_i \times [0, 1]$ par cet homéomorphisme. Soit $\epsilon_i \in]0, 1[$ tel que $U_i = (\partial f_i)^{-1}(V_n) \times [0, \epsilon_i[\subset f_i^{-1}(V)$. Pour tout i , pour $(x, t) \in U_i - \partial f_i^{-1}(V_n)$ et $s \in [0, 1]$, posons $h_{n+1}(f_i(x, t), s) = f_i(h_n(\partial f_i(x), st))$ et $h_{n+1}(y, s) = h_n(y, s)$ si $y \in X^{(n)}$. Posons $V_{n+1} = V_n \cup (\bigcup_i f_i(U_i))$. Alors V_{n+1}, h_{n+1} conviennent.

On a déjà vu que le n -squelette de X est séparé pour tout n . Si x, x' sont deux points distincts de X , alors pour un n assez grand, ce sont deux points distincts de $X^{(n)}$. En prenant pour V_0, V'_0 des boules ouvertes disjointes dans les cellules ouvertes $\mathring{e}, \mathring{e}'$ contenant x, x' , la construction précédente fournit des voisinages ouverts disjoints V_∞, V'_∞ de x, x' . \square

Exercice E.40 Pour tout CW-complexe X , il existe pour tout sous-CW-complexe K un voisinage $V(K)$ de K muni d'une rétraction par déformation forte sur K , tel que $V(K) \cap V(K') = V(K \cap K')$ pour tous sous-CW-complexes K, K' et si $K \subset K'$, la restriction à $V(K)$ de la rétraction de $V(K')$ sur K' coïncide avec la rétraction de $V(K)$ sur K .

En particulier, le théorème de van Kampen implique que

Corollaire 4.9 Soit X un CW-complexe, K_1, K_2 deux sous-CW-complexes connexes, de réunion X , tels que $K_0 = K_1 \cap K_2$ soit connexe. Pour tout $x \in K_0$, l'application canonique

$$\pi_1(K_1, x) *_{\pi_1(K_0, x)} \pi_1(K_2, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$$

est un isomorphisme. \square

Proposition 4.10 Un compact d'un CW-complexe X ne rencontre qu'un nombre fini de cellules ouvertes de X . En particulier, il est contenu dans la réunion d'un nombre fini de cellules de X .

En particulier, un CW-complexe compact est fini. L'image de tout compact par une application continue à valeurs dans X est compacte car X est séparé, et donc contenue dans un sous-CW-complexe fini.

Démonstration. Si K est un compact d'un CW-complexe X , comme $(X - X^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est un recouvrement ouvert décroissant de K , il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $K \subset X^{(n)}$. On peut donc supposer que X est de dimension finie, et on raisonne par récurrence sur la dimension n de X . Si $n = 0$, alors X est discret, donc le résultat est vrai. Supposons le résultat vrai pour n , et soit K un compact d'un CW-complexe X de dimension $n+1$. Alors $K \cap X^{(n)}$ est un compact, donc ne rencontre qu'un nombre fini de cellules ouvertes de $X^{(n)}$. Supposons par l'absurde que K rencontre un nombre infini de cellules ouvertes (deux à deux distinctes donc disjointes) \mathring{e}_i de dimension $n+1$. On identifie chacune de ces cellules avec $\mathbb{B}_n - \mathbb{S}_{n-1}$, muni de la distance euclidienne, et on note $r_i = \min_{x \in K \cap \mathring{e}_i} d(0, x)$. Soit $V_i = \{x \in \mathring{e}_i : d(0, x) < \frac{1+r_i}{2}\}$, $W_i = \{x \in \mathring{e}_i : d(0, x) \leq r_i\}$ et $U = X - \bigcup_{i \in \mathbb{N}} W_i$. Alors U est un ouvert de X par définition de la topologie faible, et $\{U\} \cup \{V_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ est un recouvrement ouvert de X , dont aucun sous-recouvrement fini ne recouvre K , contradiction. \square

Le résultat suivant dit en particulier que le calcul du groupe fondamental d'un CW-complexe se ramène au calcul du groupe fondamental de ses sous-complexes finis.

Proposition 4.11 Soit X un CW-complexe, $x \in X$, et $(K_i)_{i \in I}$ une famille, stable par union finie et recouvrant X , de sous-CW-complexes de X contenant x . On considère la famille inductive de groupes avec $G_i = \pi_1(K_i, x)$, et F_{ij} est vide si K_i n'est pas contenu dans K_j , et $F_{ij} = \{f_{ij}\}$ sinon, où $f_{ij} : G_i \rightarrow G_j$ est l'application induite sur les groupes fondamentaux par l'inclusion $K_i \rightarrow K_j$. Alors le morphisme canonique $\varinjlim G_i \rightarrow \pi_1(X, x)$ est un isomorphisme.

Démonstration. La propriété universelle des limites inductives appliquée au groupe $H = \pi_1(X, x)$ muni des morphismes de groupes $h_i : G_i \rightarrow H$ induits par l'inclusion $K_i \rightarrow X$, qui vérifient bien $h_j \circ f_{ij} = h_i$ si $K_i \subset K_j$, donne un morphisme canonique $\phi : \varinjlim G_i \rightarrow \pi_1(X, x)$. Comme $(K_i)_{i \in I}$ recouvre X et est stable par union finie, tout sous-CW-complexe fini est contenu dans un K_i . Comme tout lacet de $\pi_1(X, x)$ est contenu dans un sous-CW-complexe fini, le morphisme de groupes ϕ est surjectif. Comme l'image de toute homotopie entre deux lacets de X est contenue dans un sous-CW-complexe fini, le morphisme de groupe ϕ est injectif. \square

En appliquant la proposition précédente à la famille des parties $(X^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 4.12 *Si X est un CW-complexe et x un sommet de X , alors $\pi_1(X, x) \simeq \varinjlim \pi_1(X^{(i)}, x)$.* \square

Groupe fondamental des graphes

Exercice E.41 *Montrer que pour un graphe connexe X , les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. X , privé de chaque arête ouverte, est non connexe,
2. X ne contient aucun plongement du cercle \mathbb{S}_1 ,
3. X est simplement connexe,
4. X est contractile.

Un graphe connexe vérifiant l'une de ces propriétés est appelé un *arbre*.

Exercice E.42 *Soit S un ensemble, et $(S_i)_{i \in I}$ une famille de parties finies de S , recouvrant S , et stable par union finie. Alors le morphisme canonique $\varinjlim L(S_i) \rightarrow L(S)$ est un isomorphisme.*

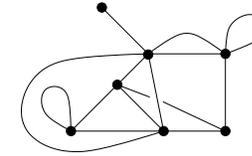
Proposition 4.13 *Le groupe fondamental d'un graphe est un groupe libre.*

Démonstration. Soit X un graphe connexe et x un sommet de X . Par la proposition 4.11 appliquée à la famille des sous-graphes finis de X contenant x , et par l'exercice E.42, il suffit de montrer le résultat si X est fini.

Soit C un sous-CW-complexe de X homéomorphe au cercle, e une arête ouverte contenue dans C et x un sommet de C . Si un tel C n'existe pas, alors par l'exercice E.41, $\pi_1(X, x)$ est trivial, donc libre. On a $\pi_1(C, x) \simeq \mathbb{Z}$. Par le théorème de van Kampen pour les CW-complexes (corollaire 4.9) appliqué aux sous-CW-complexes C et $X - \overset{\circ}{e}$, qui sont connexes et dont l'intersection $C - \overset{\circ}{e}$ est simplement connexe, on a

$$\pi_1(X, x) \simeq \pi_1(X - \overset{\circ}{e}, x) * \mathbb{Z}.$$

Comme X est fini, le résultat s'en déduit par récurrence. \square



Graphe fini
de groupe fondamental
libre de rang 8

Exercice E.43 *Soit X un graphe connexe fini. On appelle connectivité de X le plus grand entier n tel qu'il existe des arêtes ouvertes e_1, \dots, e_n avec $X - \bigcup_{i=1}^n e_i$ connexe. On appelle caractéristique d'Euler de X le nombre $\chi(X) = n_0 - n_1$ avec n_0 le nombre de sommets de X et n_1 le nombre d'arêtes de X . Montrer que $c(X) = 1 - \chi(X)$ et que $\pi_1 X$ est un groupe libre de rang $c(X)$.*

Le résultat suivant redémontre en particulier l'existence d'un groupe libre engendré par un ensemble S .

Corollaire 4.14 *Si X est un bouquet de cercles indexés par S , alors on a un isomorphisme de groupes*

$$\pi_1(X, x) \simeq L(S). \quad \square$$

Groupe fondamental de CW-complexe et présentation de groupe

Exercice E.44 *Un CW-complexe est connexe si et seulement si son 1-squelette est connexe.*

Les deux résultats suivants, que l'on démontrera simultanément, disent que le groupe fondamental d'un CW-complexe est porté par son 2-squelette, et que le groupe fondamental d'un CW-complexe est muni d'une présentation par la structure de CW-complexe de son 2-squelette.

Proposition 4.15 *Si X est un CW-complexe connexe et $x \in X^{(0)}$, l'inclusion $X^{(2)} \rightarrow X$ du 2-squelette de X dans X induit un isomorphisme de groupes*

$$\pi_1(X^{(2)}, x) \simeq \pi_1(X, x).$$

On identifie \mathbb{S}_1 avec le quotient $[0, 1]/(0 \sim 1)$, de sorte que si $f : \mathbb{S}_1 \rightarrow Z$ est une application continue, alors f est considéré comme un lacet dans Z d'origine et extrémité $f(1)$. Soit X un CW-complexe connexe, et x un sommet de X . On se fixe une décomposition cellulaire de X , et pour toute 2-cellule e_α de X , soit $g_\alpha : \partial e_\alpha \rightarrow X^{(1)} \subset X$ l'application d'attachement de e_α . Pour tout α , on note r_α la classe d'homotopie (relativement extrémités) du lacet $c \cdot g_\alpha \cdot \bar{c}$ en x , pour c un chemin dans $X^{(1)}$ entre x et $g_\alpha(1)$, après identification de ∂e_α avec le cercle \mathbb{S}_1 . Notons que r_α est bien déterminé à conjugaison et passage à l'inverse près.

Proposition 4.16 Avec les notations précédentes, l'inclusion de $X^{(1)} \rightarrow X$ induit un isomorphisme de groupes

$$N(\{r_\alpha\}_\alpha) \backslash \pi_1(X^{(1)}, x) \rightarrow \pi_1(X, x).$$

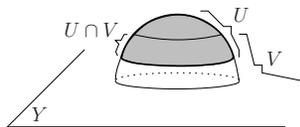
Comme $\pi_1 X^{(1)}$ est un groupe libre, on obtient bien une présentation du groupe fondamental de X .

Preuves des propositions 4.15 et 4.16. On montre d'abord un résultat préliminaire.

Soit X un CW-complexe connexe de dimension $n \geq 2$, obtenu par recollement d'une cellule e de dimension n sur un CW-complexe Y de dimension $n-1$, avec application d'attachement $f : \partial e \rightarrow Y$. Comme ∂e est connexe, l'espace Y est connexe. On identifie e avec \mathbb{B}_n . Pour $n = 2$, si $y \in Y$, et c est un chemin de y à $f(1)$ dans Y , le sous-groupe distingué de $\pi_1(Y, y)$ engendré par $[c \cdot f \cdot \bar{c}]$ ne dépend pas du chemin c , on le notera $N([f])$.

Lemme 4.17 L'inclusion $Y \rightarrow X$ induit un isomorphisme $\pi_1(Y, y) \rightarrow \pi_1(X, y)$ pour tout y dans Y si $n \geq 3$, et un isomorphisme $N([f]) \backslash \pi_1(Y, y) \rightarrow \pi_1(X, y)$ si $n = 2$.

Démonstration. Par les propriétés du changement de point base, il suffit de le montrer pour $y = f(1)$. Soit $U = B(0, \frac{2}{3})$ la boule de centre l'origine et de rayon $\frac{2}{3}$ dans $\mathbb{B}_n - \mathbb{S}_{n-1} = \mathring{e} \subset X$. Soit V le complémentaire de l'adhérence de $B(0, \frac{1}{3})$ dans X . Soit $x \in U \cap V$.



Alors $U, V, U \cap V$ sont connexes, U est contractile, donc $\pi_1(U, x) = \{e\}$, et $U \cap V$ a le type d'homotopie de la sphère de dimension $n-1$. Donc $U \cap V$ est simplement connexe si $n \geq 3$, et a le type d'homotopie du cercle si $n = 2$. Pour $n = 2$, soit α le lacet en x dans $U \cap V$ obtenu par un homéomorphisme du cercle de centre l'origine passant par x avec le quotient $[0, 1]/(0 \sim 1)$. Sa classe d'homotopie engendre $\pi_1(U \cap V, x)$.

Par le théorème de Van Kampen, l'inclusion $V \rightarrow X$ induit un isomorphisme $\pi_1(V, x) \simeq \pi_1(X, x)$ si $n \geq 3$, et un isomorphisme $N([\alpha]) \backslash \pi_1(V, x) \simeq \pi_1(X, x)$ si $n = 2$.

Comme V se rétracte par déformation forte sur Y , par une rétraction envoyant le lacet α sur le lacet f , on en déduit que l'inclusion $Y \rightarrow X$ induit un isomorphisme $\pi_1(Y, y) \rightarrow \pi_1(X, y)$ pour tout y dans Y si $n \geq 3$, et un isomorphisme $N([f]) \backslash \pi_1(Y, y) \rightarrow \pi_1(X, y)$ si $n = 2$. \square

Maintenant, pour montrer les propositions 4.15 et 4.16, par le corollaire 4.12, on peut supposer que X est de dimension finie n . On raisonne alors par récurrence sur n . Si $n \leq 1$, les résultats sont clairs. Soit X un CW-complexe de dimension $n \geq 2$. Le sous-groupe distingué engendré par une partie S d'un groupe H est la limite inductive des sous-groupes distingués engendrés par les parties finies de S . En appliquant la proposition 4.11 à la famille des sous-CW-complexes de X obtenu par recollement d'un nombre fini de cellules de dimension n sur $X^{(n-1)}$, et par récurrence, les résultats découlent alors du lemme précédent. \square

Exemple. On reprend les structures de CW-complexes sur le tore \mathbb{T}^2 , la bouteille de Klein \mathbb{K}_2 et la surface Σ_g orientable compacte connexe de genre g , construits dans la partie précédente, et on applique la proposition 4.16.

(1) Le 1-squelette du tore \mathbb{T}^2 est un bouquet de deux cercles. Donc son groupe fondamental est un groupe libre de rang deux. Si on note $\{a, b\}$ sa partie génératrice correspondant aux deux cercles orientés, alors l'application d'attachement du carré à ce bouquet de deux cercles envoie le bord du carré sur un lacet du bouquet dont la classe d'homotopie est $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$. On retrouve donc le fait que le groupe fondamental du tore \mathbb{T}^2 admet comme présentation

$$\langle a, b \mid [a, b] = 1 \rangle$$

qui est une présentation de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

(2) Le 1-squelette de la bouteille de Klein \mathbb{K}_2 est un bouquet de deux cercles. Donc son groupe fondamental est un groupe libre de rang deux. Si on note $\{a, b\}$ la partie génératrice correspondant aux deux cercles orientés, alors l'application d'attachement du carré à ce bouquet de deux cercles envoie le bord du carré sur un lacet du bouquet dont la classe d'homotopie est $abab^{-1}$. Le groupe fondamental de la bouteille de Klein \mathbb{K}_2 admet donc comme présentation $\langle a, b \mid abab = b \rangle$ ou encore en posant $x = ab$ et $y = b^{-1}$,

$$\langle x, y \mid x^2 y^2 = 1 \rangle.$$

(3) Le 1-squelette de la surface Σ_g est un bouquet de $2g$ cercles, donc son groupe fondamental est un groupe libre de rang $2g$. Si on note $\{a_1, b_1, \dots, a_g, b_g\}$ la partie génératrice correspondant aux $2g$ cercles orientés, alors l'application d'attachement du $4g$ -gone à ce bouquet de deux cercles envoie le bord du carré sur un lacet du bouquet dont la classe d'homotopie est $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$. Le groupe fondamental de la surface Σ_g admet donc comme présentation

$$\langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid [a_1, b_1] \dots [a_g, b_g] = 1 \rangle.$$

4.5 Applications des revêtements à la théorie des groupes

Corollaire 4.18 (Théorème de Schreier) Tout sous-groupe d'un groupe libre est libre.

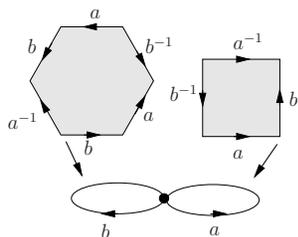
Démonstration. Soit H un sous-groupe du groupe libre $L(S)$ vu comme groupe fondamental d'un bouquet de cercles B indexés par S (corollaire 4.14). Soit $p : \tilde{B} \rightarrow$

B le revêtement connexe de B associé à H (voir la partie 3.12). En particulier, $\pi_1 \tilde{B}$ est isomorphe à H . Comme tout revêtement d'un graphe est un graphe, on en déduit que H est un groupe libre. \square

Proposition 4.19 *Pour tout groupe G muni d'une présentation (S, R) , il existe un CW-complexe pointé (X, x) de dimension 2, dont le 1-squelette est le bouquet de $\text{Card}(S)$ cercles, et ayant $\text{Card}(R)$ cellules de dimension 2, et un isomorphisme*

$$\pi_1(X, x) \simeq G .$$

Démonstration. Pour tout s dans S , soit S_s une copie du cercle $\mathbb{S}_1 = [0, 1]/(0 \sim 1)$, pointé en 1. Soit $Y = \bigvee_{s \in S} S_s$ le bouquet de cercles correspondant. Soit $f_s : [0, 1] \rightarrow Y$ la projection canonique de $[0, 1]$ sur $S_s \subset Y$. Pour tout mot réduit $r = s_1^{\epsilon_1} \dots s_k^{\epsilon_k}$ dans R , on considère un polygone régulier P_r , de bord orienté, ayant k côtés, paramétrés de manière préservant l'orientation par $[0, 1]$, et étiquetés dans l'ordre cyclique par $s_1^{\epsilon_1}, s_2^{\epsilon_2}, \dots, s_k^{\epsilon_k}$. Soit $f_r : \partial P_r \rightarrow Y$ l'application qui en restriction au côté étiqueté $s_i^{\epsilon_i}$ vaut l'application f_{s_i} si $\epsilon_i = 1$, et $t \mapsto f_{s_i}(1 - t)$ sinon. Soit X le CW-complexe, recollement des cellules P_r sur le bouquet de cercle Y par les application d'attachements f_r , et soit x son unique sommet. Alors (X, x) convient (et est appelé le 2-complexe de Cayley de la présentation (S, R)), par la proposition 4.16. \square



2-complexe de Dehn
de la présentation
 $\langle a, b \mid ab^{-1}aba^{-1}b = 1, aba^{-1}b^{-1} = 1 \rangle$
du groupe \mathbb{Z}

Le résultat suivant découle des propositions 4.16 et 4.19.

Corollaire 4.20 *Un groupe est de présentation finie si et seulement si c'est le groupe fondamental d'un CW-complexe fini.* \square

Remarque. En plongeant ce CW-complexe dans l'espace euclidien de dimension 4, et en prenant le double le long du bord du voisinage régulier de ce CW-complexe, on montre qu'un groupe est de présentation finie si et seulement si c'est le groupe fondamental d'une variété (topologique) de dimension 4.

4.6 Autres exercices

Exercice E.45 Calculer le groupe fondamental du complémentaire de la réunion de deux droites dans \mathbb{R}^3 (on distinguera les cas où les droites sont confondues, sécantes en un point, disjointes).

Exercice E.46 Pour $i = 1, 2$, soit $p_i \in \mathbb{N} - \{0\}$, soit B_i une copie du disque $\mathbb{B}_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$, soit S_i une copie du cercle $\mathbb{S}_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ pointée en $x_i = 1$. On identifie S_i avec son image dans le bouquet de cercles $S_1 \vee S_2$. Soit $f_i : \partial B_i \rightarrow S_i$ l'application $z \mapsto z^{p_i}$ et soit X l'espace topologique recollement suivant

$$X = (B_1 \amalg B_2) \cup_{(f_1 \amalg f_2)} (S_1 \vee S_2) .$$

Montrer que X admet une structure de CW-complexe ayant un sommet, deux arêtes et deux 2-cellules. Calculer le groupe fondamental de X .

Exercice E.47 Cet exercice est la suite de l'exercice E.33 dont on reprend les notations.

(6) Donner une présentation du groupe fondamental $\pi_1(\mathbb{S}_3 - K, b)$ (on pourra considérer les sous-espaces $K_1 = \{(z, w) \in \mathbb{S}_3^* : |z| \leq |w|\}$ et $K_2 = \{(z, w) \in \mathbb{S}_3^* : |z| \geq |w|\}$).

Exercice E.48 Soit $(G_i)_{i \in I}$ une famille de groupes, et pour tout i , soit (X_i, x_i) un CW-complexe connexe pointé (en un de ses sommets), muni d'un isomorphisme de groupes $\alpha_i : G_i \rightarrow \pi_1(X_i, x_i)$. Soit $(X, x) = \bigvee_{i \in I} (X_i, x_i)$ la somme connexe pointée de la famille $(X_i, x_i)_{i \in I}$, avec $\beta_i : X_i \rightarrow X$ l'inclusion canonique.

Montrer que $(\pi_1(X, x), ((\beta_i)_* \circ \alpha_i)_{i \in I})$ est un produit libre de la famille $(G_i)_{i \in I}$.

Exercice E.49 (1) Soit $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$ un morphisme de groupes, et pour $i = 1, 2$, soit (X_i, x_i) un CW-complexe connexe pointé (en un de ses sommets), muni d'un isomorphisme de groupes $\alpha_i : G_i \rightarrow \pi_1(X_i, x_i)$. Montrer qu'il existe une application cellulaire $f : X_1 \rightarrow X_2$ avec $f(x_1) = x_2$, telle que le diagramme suivant commute

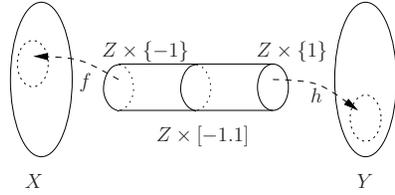
$$\begin{array}{ccc} G_1 & \xrightarrow{\varphi} & G_2 \\ \alpha_1 \downarrow & & \downarrow \alpha_2 \\ \pi_1(X_1, x_1) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(X_2, x_2) . \end{array}$$

(2) Soient A, B, C trois groupes, $i : C \rightarrow A, j : C \rightarrow B$ deux morphismes de groupes, X, Y, Z trois CW-complexes connexes pointés (en un de leur sommets), $f : Z \rightarrow X$ et $h : Z \rightarrow Y$ deux applications cellulaires pointées telles que $f_* = i$ et $h_* = j$. On note $F : Z \times \{-1, 1\} \rightarrow (X \amalg Y)$ l'application cellulaire définie par $F(z, -1) = f(z)$ et $F(z, 1) = h(z)$ pour tout z .

Montrer que le groupe fondamental du recollement

$$(Z \times [-1, 1]) \cup_F (X \amalg Y)$$

de $Z \times [-1, 1]$ sur $(X \amalg Y)$ par F (voir la partie A.2) est isomorphe à la somme amalgamée $A *_C B$.



(3) Montrer que si (G_i, F_{ij}) est une famille inductive de groupes, alors il existe un CW-complexe connexe pointé X dont le groupe fondamental est isomorphe à $\varinjlim G_i$.

Exercice E.50 Ce problème est un exercice de synthèse portant sur les trois premiers chapitres de ce livre. Les différentes parties de ce problème sont largement indépendantes.

On rappelle que si X, Y sont deux espaces topologiques, si A est une partie de X et si $f : A \rightarrow Y$ est une application continue, alors on appelle *espace topologique obtenu par recollement de X sur Y par f* , et on note $X \cup_f Y$, l'espace topologique quotient $(X \amalg Y)/\mathcal{R}$ de l'espace topologique somme disjointe $X \amalg Y$ par la relation d'équivalence \mathcal{R} engendrée par la relation $x \sim f(x)$ pour tout $x \in A$.

I Si X est un espace topologique, on note CX l'espace topologique quotient $CX = (X \times [0, 1])/\mathcal{R}$, avec \mathcal{R} la relation d'équivalence engendrée par $(x, 0) \sim (x', 0)$ pour tous x, x' dans X . Pour $t \in [0, 1]$ et $u \in X$, on notera $[x, t]$ la classe de (x, t) .

(1) Montrer que CX est contractile.

(2) Montrer que l'application $x \mapsto [x, 1]$ est un homéomorphisme sur son image. Dans la suite de ce problème, on identifie X et son image dans CX par cette application.

(3) Si $f : X \rightarrow Y$ est une application continue, montrer que l'application $Cf : CX \rightarrow CY$, définie par $Cf([x, t]) = [f(x), t]$ est continue.

(4) Montrer que si X est compact, alors CX aussi.

II Pour $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, on considère dans \mathbb{R}^2 le compact R_n qui est le rectangle $[-2, 4n - 2] \times [-2, 2]$ privé des disques ouverts de rayon 1 et de centre $(4k, 0)$ pour $k = 0, \dots, n - 1$. On note Δ_n l'espace topologique quotient de R_n par la relation d'équivalence engendrée par $(x, -2) \sim (x, 2)$ pour tout x dans $[-2, 4n - 2]$ et $(-2, y) \sim (4n - 2, y)$ pour tout y dans $[-2, 2]$.

Calculer le groupe fondamental de Δ_n .

III Soit E un ensemble fini, non vide, muni de la topologie discrète. Soit $\sigma : E \rightarrow E$ une bijection. (Pour $n \in \mathbb{N}$ et f une application d'un ensemble dans

lui-même, on rappelle que $f^{\circ n} = f \circ f \circ \dots \circ f$ désigne la composée n -ème de f , avec $f^{\circ 0} = \text{id}$.)

(1) Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} \times (CE \times \mathbb{R}) &\longrightarrow (CE \times \mathbb{R}) \\ (n, (x, t)) &\longmapsto ((C\sigma)^{\circ n}(x), t + n) \end{aligned}$$

est une action libre et propre du groupe discret \mathbb{Z} sur $CE \times \mathbb{R}$.

(2) Si Ω est l'espace topologique quotient $\mathbb{Z} \backslash (CE \times \mathbb{R})$, calculer le groupe fondamental de Ω .

(3) Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N} - \{0\}$ tel que $\partial\Omega$ possède un nombre fini de composantes connexes $\Sigma_1, \dots, \Sigma_N$, chacune d'entre elles étant homéomorphe à un cercle.

(4) Pour $i = 1, \dots, N$, on note D_i une copie du disque unité fermé de \mathbb{R}^2 , et on choisit $f_i : \partial D_i = \mathbb{S}^1 \rightarrow \Sigma_i$ un homéomorphisme. On note $\widehat{\Omega}_1$ l'espace topologique

$$\left(\coprod_{i=1}^N D_i \right) \cup_{(\coprod_{i=1}^N f_i)} \Omega$$

recollement des disques D_i sur Ω par les applications f_i . Calculer le groupe fondamental de $\widehat{\Omega}_1$.

Application numérique : que vaut $\pi_1(\widehat{\Omega}_1)$ si $E = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $\sigma : x \mapsto x + 1 \pmod n$?

(5) On considère R_N , le rectangle privé de N disques, défini en II. Soit $\partial_+ R_N \subset R_N$ la réunion des bords de ces N disques, et $\phi : \partial_+ R_N \rightarrow \partial\Omega$ un homéomorphisme. On note $\widehat{\Omega}_2 = R_N \cup_\phi \Omega$ l'espace topologique obtenu par recollement de R_N sur Ω par l'application ϕ .

Montrer que $\widehat{\Omega}_2$ a le type d'homotopie d'un bouquet de N cercles.

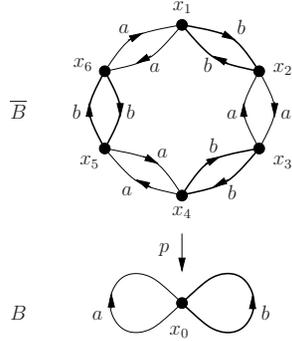
(6) On considère l'espace topologique S_N , qui est la sphère \mathbb{S}^2 privée de N disques ouverts, d'adhérences deux à deux disjointes. On note $\partial S_N \subset S_N$ la réunion des bords de ces N disques, et $\varphi : \partial S_N \rightarrow \partial\Omega$ un homéomorphisme. On note $\widehat{\Omega}_3 = S_N \cup_\varphi \Omega$ l'espace topologique obtenu par recollement de S_N sur Ω par l'application φ .

Calculer le groupe fondamental de $\widehat{\Omega}_3$.

Application numérique : Pour $p, q \in \mathbb{N} - \{0\}$, on suppose que $E = \{1, \dots, p + q\}$, et que σ est le produit de deux cycles $(1, \dots, p)(p + 1, \dots, p + q)$. Montrer que le groupe $\pi_1(\widehat{\Omega}_3)$ admet pour présentation $\langle a, b \mid ab^p a^{-1} = b^q \rangle$ ou $\langle a, b \mid ab^p a^{-1} = b^{-q} \rangle$. (Un tel groupe s'appelle un groupe de Baumslag-Solitar.)

IV On considère le graphe orienté \overline{B} de sommets x_j pour $j = 1, \dots, 6$ (entiers modulo 6), ayant, pour tout $i = 1, 2, 3$, une arête étiquetée a de x_{2i} à x_{2i+1} et de x_{2i+1} à x_{2i} , et une arête étiquetée b de x_{2i+1} à x_{2i+2} et de x_{2i+2} à x_{2i+1} . On note B le bouquet de deux cercles, orientés et étiquetés par a, b . On fixe un paramétrage par

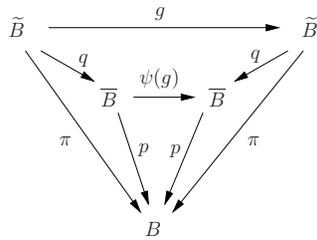
l'intervalle $]0, 1[$ de chaque arête ouverte de B et de \overline{B} . On considère l'application continue $p : \overline{B} \rightarrow B$, envoyant les sommets de \overline{B} sur le sommet x_0 de B , et envoyant, par un homéomorphisme préservant les paramétrages donnés, chaque arête de \overline{B} sur l'arête de B ayant même orientation et étiquette (voir dessin ci-dessous).



(1) Montrer que $p : \overline{B} \rightarrow B$ est un revêtement. Est-il galoisien? Quel est le groupe Γ des automorphismes de revêtement de p ?

(2) On fixe $\pi : \tilde{B} \rightarrow B$ un revêtement universel de B . On note G le groupe des automorphismes de revêtements de π , et $\pi' : \tilde{B} \rightarrow {}_G\tilde{B}$ la projection canonique sur l'espace topologique quotient ${}_G\tilde{B}$. Montrer qu'il existe un unique homéomorphisme $h : {}_G\tilde{B} \rightarrow B$ tel que $h \circ \pi' = \pi$. Dans la suite, on identifie ${}_G\tilde{B}$ et B par cet homéomorphisme, et donc π' avec π .

(3) Montrer qu'il existe un revêtement $q : \tilde{B} \rightarrow \overline{B}$ et un morphisme surjectif de groupes $\psi : G \rightarrow \Gamma$, uniques, tels que, pour tout g dans G , le diagramme suivant commute :



(4) On note E l'ensemble des sommets de \overline{B} , et $C\psi_g : CE \rightarrow CE$ l'application induite (voir la question I.3) par la restriction $\psi_g = \psi(g)|_E : E \rightarrow E$. Montrer que

l'application

$$\begin{aligned} G \times (CE \times \tilde{B}) &\longrightarrow (CE \times \tilde{B}) \\ (g, (x, y)) &\longmapsto (C\psi_g(x), g(y)) \end{aligned}$$

est une action libre et propre du groupe discret G sur $CE \times \tilde{B}$.

(5) On note Θ l'espace topologique quotient ${}_G\backslash (CE \times \tilde{B})$. Quel est le groupe fondamental de Θ ?

(6) On note $pr_2 : E \times \tilde{B} \rightarrow \tilde{B}$ la seconde projection $(x, y) \mapsto y$. Montrer que pr_2 induit un revêtement connexe ${}_G\backslash (E \times \tilde{B}) \rightarrow B$.

(7) Montrer que ${}_G\backslash (E \times \tilde{B})$ et \overline{B} sont homéomorphes.

(8) Soit f un homéomorphisme de la partie \overline{B} de $C\overline{B}$ sur la partie ${}_G\backslash (E \times \tilde{B})$ de Θ . On note $\hat{\Theta}$ l'espace topologique obtenu par recollement de $C\overline{B}$ sur Θ par f .

Calculer le groupe fondamental de $\hat{\Theta}$.

(9) Quels sont, à isomorphisme près, les revêtements connexes de $\hat{\Theta}$? Quels sont ceux qui sont galoisiens?

4.7 Indications pour la résolution des exercices

Exercice E.45 Soient D, D' deux droites de \mathbb{R}^3 . On note $X = \mathbb{R}^3 - (D \cup D')$, qui est un ouvert connexe par arcs de \mathbb{R}^3 .

(1) On suppose d'abord D, D' disjointes, et on calcule $\pi_1 X$ par deux méthodes.

a) L'espace X , étant un ouvert connexe de \mathbb{R}^3 , est localement connexe par arcs et localement contractile. Soit Δ une perpendiculaire commune à D, D' . Soit P le plan de \mathbb{R}^3 contenant D et orthogonal à Δ et P' le plan de \mathbb{R}^3 contenant D' et orthogonal à Δ . Soit C la composante connexe de $\mathbb{R}^3 - P$ contenant D' et C' la composante connexe de $\mathbb{R}^3 - P'$ contenant D . Soit $U = C - D'$ et $U' = C' - D$. Alors U, U' sont des ouverts connexes de X . Comme P, P' sont parallèles, l'intersection $U \cap U'$ est convexe, donc connexe et contractile, donc $\pi_1(U \cap U') = \{1\}$. Comme U se rétracte par déformation forte (parallèlement à D') sur un demi-plan ouvert privé d'un point (l'intersection avec U d'un plan perpendiculaire à D'), on a $\pi_1 U = \mathbb{Z}$. De même $\pi_1 U' = \mathbb{Z}$. Par le théorème de van Kampen, on a donc

$$\pi_1 X = \pi_1 U *_{\pi_1(U \cap U')} \pi_1 U' = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$$

(un groupe libre de rang deux).

b) Si D et D' sont parallèles, alors X se rétracte par déformation forte (parallèlement à D) sur un plan P perpendiculaire à D privé des deux points x, y d'intersection avec D, D' . Le groupe fondamental de $P - \{x, y\}$ est un groupe libre de rang 2, donc

$$\pi_1 X = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

Si D et D' ne sont pas parallèles, il existe un homéomorphisme entre $X = \mathbb{R}^3 - (D \cup D')$ et $Y = \mathbb{R}^3 - (D \cup D'')$ avec D'' une droite disjointe et parallèle à D . Donc

$$\pi_1 X = \pi_1 Y = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

(Par changement de coordonnées, on se ramène au cas où, en notant (z, t) un point de $\mathbb{R}^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$, la droite D a pour équations $\text{Im } z = t = 0$ et D' pour équations $\text{Re } z = 0, t = 1$. Alors $(z, t) \mapsto (ze^{\frac{it}{2}}, t)$ est un tel homéomorphisme.)

(2) On suppose maintenant D, D' sécantes en un point p . On considère la sphère euclidienne S de centre p et de rayon 1, qui possède quatre points d'intersection w, x, y, z avec $D \cup D'$. Alors X se rétracte (radialement) par déformation forte sur $S - \{w, x, y, z\}$. Par projection stéréographique, une sphère privée de quatre points est homéomorphe au plan euclidien \mathbb{R}^2 privé de trois points t, u, v . On a donc

$$\pi_1 X = \pi_1(S - \{w, x, y, z\}) = \pi_1(\mathbb{R}^2 - \{t, u, v\}) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$$

(un groupe libre de rang trois).

Exercice E.46 Le bouquet de deux cercles $Y = S_1 \vee S_2$ est un CW-complexe de dimension 1, ayant un sommet et deux arêtes. Par définition, X s'obtient par recollement de deux 2-cellules sur Y , donc X est un CW-complexe ayant un sommet, deux arêtes et deux 2-cellules. Les applications f_1, f_2 étant les applications d'attachement des 2-cellules sur le 1-squelette Y de X , le groupe fondamental du CW-complexe connexe X de dimension 2 est, en notant c un générateur de $\pi_1(\partial B_1) = \pi_1(\partial B_2) = \mathbb{Z}$,

$$\pi_1 X = N((f_1)_*(c), (f_2)_*(c)) \backslash \pi_1 Y.$$

Comme $\pi_1 Y$ est un groupe libre à deux générateurs x, y , avec $(f_1)_*(c) = x^{p_1}$, $(f_2)_*(c) = y^{p_2}$, le groupe $\pi_1 X$ admet pour présentation $\langle x, y \mid x^{p_1} = 1, y^{p_2} = 1 \rangle$.
Donc

$$\pi_1 X = \mathbb{Z}/p_1\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/p_2\mathbb{Z}.$$

Exercice E.47 (6) L'espace $K_1 = \{(z, w) \in \mathbb{S}'_3 : |z| \leq |w|\}$ est homéomorphe à $\mathbb{B}_2 \times \mathbb{S}_1$ par l'application $(z, w) \mapsto (\frac{z}{w}, \frac{w}{|w|})$. En effet, si $(z, w) \in K_1$, alors w est non nul; de plus, l'inverse est

$$(u, v) \mapsto \left(\frac{\sqrt{2}uv}{\sqrt{1+|u|^2}}, \frac{\sqrt{2}v}{\sqrt{1+|u|^2}} \right)$$

qui est continu. La rétraction par déformation forte $r : \mathbb{B}_2 \times \mathbb{S}_1 \rightarrow \{0\} \times \mathbb{S}_1$, induite par la rétraction radiale du disque \mathbb{B}_2 sur son centre, induit une rétraction par déformation forte $(z, w) \mapsto (0, \frac{w}{|w|})$ de $K'_1 = K_1 \cap (\mathbb{S}'_3 - K)$ sur le cercle $\{0\} \times \mathbb{S}_1$. En particulier $\pi_1(K'_1) = \mathbb{Z}$.

De même, l'application $K'_2 = K_2 \cap (\mathbb{S}'_3 - K) \rightarrow \mathbb{S}_1 \times \{0\}$ définie par $(z, w) \mapsto (\frac{z}{|z|}, 0)$ est une rétraction par déformation forte sur un cercle. En particulier $\pi_1(K'_2) = \mathbb{Z}$.

L'intersection $K_1 \cap K_2$ est l'ensemble des (z, w) tels que $|z| = |w| = 1$. L'application $(z, w) \mapsto (\frac{z^3}{w^2}, \frac{w}{z})$ est un homéomorphisme de $K_1 \cap K_2$ sur $\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1$ qui envoie K sur le cercle $\{1\} \times \mathbb{S}_1$. Donc $K'_1 \cap K'_2$ est homéomorphe au tore $\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1$ privé du cercle $\{1\} \times \mathbb{S}_1$. En particulier $\pi_1(K'_1 \cap K'_2) = \mathbb{Z}$, l'inclusion $K'_1 \cap K'_2 \rightarrow K'_1$ induit sur les groupes fondamentaux l'application $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ qui est la multiplication par 3, et l'inclusion $K'_1 \cap K'_2 \rightarrow K'_2$ induit sur les groupes fondamentaux l'application $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ qui est la multiplication par 2.

Comme $K'_1, K'_2, K'_1 \cap K'_2$ sont connexes par arcs, avec $K'_1 \cup K'_2 = \mathbb{S}'_3 - K$ et puisque K'_1, K'_2 sont des rétractes par déformation forte de voisinages dans $\mathbb{S}'_3 - K$, on en déduit par le théorème de van Kampen, pour tout b dans $K'_1 \cap K'_2$, par exemple $b = (-1, 1)$, que

$$\pi_1(\mathbb{S}'_3 - K, b) = \pi_1(K'_1, b) *_{\pi_1(K'_1 \cap K'_2, b)} \pi_1(K'_2, b) = \langle x, y \mid x^3 = y^2 \rangle.$$

Exercice E.50 [I] (1) Soit $u_0 = [x, 0]$ (qui ne dépend pas de $x \in X$). Soit $\tilde{h} : (X \times [0, 1]) \times [0, 1] \rightarrow (X \times [0, 1])$ l'application $\tilde{h}((x, t), s) = (x, st)$. Elle est continue, et envoie pour s fixé classes d'équivalences sur classes d'équivalences, donc passe au quotient en une application continue $h : CX \times [0, 1] \rightarrow CX$ telle que $h(y, 0) = u_0$ et $h(y, 1) = y$ pour tout $y \in CX$. Donc CX est contractile.

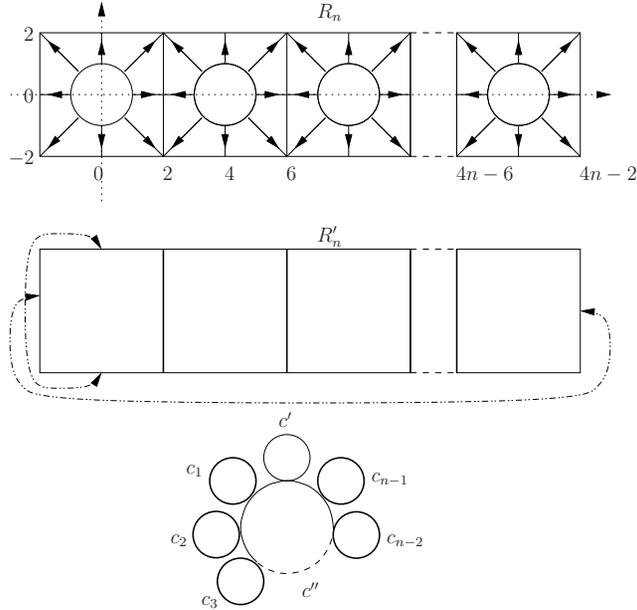
Dans la suite nous appellerons CX le *cône* de base X , et u_0 son *sommet*.

(2) L'application $x \mapsto [x, 1]$ est continue, comme composée de deux applications continues. Elle est injective par définition de la relation d'équivalence. Son application réciproque $[x, 1] \mapsto x$ est continue, car elle est obtenue par passage au quotient de l'application continue $(x, 1) \mapsto x$.

(3) L'application $(x, t) \mapsto (f(x), t)$ est continue et envoie classes d'équivalences sur classes d'équivalences, donc passe au quotient en une application continue, qui est Cf .

(4) Si X est séparé, alors CX l'est aussi. En effet, soient $[x, t], [x', t']$ deux points distincts de CX . Si $t < t'$, soit u tel que $t < u < t'$. Alors $\{(y, s) \in X \times [0, 1] \mid s < u\}$ et $\{(y, s) \in X \times [0, 1] \mid s > u\}$ sont deux ouverts saturés disjoints de $X \times [0, 1]$, contenant respectivement (x, t) et (x', t') . Si $t = t'$, alors $t \neq 0$ et $x \neq x'$; si U, U' sont deux ouverts de X disjoints contenant x, x' respectivement, et si $\epsilon \in]0, t[$, alors $U \times (]t - \epsilon, t + \epsilon[\cap]0, 1])$ et $U' \times (]t - \epsilon, t + \epsilon[\cap]0, 1])$ sont deux ouverts saturés disjoints, contenant $(x, t), (x', t)$ respectivement. Donc CX est séparé.

Si X est compact, alors CX est séparé et $X \times [0, 1]$ est compact. Comme la projection canonique est continue, CX est compact.



II Considérons le sous-espace R'_n de R_n , réunion de $[-2, 4n-2] \times \{-2, +2\}$, de $\{-2, 4n-2\} \times [-2, +2]$, et de $\{4k-2\} \times [-2, +2]$ pour $k = 1, \dots, n-1$. Un carré privé d'un disque ouvert de centre le centre du carré, et contenu dans ce carré, se rétracte par déformation forte (radialement) sur le bord du carré. Donc R_n se rétracte par déformation forte sur R'_n .

Notons Δ'_n l'espace topologique quotient de R'_n par la relation d'équivalence engendrée par $(x, -2) \sim (x, 2)$ pour tout x dans $[-2, 4n-2]$ et $(-2, y) \sim (4n-2, y)$ pour tout y dans $[-2, 2]$. Comme la rétraction de R_n sur R'_n est compatible avec les relations d'équivalences, l'espace Δ_n se rétracte par déformation forte sur Δ'_n . Or Δ'_n est homéomorphe à un graphe, composé d'un bouquet de deux cercles c', c'' correspondant aux segments verticaux $\{-2, 4n-2\} \times [-2, +2]$ et horizontaux $[-2, 4n-2] \times \{-2, +2\}$ respectivement de R'_n , et de $n-1$ cercles c_1, \dots, c_{n-1} (correspondant aux segments verticaux $\{4k-2\} \times [-2, +2]$ pour $k = 1, \dots, n-1$), qui sont recollés en un point sur c'' . Donc Δ'_n a le même type d'homotopie qu'un bouquet de $n+1$ cercles. Par conséquent, $\pi_1(\Delta_n) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}$ est un groupe libre de rang $n+1$.

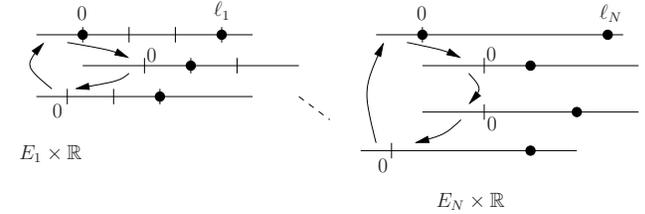
III (1) Comme E est discret et fini, il est compact. Donc CE est compact, donc $CE \times \mathbb{R}$ est localement compact. Si $n(x, t) = (x, t)$, alors en regardant les

deuxièmes composantes, on a $t = t + n$, donc $n = 0$. Donc l'action est libre. Si K est un compact de $CE \times \mathbb{R}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $K \subset CE \times [-N, N]$. Si $|n| \geq 2N+1$, alors $nK \cap K$ est vide. Donc l'action est propre.

(2) Les espaces CE et \mathbb{R} sont contractiles, donc leur produit $CE \times \mathbb{R}$ aussi. Comme $CE \times \mathbb{R}$ est localement compact et \mathbb{Z} agit librement et proprement sur $CE \times \mathbb{R}$, le groupe fondamental du quotient Ω est donc isomorphe à \mathbb{Z} .

Voici autre manière de voir cela, qui sera utile pour la suite. En considérant la rétraction par déformation forte du cône CE sur son sommet u_0 construite en I.1, l'espace $CE \times \mathbb{R}$ se rétracte par déformation forte sur $\{u_0\} \times \mathbb{R}$, de manière équivariante pour l'action de \mathbb{Z} . L'espace Ω se rétracte donc par déformation forte sur le cercle $\alpha_0 = \mathbb{Z} \cdot \{u_0\} \times \mathbb{R}$.

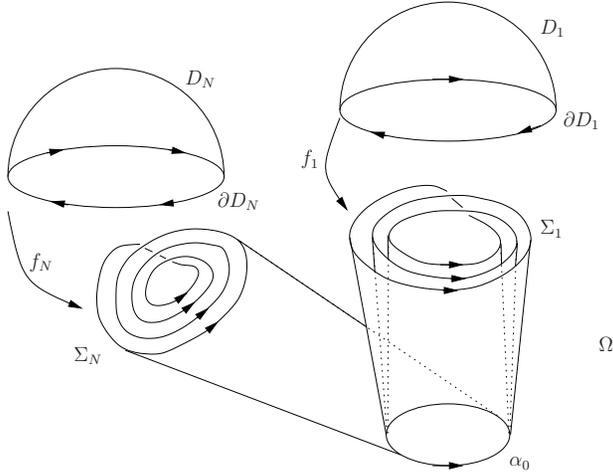
(3) Comme E est discret, l'espace $E \times \mathbb{R}$ possède $\text{Card}(E)$ composantes connexes, qui sont homéomorphes à \mathbb{R} . Comme l'image par une application continue d'un espace connexe est connexe, l'espace $\partial\Omega$ possède un nombre fini de composantes connexes.



Plus précisément, la permutation σ de E est un produit de cycles $\sigma_1, \dots, \sigma_N$ de longueur $\ell_1, \dots, \ell_N \in \{1, \dots, \text{Card}(E)\}$ dont les supports E_1, \dots, E_N sont deux à deux disjoints. Chaque partie $E_i \times \mathbb{R}$ est préservée par l'action de \mathbb{Z} , et son quotient est un cercle Σ_i de longueur ℓ_i . De plus, comme E est une partie finie discrète de CE , les cercles Σ_i ont des voisinages deux à deux disjoints. Donc les Σ_i sont les composantes connexes de $\partial\Omega$.

(4) L'espace Ω est compact. En effet, il est séparé, car quotient d'un espace localement compact par une action propre et libre d'un groupe discret, et c'est l'image du compact $CE \times [0, 1]$ par la projection canonique $(CE \times \mathbb{R}) \rightarrow \Omega$, qui est continue. Les espaces Ω et $\prod_{i=1}^N D_i$ sont compacts, donc normaux. Le sous-espace $\prod_{i=1}^N \partial D_i$ est fermé dans $\prod_{i=1}^N D_i$. Par un exercice bien connu, le recollement $\widehat{\Omega}_1$ est normal, donc séparé.

Comme les f_i sont des homéomorphismes, la restriction de la projection canonique à D_i est continue, injective, donc est un homéomorphisme sur son image, car D_i est compact et $\widehat{\Omega}_1$ est séparé. Dans la suite, on identifie donc D_i avec son image dans $\widehat{\Omega}_1$.



En particulier, l'intérieur U_1 de D_1 est un ouvert connexe par arcs de $\widehat{\Omega}_1$. Le complémentaire V dans $\widehat{\Omega}_1$ de l'origine de D_i est aussi un ouvert connexe par arcs de $\widehat{\Omega}_1$. L'intersection $U \cap V$, qui est D_i privé de son origine, est aussi connexe par arcs. On fixe un point base dans $U \cap V$. Par le théorème de van Kampen, on a donc $\pi_1(\widehat{\Omega}_1) = \pi_1(U) *_{\pi_1(U \cap V)} \pi_1(V)$. Or U est contractile, et V se rétracte par déformation forte sur $\widehat{\Omega}_1$ privé de l'intérieur de D_1 .

Notons $E' = E - E_1$. Le sous-espace $CE' \times \mathbb{R}$ de $CE \times \mathbb{R}$ est préservé par l'action de \mathbb{Z} . Notons Ω' son image dans Ω , et $\widehat{\Omega}'_1$ l'espace obtenu par recollement sur Ω' des disques D_i par les applications f_i pour $i = 2, \dots, N$. En utilisant la rétraction par déformation forte du cône CE_1 sur son sommet, on voit que V se rétracte par déformation forte sur $\widehat{\Omega}'_1$.

Supposons par récurrence (sur N , avec conventions évidentes pour $N = 0$) que le groupe $\pi_1(\widehat{\Omega}'_1)$ admette pour présentation $\langle x \mid x^{\ell_2} = x^{\ell_3} = \dots = x^{\ell_N} = 1 \rangle$, de sorte que x soit la classe d'homotopie du lacet image du cercle α_0 dans $\widehat{\Omega}'_1$ (comme $\pi_1(\widehat{\Omega}'_1)$ est abélien, il n'y a pas de problème de point base). Comme la classe d'homotopie du lacet Σ_1 est $\pm \ell_1$ fois celle de α_0 , le théorème de van Kampen nous dit que $\pi_1(\widehat{\Omega}_1)$ admet pour présentation $\langle x \mid x^{\ell_1} = x^{\ell_2} = x^{\ell_3} = \dots = x^{\ell_N} = 1 \rangle$. Notons $\ell = \text{pgcd}\{\ell_1, \dots, \ell_N\}$. Alors $\pi_1(\widehat{\Omega}_1) = \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$.

Pour l'application numérique, on a $N = 1$, $\ell = \ell_1 = n$, donc $\pi_1(\widehat{\Omega}_1) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Les questions (5) et (6) ne sont pas corrigées.

IV (1) Par construction, p est un homéomorphisme local et la préimage de chaque point est de cardinal 6. Donc p est un revêtement.

Le groupe diédral D_6 d'ordre 6 est isomorphe au groupe défini par la présentation $\langle \alpha, \beta \mid \alpha^2 = \beta^2 = (\alpha\beta)^3 = 1 \rangle$. On note encore α, β les éléments de D_6 correspondants. Considérons l'action (par homéomorphismes) du groupe libre engendré par α, β avec α permutant chacun des couples de sommets $\{x_1, x_6\}, \{x_2, x_3\}, \{x_4, x_5\}$, ainsi que le couple d'arêtes entre chacun de ces couples de sommets, et β permutant chacun des couples de sommets $\{x_1, x_2\}, \{x_3, x_4\}, \{x_5, x_6\}$, ainsi que le couple d'arêtes entre chacun de ces couples de sommets, (de manière à préserver les paramétrages des arêtes.) Alors par construction, cette action passe au quotient en une action de D_6 , de sorte que l'homéomorphisme f de \overline{B} correspondant à chaque élément de D_6 vérifie $p \circ f = p$. Donc le groupe des automorphismes du revêtement $p : \overline{B} \rightarrow B$ contient le groupe D_6 . Comme celui-ci agit transitivement sur la fibre au-dessus du point commun b_0 aux deux cercles de B , on en déduit que le revêtement est galoisien.

Comme tout automorphisme de revêtement qui fixe un point est l'identité (car \overline{B} est connexe), on en déduit que le groupe des automorphismes de p est D_6 .

(2) Puisque G préserve les fibres de p , l'homéomorphisme local $p : \widetilde{B} \rightarrow B$ passe au quotient en un homéomorphisme local $h : G \backslash \widetilde{B} \rightarrow B$ (vérifiant donc $h \circ \pi' = \pi$). Comme tout revêtement universel est galoisien, G agit transitivement sur les fibres, donc la préimage de chaque point est 1. Comme les espaces sont séparés et par un résultat du cours, tout homéomorphisme local à un feuillet est un homéomorphisme.

(3) L'espace B est connexe par arcs, séparé et localement contractile (donc en particulier admet bien un revêtement universel). On a identifié B et $G \backslash \widetilde{B}$, de sorte que $\pi : \widetilde{B} \rightarrow B = G \backslash \widetilde{B}$ soit la projection canonique. Par le théorème de classification des revêtements, il existe un sous-groupe H de G , tel que le revêtement $H \backslash \widetilde{B} \rightarrow B$ soit isomorphe au revêtement $p : \overline{B} \rightarrow B$. En identifiant ces deux revêtements par un tel isomorphisme, et en notant $q : \widetilde{B} \rightarrow H \backslash \widetilde{B}$ la projection canonique, on a alors $p \circ q = \pi$. Comme p est galoisien, le sous-groupe H est distingué.

De plus, pour tout $g \in G$, il existe une unique application $\psi(g) : H \backslash \widetilde{B} = \overline{B} \rightarrow H \backslash \widetilde{B} = \overline{B}$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{B} & \xrightarrow{g} & \widetilde{B} \\ q \downarrow & & \downarrow q \\ H \backslash \widetilde{B} & \xrightarrow{\psi(g)} & H \backslash \widetilde{B} \end{array}$$

Il suffit de poser $\psi(Hx) = Hgx$, ce qui ne dépend pas du choix de x , car H est distingué. Il est immédiat que $\psi(g)$ est un automorphisme de revêtement de p , et que $g \mapsto \psi(g)$ est un morphisme de groupes (car $\psi(g) \circ \psi(h)$ et $\psi(g \circ h)$ coïncident sur $H \backslash \widetilde{B}$).

Soit $h : \overline{B} \rightarrow \overline{B}$ un automorphisme de revêtement de p . Soit $x \in \widetilde{B}$ et $x' \in q^{-1}(h \circ q(x))$. Comme \widetilde{B} est localement connexe par arcs et simplement connexe, le théorème du relèvement dit qu'il existe une unique application continue $g : \widetilde{B} \rightarrow \widetilde{B}$

telle que $g(x) = x'$ et que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} & & \tilde{B} \\ g \nearrow & & \downarrow q \\ \tilde{B} & \xrightarrow{h \circ q} & \bar{B} \end{array} .$$

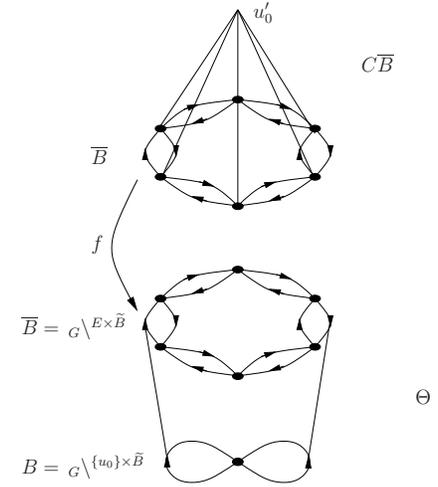
En considérant le relevé g' de $h^{-1} \circ q$ par le revêtement q tel que $g'(x') = x$, comme gg' est un morphisme de revêtement fixant un point, et que \tilde{B} est connexe, on en déduit que g est un automorphisme de revêtement de π .

(4) Comme G agit librement et proprement sur \tilde{B} , et comme CE est compact, les mêmes arguments qu'en III.1 montrent que G agit librement et proprement sur $CE \times \tilde{B}$.

(5) Comme en III.2, les espaces CE et \tilde{B} sont simplement connexes, donc leur produit $CE \times \tilde{B}$ aussi. Comme $CE \times \tilde{B}$ est localement compact et G agit librement et proprement sur $CE \times \tilde{B}$, le groupe fondamental du quotient Θ est donc isomorphe à G .

(6) Comme G agit par $y \mapsto g(y)$ sur la seconde composante, l'application continue p_{r2} passe au quotient en une application continue $G \backslash E \times \tilde{B} \rightarrow B$. Comme E est discret, cette application est un homéomorphisme local. Comme ψ est surjective, et Γ agit transitivement sur E , l'espace $G \backslash E \times \tilde{B}$ est connexe. Le cardinal de chaque fibre est égal au cardinal de E , donc est constant non vide. Donc l'application $G \backslash E \times \tilde{B} \rightarrow B$ est un revêtement.

(7) Les revêtements $G \backslash E \times \tilde{B} \rightarrow B$ et $\bar{B} \rightarrow B$ sont connexes et localement connexes par arcs, et les fibres au-dessus de x_0 sont $\pi_1(B, x_0)$ -équivariamment isomorphes. Donc ces revêtements sont isomorphes.



(8) On reprend des arguments similaires à ceux de III.4. Notons U l'image dans $\hat{\Theta}$ de $C\bar{B} - B$, qui est ouverte, et connexe par arcs. Notons V le complémentaire dans $\hat{\Theta}$ de l'image du sommet u'_0 du cône $C\bar{B}$, qui est ouvert et connexe par arcs. Par le théorème de van Kampen, comme U est contractile et $U \cap V$ connexe par arcs, si b est un point base dans $U \cap V$, alors $\pi_1(\hat{\Theta}, b)$ est isomorphe au quotient de $\pi_1(V, b)$ par le sous-groupe distingué engendré par l'image de $\pi_1(U \cap V, b)$. L'espace V se rétracte par déformation forte sur le bouquet de deux cercles $G \backslash \{u_0\} \times \tilde{B} \simeq B$ (avec u_0 le sommet du cône CE). Une petite inspection des lacets tués montre que $\pi_1(\hat{\Theta})$ admet pour présentation $\langle \alpha, \beta \mid \alpha^2 = \beta^2 = (\alpha\beta)^3 = 1 \rangle$, donc $\pi_1(\hat{\Theta})$ est isomorphe au groupe diédral D_6 .

(9) Non corrigé.

5 Homologie singulière

Avant tout, voici une petite bibliographie légèrement commentée, ces commentaires ne reflétant bien sûr que les goûts partiels de l'auteur.

- *Références élémentaires et pédagogiques* : [GH] pour l'homologie et la cohomologie singulière (définition, vérification des axiomes, caractéristique d'Euler-Poincaré, orientation, cup et cap produit, dualité de Poincaré) et [God] pour la cohomologie de de Rham (définition, vérification des axiomes, inégalités de Morses, formule de Künneth, dualité par la théorie de Hodge).
- *Le pavé* : [Spa], un livre de référence, mais pas forcément d'apprentissage.
- *Des références historiques* : pour les amateurs de préhistoire, voir [Pon] ; on peut jeter un œil aux chapitres fondateurs de [Poi] sur l'analysis situs et ses compléments, c'est bien beau ; l'introduction de [Die2] est absolument à lire, le reste de [Die2] est presque aussi complet que [Spa] et presque aussi difficile à lire ; pour les origines de la cohomologie de de Rham, voir [DeR], pour les fondements axiomatiques de l'homologie, voir [ES, CE].
- *Des références pour tous les goûts* :
 - [Vic] pour l'homologie singulière (définition, vérification des axiomes, CW-complexes, théorème des coefficients universels, formule de Künneth, cup et cap produit, dualité de Poincaré, applications).
 - Sont vraiment pas mal non plus [Bre, Wal].
 - Voir [FFG] pour les aspects plus homotopiques et les magnifiques dessins érotiques.
 - En vrac : [BT] très complet sur la cohomologie de de Rham et de Čech ; [DNF] pour comprendre les choses de manière géométrique, à la russe.
- Enfin, et non des moindres, je recommande particulièrement le livre [Hat], qui couvre le contenu de tout ce cours. Suite à un arrangement de l'auteur avec son éditeur, il est possible de télécharger le livre à l'adresse <http://www.math.cornell.edu/~hatcher>

5.1 Un peu d'algèbre homologique

On renvoie par exemple à [Spa, ES, CE] pour des compléments d'algèbre homologique.

Soit \mathbb{A} un anneau commutatif unitaire. Par module, on entend module sur \mathbb{A} . On rappelle que les modules sur l'anneau \mathbb{Z} sont les groupes abéliens, et les modules sur un corps sont les espaces vectoriels. On rappelle qu'une suite finie ou infinie de morphismes de modules

$$\dots \rightarrow M_n \xrightarrow{f_n} M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} M_{n+2} \rightarrow \dots$$

est *exacte* si $\ker f_{n+1} = \text{im } f_n$ pour tout n tel que f_{n+1} et f_n sont définis.

Complexes de chaînes et homologie de complexes de chaînes

Un *complexe de chaînes* $C = (C_*, \partial_*)$ est une suite de modules $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et de morphismes de modules $(\partial_{n+1} : C_{n+1} \rightarrow C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tels que $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ pour tout entier n .

On posera souvent par convention $C_{-1} = 0$ et $\partial_0 = 0$. On notera par abus $\partial = \partial_n$ lorsque l'indice n est sous-entendu. On appelle les ∂_n les *morphismes de bord* (ou opérateurs bords) de C .

$$C_0 \xleftarrow{\partial} C_1 \xleftarrow{\partial} C_2 \xleftarrow{\partial} \dots \xleftarrow{\partial} C_{n-1} \xleftarrow{\partial} C_n \xleftarrow{\partial} \dots$$

Un *morphisme de complexes de chaînes* $\phi : C \rightarrow D$ est une suite de morphismes de modules $(\phi_n : C_n \rightarrow D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\phi_n \circ \partial_{n+1} = \partial_{n+1} \circ \phi_{n+1}$ pour tout entier n , ou autrement dit tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccccc} C_0 & \xleftarrow{\partial} & C_1 & \xleftarrow{\partial} & \dots & \xleftarrow{\partial} & C_{n-1} & \xleftarrow{\partial} & C_n & \xleftarrow{\partial} & \dots \\ \downarrow \phi_0 & & \downarrow \phi_1 & & \dots & & \downarrow \phi_{n-1} & & \downarrow \phi_n & & \dots \\ D_0 & \xleftarrow{\partial} & D_1 & \xleftarrow{\partial} & \dots & \xleftarrow{\partial} & D_{n-1} & \xleftarrow{\partial} & D_n & \xleftarrow{\partial} & \dots \end{array}$$

Si C est un complexe de chaînes, on appelle *morphisme identité*, et on note $id : C \rightarrow C$, le morphisme de complexes de chaînes ($id : C_n \rightarrow C_n$) $_{n \in \mathbb{N}}$. Si $\phi : C \rightarrow D$ et $\psi : D \rightarrow E$ sont des morphismes de complexes de chaînes, on appelle *morphisme composé*, et on note $\psi \circ \phi : C \rightarrow E$, le morphisme de complexes de chaînes $(\psi_n \circ \phi_n : C_n \rightarrow E_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Si C est un complexe de chaînes, le sous-module de C_n

$$Z_n(C) = \ker(\partial : C_n \rightarrow C_{n-1})$$

est appelé l'*espace des n -cycles*, le sous-module de C_n

$$B_n(C) = \text{im}(\partial : C_{n+1} \rightarrow C_n)$$

est appelé l'*espace des n -bords*, et le module quotient

$$H_n(C) = Z_n(C)/B_n(C)$$

est appelé le *n -ème groupe d'homologie* de C . Il s'agit là de la terminologie usuelle, l'ensemble $H_n(C)$ étant bien sûr muni de sa structure de module sur \mathbb{A} . Il sera aussi noté $H_*(C)$ lorsque l'on ne veut pas préciser la valeur de $*$ dans \mathbb{N} , ou parfois si l'on considère la somme directe des $H_n(C)$. Si c est un n -cycle, on note souvent $[c]$ son image dans $H_n(C)$.

Ce module mesure l'obstruction d'un cycle à être un bord (un n -cycle étant un bord si et seulement si son image dans $H_n(C)$ est nulle), ou l'obstruction de la suite

$$C_0 \xleftarrow{\partial} C_1 \xleftarrow{\partial} C_2 \xleftarrow{\partial} \dots \xleftarrow{\partial} C_n \xleftarrow{\partial} C_{n+1} \xleftarrow{\partial} \dots$$

à être exacte (i.e. à vérifier $\ker \partial_n = \text{im } \partial_{n+1}$ pour tout n).

Un morphisme de complexes de chaînes $\phi : C \rightarrow D$ envoie cycles sur cycles et bords sur bords en chaque degré, donc induit, pour tout entier n , un morphisme de modules

$$\boxed{\phi_* : H_n(C) \rightarrow H_n(D)}.$$

Le résultat suivant donne un critère pour savoir si deux morphismes de complexes de chaînes induisent les mêmes applications en homologie.

Soient $\phi, \psi : C \rightarrow D$ deux morphismes de complexes de chaînes. Une *homotopie* entre ϕ et ψ est une suite de morphismes de modules $(K_n : C_n \rightarrow D_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ telle que, pour tout entier n , en posant $K_{-1} = 0$,

$$\phi_n - \psi_n = \partial_{n+1} \circ K_n + K_{n-1} \circ \partial_n.$$

Le diagramme suivant n'est pas commutatif, mais il est là pour montrer dans quel sens vont les flèches.

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & C_{n-1} & \xleftarrow{\partial} & C_n & \xleftarrow{\partial} & C_{n+1} & \dots \\ & & \searrow^{K_{n-1}} & \phi \downarrow \downarrow \psi & \searrow^{K_n} & & \\ \dots & D_{n-1} & \xleftarrow{\partial} & D_n & \xleftarrow{\partial} & D_{n+1} & \dots \end{array}$$

Proposition 5.1 Soient $\phi, \psi : C \rightarrow D$ deux morphismes de complexes de chaînes. S'il existe une homotopie entre ϕ et ψ , alors

$$\phi_* = \psi_* : H_*(C) \rightarrow H_*(D).$$

Démonstration. Si c est un cycle de C_n , alors $\phi_n(c) - \psi_n(c) = \partial(K_n(c))$, donc les classes $[\phi_n(c)]$ et $[\psi_n(c)]$ sont égales dans $H_n(D)$. \square

Suite exacte longue d'homologie

Une *suite exacte* (courte) de complexes de chaînes est la donnée notée

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \longrightarrow 0$$

de complexes de chaînes C, D, E et de morphismes de complexes de chaînes $f : C \rightarrow D, g : D \rightarrow E$ tels que pour tout n , la suite de morphismes de modules

$$0 \longrightarrow C_n \xrightarrow{f_n} D_n \xrightarrow{g_n} E_n \longrightarrow 0$$

est exacte.

Étant données deux suites exactes de complexes de chaînes, un *morphisme de suites exactes de complexes de chaînes* est un triplet (α, β, γ) de morphismes de complexes de chaînes tel que le diagramme suivant est commutatif en tout degré n :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C & \xrightarrow{f} & D & \xrightarrow{g} & E & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \\ 0 & \longrightarrow & C' & \xrightarrow{f'} & D' & \xrightarrow{g'} & E' & \longrightarrow & 0 \end{array} .$$

On appelle *morphisme identité* le morphisme de suites exactes de complexes de chaînes (id, id, id) . On appelle *morphisme composé* des morphismes de suites exactes de complexes de chaînes (α, β, γ) et $(\alpha', \beta', \gamma')$ le morphisme de suites exactes de complexes de chaînes $(\alpha' \circ \alpha, \beta' \circ \beta, \gamma' \circ \gamma)$.

Théorème 5.2 Si $0 \longrightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \longrightarrow 0$ est une suite exacte (courte) de complexes de chaînes, il existe une suite exacte (longue) de modules

$$\dots \longrightarrow H_{n+1}(E) \xrightarrow{\delta} H_n(C) \xrightarrow{f_*} H_n(D) \xrightarrow{g_*} H_n(E) \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(C) \longrightarrow \dots$$

telle que si (α, β, γ) est un morphisme de suites exactes de complexes de chaînes comme ci-dessus, alors le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H_n(C) & \xrightarrow{f_*} & H_n(D) & \xrightarrow{g_*} & H_n(E) & \xrightarrow{\delta} & H_{n-1}(C) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow \alpha_* & & \downarrow \beta_* & & \downarrow \gamma_* & & \downarrow \alpha_* & & \\ \dots & \longrightarrow & H_n(C') & \xrightarrow{f'_*} & H_n(D') & \xrightarrow{g'_*} & H_n(E') & \xrightarrow{\delta} & H_{n-1}(C') & \longrightarrow & \dots \end{array} .$$

Démonstration. (1) Construisons tout d'abord le morphisme $\delta : H_n(E) \rightarrow H_{n-1}(C)$. Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\ 0 & \longrightarrow & C_n & \xrightarrow{f_n} & D_n & \xrightarrow{g_n} & E_n & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \\ 0 & \longrightarrow & C_{n-1} & \xrightarrow{f_{n-1}} & D_{n-1} & \xrightarrow{g_{n-1}} & E_{n-1} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \end{array} .$$

Soit z un n -cycle de E . Il s'agit de lui associer un $(n-1)$ -cycle x de C (bien défini modulo un bord). Comme g_n est surjective, il existe $y \in D_n$ tel que $g_n(y) = z$. On considère $\partial y \in D_{n-1}$. Comme $g_{n-1}(\partial y) = \partial g_n(y) = \partial z = 0$, par exactitude, il existe $x \in C_{n-1}$ tel que $f_{n-1}(x) = \partial y$. On pose donc

$$\delta[z] = [x].$$

Vérifions que δ est bien défini. Tout d'abord, x est bien un cycle, car

$$f_{n-2}(\partial x) = \partial f_{n-1}(x) = \partial \partial y = 0,$$

et comme f_{n-2} est injective, on en déduit que $\partial x = 0$.

De plus, $[x]$ ne dépend pas des choix du représentant x de $[z]$ et des éléments y, x comme ci-dessus. En effet, si (z', y', x') est un autre choix, alors comme $[z'] = [z]$, on a $z' - z = \partial z''$ avec $z'' \in E_{n+1}$. Soit $y'' \in D_{n+1}$ tel que $z'' = g_{n+1}(y'')$, qui existe par surjectivité de g_{n+1} . Alors

$$g_n(y' - y - \partial y'') = z' - z - \partial z'' = 0,$$

donc par exactitude, il existe $x'' \in C_n$ tel que $y' - y - \partial y'' = f_n(x'')$. Comme

$$f_{n-1}(x' - x - \partial x'') = \partial y' - \partial y - \partial f_n(x'') = \partial \partial y'' = 0,$$

par injectivité de f_{n-1} , on a $x' = x + \partial x''$, donc $[x'] = [x]$.

(2) Vérifions l'exactitude au niveau de $H_n(D)$.

Comme $g_* \circ f_* = (g \circ f)_* = 0$, on a $\text{im } f_* \subset \ker g_*$.

Réciproquement, soit $[y] \in \ker g_*$. Comme $0 = g_*([y]) = [g_n(y)]$, il existe $z \in E_{n+1}$ tel que $g_n(y) = \partial z$. Par surjectivité de g_{n+1} , il existe $y' \in D_{n+1}$ tel que $z = g_{n+1}(y')$. Comme $g_n(y - \partial y') = 0$, par exactitude, il existe $x \in C_n$ tel que $y - \partial y' = f_n(x)$. De plus, x est un cycle, car

$$f_{n-1}(\partial x) = \partial f_n(x) = \partial y - \partial \partial y' = 0$$

car y est un cycle. Enfin, $f_*([x]) = [f_n(x)] = [y]$, donc $[y] \in \text{im } f_*$.

(3) Vérifions l'exactitude au niveau de $H_n(E)$.

Montrons que $\text{im } g_* \subset \ker \delta$. Si y est un n -cycle de D , par construction de δ , on a $\delta([g_n(y)]) = [x]$ où $f_{n-1}(x) = \partial y$. Comme y est un cycle et f_{n-1} est injective, on a donc $\delta \circ g_* = 0$, ce qui prouve le résultat.

Réciproquement, montrons que $\ker \delta \subset \text{im } g_*$. Soit z un n -cycle de E tel que $\delta([z]) = 0$. Par construction, il existe $y \in D_n$ et $x \in C_{n-1}$ tels que $z = g_n(y)$ et $f_{n-1}(x) = \partial y$ et $[x] = \delta([z]) = 0$. Soit $x' \in C_n$ tel que $x = \partial x'$. On pose $y' = y - f_n(x')$, qui est un n -cycle de D . Alors $g_n(y') = z$, donc $g_*([y']) = [z]$, ce qui montre le résultat.

Les autres vérifications sont laissées en exercice. \square

Caractéristique d'Euler-Poincaré d'un complexe de chaînes

Dans cette partie, on suppose que \mathbb{A} est un corps. Soit C un complexe de chaînes. On note β_k la dimension sur \mathbb{A} de l'espace vectoriel $H_k(C)$, qui s'appelle le k -ème nombre de Betti de C . Si les β_k sont finis pour tout k et nuls pour k assez grand, alors on pose

$$\chi(C) = \sum_{k \in \mathbb{N}} (-1)^k \beta_k,$$

que l'on appelle la *caractéristique d'Euler-Poincaré* de C .

Proposition 5.3 Si C est complexe de chaînes, si la dimension γ_k de l'espace vectoriel C_k est finie pour tout k et nulle pour k assez grand, alors

$$\chi(C) = \sum_{k \in \mathbb{N}} (-1)^k \gamma_k.$$

Démonstration. En posant $Z_k = Z_k(C)$ et $B_k = B_k(C)$, comme $\gamma_k = \dim B_{k-1} + \dim Z_k$, les hypothèses entraînent que $\beta_k = \dim Z_k - \dim B_k$ est fini, et nul pour k assez grand. En particulier $\chi(C)$ est bien définie. Comme $\beta_k - \gamma_k = -(\dim B_k + \dim B_{k-1})$, une sommation alternée donne le résultat. \square

Complexes de cochaînes, cohomologie, suite exacte longue de cohomologie

Un *complexe de cochaînes* $C = (C^*, \partial^*)$ est une suite de modules $(C^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et de morphismes de modules $(\partial^n : C^n \rightarrow C^{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ tels que $\partial^{n+1} \circ \partial^n = 0$ pour tout entier n . Les ∂^n sont appelés *morphismes de cobord* (ou différentielles), et notés ∂ quand n est sous-entendu. On pose par convention $C^{-1} = 0$ et $\partial^{-1} = 0$.

$$C^0 \xrightarrow{\partial} C^1 \xrightarrow{\partial} C^2 \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} C^n \xrightarrow{\partial} C^{n+1} \xrightarrow{\partial} \dots$$

On définit de même

- un *morphisme de complexes de cochaînes* $f : C \rightarrow D$, qui est une suite de morphismes de modules $(f^n : C^n \rightarrow D^n)_{n \in \mathbb{N}}$ tels que $f^{n+1} \circ \partial^n = \partial^n \circ f^n$ pour tout entier n ;
- l'*espace des n -cocycles* $Z^n(C) = \ker(\partial : C^n \rightarrow C^{n+1})$, l'*espace des n -cobords* $B^n(C) = \text{im}(\partial : C^{n-1} \rightarrow C^n)$, le *n -ème groupe de cohomologie* de C (qui est un module) $H^n(C) = Z^n(C)/B^n(C)$;
- l'application $f^* : H^n(C) \rightarrow H^n(D)$ induite en cohomologie par un morphisme de complexes de cochaînes $f : C \rightarrow D$ (avec $f^*([z]) = [f^n(z)]$ si z est un n -cocycle de D);
- une homotopie entre complexes de cochaînes;
- la caractéristique d'Euler-Poincaré d'un complexes de cochaînes;
- une suite exacte courte de complexes de cochaînes;
- un morphisme de suites exactes courtes de complexes de cochaînes;
- la suite exacte longue de cohomologie associée à une suite exacte courte de complexes de cochaînes (dont l'énoncé précis suit).

Théorème 5.4 Si $0 \rightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \rightarrow 0$ est une suite exacte courte de complexes de cochaînes, il existe une suite exacte longue de modules

$$\dots \rightarrow H^{n-1}(E) \xrightarrow{\delta} H^n(C) \xrightarrow{f^*} H^n(D) \xrightarrow{g^*} H^n(E) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(C) \rightarrow \dots$$

telle que si (α, β, γ) est un morphisme de suites exactes de complexes de cochaînes, alors le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & H^n(C) & \xrightarrow{f^*} & H^n(D) & \xrightarrow{g^*} & H^n(E) & \xrightarrow{\delta} & H^{n+1}(C) & \rightarrow & \dots \\ & & \downarrow \alpha^* & & \downarrow \beta^* & & \downarrow \gamma^* & & \downarrow \alpha_* & & \\ \dots & \rightarrow & H^n(C') & \xrightarrow{f'^*} & H^n(D') & \xrightarrow{g'^*} & H^n(E') & \xrightarrow{\delta} & H^{n+1}(C') & \rightarrow & \dots \end{array} \quad \square$$

Catégories et foncteurs

Une *catégorie* est la donnée

1. d'une collection d'ensembles (appelés *objets*),
2. pour tout couple d'objets (X, Y) d'un ensemble $\text{Mor}(X, Y)$ (dont les éléments sont appelés les *morphismes*),
3. pour tout triplet d'objets (X, Y, Z) d'une application

$$\text{Mor}(X, Y) \times \text{Mor}(Y, Z) \rightarrow \text{Mor}(X, Z)$$

appelée *composition* et notée $(f, g) \mapsto g \circ f$,

vérifiant les propriétés suivantes :

- a) associativité : $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ pour tous f, g, h ,
- b) existence d'éléments neutres : pour tout objet X , il existe un élément i_X dans $\text{hom}(X, X)$ tel que $i_X \circ f = f$ et $f \circ i_X = f$ pour tout f .

Un tel élément neutre i_X est unique. Un morphisme $f \in \text{Mor}(X, Y)$ est appelé un *isomorphisme* s'il existe un morphisme $g \in \text{Mor}(Y, X)$ tel que $g \circ f = \text{id}_X$ et $f \circ g = \text{id}_Y$. Un isomorphisme d'un objet X dans lui-même est appelé un *automorphisme*. Deux objets sont *isomorphes* s'il existe un isomorphisme entre eux. « Être isomorphe à » est une relation d'équivalence sur tout ensemble d'objets d'une catégorie.

On donne ci-dessous une liste d'exemples, dont de nombreux sont construits dans ce cours, en ne précisant pas la composition si elle est évidente, et en laissant les vérifications des propriétés a), b) au lecteur.

Exemples :

- la catégorie dont les objets sont les ensembles, les morphismes sont les applications, et la composition est la composition des applications ;
- la catégorie des groupes et des morphismes de groupes ;
- la catégorie des modules (sur un anneau fixé) et des morphismes de modules ;
- la catégorie des espaces topologiques et des applications continues ;
- la catégorie des groupes topologiques et des morphismes continus de groupes ;
- la catégorie des CW-complexes et des applications cellulaires ;
- la catégorie des paires d'espaces topologiques (X, A) (avec X un espace topologique et A un sous-espace de X) et des applications continues de paires $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ (avec $f : X \rightarrow Y$ continue telle que $f(A) \subset B$) ;
- la catégorie des revêtements d'un espace topologique donné B et des morphismes de revêtements au-dessus de B ;
- la catégorie des revêtements et des morphismes de revêtements ;
- la catégorie des complexes de chaînes et des morphismes de complexes de chaînes ;
- la catégorie des complexes de cochaînes et des morphismes de complexes de cochaînes ;
- la catégorie des suites exactes courtes de complexes de chaînes et des morphismes de suites exactes courtes de complexes de chaînes.

Si \mathcal{C}, \mathcal{D} sont deux catégories, un *foncteur covariant* de \mathcal{C} dans \mathcal{D} est la donnée pour tout objet X de \mathcal{C} d'un objet $F(X)$ de \mathcal{D} , et pour tout morphisme $f \in \text{Mor}(X, Y)$ de \mathcal{C} d'un morphisme $F(f) \in \text{Mor}(F(X), F(Y))$ de \mathcal{D} tels que

1. $F(i_X) = i_{F(X)}$,
2. $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ pour tous f, g .

Un *foncteur contravariant* est la donnée pour tout objet X de \mathcal{C} d'un objet $F(X)$ de \mathcal{D} , et pour tout morphisme $f \in \text{Mor}(X, Y)$ de \mathcal{C} d'un morphisme $F(f) \in \text{Mor}(F(Y), F(X))$ de \mathcal{D} tels que

1. $F(i_X) = i_{F(X)}$,
2. $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$ pour tous f, g .

Exemple.

- le foncteur (covariant) "groupe fondamental", de la catégorie des espaces topologiques pointés dans la catégorie des groupes ;
- les foncteurs (covariants) "cône" et "suspension" de la catégorie des espaces topologiques dans elle-même (voir l'appendice, fin de la partie A.2) ;
- le foncteur (covariant) "homologie" de la catégorie des complexes de chaînes dans la catégorie des suites de modules sur un anneau A donné (ou dans la catégorie des modules gradués sur A) ;
- le foncteur (covariant) de la catégorie des suites exactes courtes de complexes de chaînes dans celle des suites exactes longues de modules (voir le théorème 5.2) ;
- le foncteur (covariant) "cohomologie" de la catégorie des complexes de cochaînes dans la catégorie des suites de modules sur un anneau A donné (ou dans la catégorie des modules gradués) ;
- le foncteur (covariant) de la catégorie des suites exactes courtes de complexes de cochaînes dans celle des suites exactes longues de modules (voir le théorème 5.4).

On termine cette partie sur des éléments d'algèbre homologique par un exercice d'algèbre linéaire.

Exercice E.51 (Lemme des cinq) On considère le diagramme commutatif suivant de modules, dont les flèches sont des morphismes de modules, et dont les lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & D & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & D' & \longrightarrow & E' \end{array} .$$

Si les première, seconde, quatrième et cinquième flèches verticales sont des isomorphismes, alors la troisième aussi.

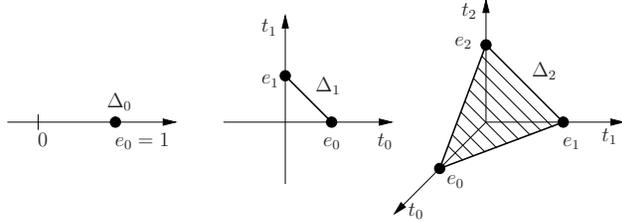
5.2 Construction et propriétés axiomatiques de l'homologie singulière

On fixe un anneau commutatif unitaire \mathbb{A} , appelé *anneau des coefficients*. On note comme d'habitude 0 son élément nul, 1 son élément neutre et $-x$ l'opposé de l'élément x . Par *module*, on entend module sur l'anneau \mathbb{A} . Si $\mathbb{A} = \mathbb{Z}$, les modules sont les groupes abéliens, et les morphismes de modules les morphismes de groupes abéliens. Pour des raisons profondes (le théorème des coefficients universels), l'exemple $\mathbb{A} = \mathbb{Z}$ est fondamental. C'est pour cela, et pour des raisons historiques, qu'on emploie la terminologie de "groupe d'homologie" au lieu de "module d'homologie".

Chaînes singulières

Pour p dans \mathbb{N} , la p -simplexe standard (ordonné) Δ_p est l'enveloppe convexe affine dans \mathbb{R}^{p+1} des vecteurs de la base canonique (e_0, e_1, \dots, e_p) :

$$\Delta_p = \{(t_0, \dots, t_p) \in \mathbb{R}^{p+1} : t_i \geq 0 \text{ et } \sum t_i = 1\}.$$



Si X est un espace topologique, un p -simplexe singulier de X est une application continue

$$\sigma : \Delta_p \rightarrow X.$$

Les 0-simplexes singuliers s'identifient aux points de X , et les 1-simplexes singuliers aux chemins dans X (en utilisant l'unique application affine de $[0, 1]$ sur Δ_1 envoyant $0 \in [0, 1]$ sur $e_0 = (1, 0) \in \Delta_1$, qui est $t \mapsto (1-t, t)$).

On note $C_p(X) = C_p(X, \mathbb{A})$ le module libre de base l'ensemble des p -simplexes singuliers de X . Un élément de $C_p(X)$ s'appelle une p -chaîne singulière (ou chaîne singulière), à coefficients dans \mathbb{A} , lorsque l'on veut préciser l'anneau des coefficients. Elle est de la forme

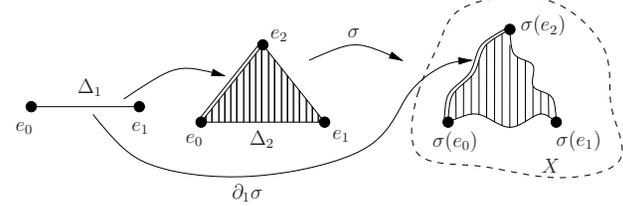
$$\sum_{i=1}^k n_i \sigma_i$$

avec $k \in \mathbb{N}$, σ_i des p -simplexes singuliers et $n_i \in \mathbb{A}$.

Si σ est un p -simplexe singulier avec $p \geq 1$ et i un entier avec $0 \leq i \leq p$, la i -ème face de σ est le $(p-1)$ -simplexe singulier $\partial_i \sigma$ défini par

$$\partial_i \sigma(t_0, \dots, t_{p-1}) = \sigma(t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{p-1}).$$

Donc $\partial_i \sigma$ est la composée de σ et de l'unique application affine $\Delta_{p-1} \rightarrow \Delta_p$ qui envoie sommet sur sommet en préservant l'ordre et en omettant le i -ème sommet.



Le bord $\partial \sigma$ d'un p -simplexe singulier est la $(p-1)$ -chaîne singulière

$$\partial \sigma = \sum_{i=0}^p (-1)^i \partial_i \sigma \in C_{p-1}(X).$$

Par linéarité, l'ensemble des p -simplexes singuliers étant une base de $C_p(X)$, ceci définit un morphisme de groupes, appelé *morphisme de bord*

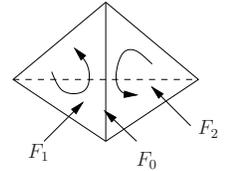
$$\partial : C_p(X) \rightarrow C_{p-1}(X).$$

Il n'y a pas de (-1) -simplexe singulier, donc $C_{-1}(X) = \{0\}$ et $\partial : C_0(X) \rightarrow C_{-1}(X)$ est l'application nulle.

Lemme 5.5

$$\partial \circ \partial = 0.$$

L'idée derrière le calcul suivant est que si F_1, F_2 sont deux faces distinctes de codimension 1 de δ_p , dont les sommets sont ordonnés par l'ordre induit sur les sommets de Δ_p , alors F_1, F_2 se rencontrent en une face F_0 de codimension 2, et les ordres induits sur les sommets de F_0 par ceux de F_1, F_2 ont des signatures opposées.



Démonstration. Il suffit de montrer que $\partial(\partial \sigma) = 0$ pour tout p -simplexe σ . Si σ est un p -simplexe, et $j < i$, alors on vérifie que

$$\partial_j \partial_i \sigma = \partial_{i+1} \partial_j \sigma : (t_0, \dots, t_{p-2}) \mapsto \sigma(t_0, \dots, t_{j-1}, 0, t_j, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{p-2}).$$

Donc

$$\begin{aligned} \partial(\partial \sigma) &= \sum_{i=0}^p (-1)^i \partial(\partial_i \sigma) = \sum_{i=0}^p (-1)^i \sum_{j=0}^{p-1} (-1)^j \partial_j(\partial_i \sigma) = \\ &= \sum_{0 \leq j < i \leq p} (-1)^{i+j} \partial_j(\partial_i \sigma) + \sum_{0 \leq i \leq j \leq p-1} (-1)^{i+j} \partial_{i-1} \partial_j \sigma \end{aligned}$$

et le changement d'indice $i' = j, j' = i - 1$ dans la première somme montre que $\partial(\partial\sigma) = 0$. \square

On obtient donc un complexe de chaînes, appelé *complexe de chaînes singulières* (à coefficients dans \mathbb{A}),

$$C_0(X) \xleftarrow{\partial} C_1(X) \xleftarrow{\partial} \dots \xleftarrow{\partial} C_{n-1}(X) \xleftarrow{\partial} C_n(X) \xleftarrow{\partial} \dots$$

Ses n -cycles sont appelés les *n -cycles singuliers* de X (à coefficients dans \mathbb{A}), et leur ensemble est noté

$$Z_n(X) = Z_n(X, \mathbb{A}) = \ker\{\partial : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)\}.$$

Ses n -bords sont appelés les *n -bords singuliers* de X (à coefficients dans \mathbb{A}), et leur ensemble est noté

$$B_n(X) = B_n(X, \mathbb{A}) = \text{im}\{\partial : C_{n+1}(X) \rightarrow C_n(X)\}.$$

Son n -ème groupe d'homologie, qui est un module, s'appelle le n -ème groupe d'*homologie singulière* de X à coefficients dans \mathbb{A} , et est noté $H_n(X)$, ou $H_n(X, \mathbb{A})$ lorsque l'on veut préciser les coefficients, bien souvent $\mathbb{A} = \mathbb{Z}$.

$$\boxed{H_n(X) = H_n(X, \mathbb{A}) = Z_n(X)/B_n(X)}$$

Fonctorialité de l'homologie singulière

Si $f : X \rightarrow Y$ est une application continue, et σ un n -simplexe singulier de X , alors $f \circ \sigma$ est un n -simplexe singulier de Y . Considérons le morphisme de modules $f_n : C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$ défini par linéarité par $f_n(\sigma) = f \circ \sigma$ pour tout n -simplexe singulier σ . Il vérifie, sur les n -simplexes singuliers de X , donc sur $C_n(X)$ par linéarité,

$$\partial \circ f_n = f_{n-1} \circ \partial.$$

Donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un morphisme de complexes de chaînes du complexes de chaînes singulières de X dans celui de Y . On vérifie que $id_n = id$ et $(f \circ g)_n = f_n \circ g_n$ pour tout n , donc on obtient un foncteur de la catégorie des espaces topologiques dans la catégorie des complexes de chaînes.

L'application continue $f : X \rightarrow Y$ induit donc, pour tout n , un morphisme de modules

$$\boxed{f_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)}.$$

Par composition de foncteurs, $H_n(\cdot)$ est donc un foncteur de la catégorie des espaces topologiques dans la catégorie des modules (i.e. des groupes abéliens si $\mathbb{A} = \mathbb{Z}$), car

$$id_* = id \quad \text{et} \quad (g \circ f)_* = g_* \circ f_*.$$

Premiers calculs d'homologie

Exemple. Homologie de l'espace réduit à un point $X = \{x\}$.

Pour tout $p \geq 0$, il y a un et un seul p -simplexe singulier $\sigma_p : \Delta_p \rightarrow X$ (l'application constante). De plus, pour $p > 0$, on a $\partial_i \sigma_p = \sigma_{p-1}$, donc

$$\partial \sigma_p = \left(\sum_{i=0}^p (-1)^i \right) \sigma_{p-1} = \begin{cases} 0 & \text{si } p \text{ impair} \\ \sigma_{p-1} & \text{sinon} \end{cases}.$$

Le complexe de chaînes singulières est donc

$$\mathbb{A} \xleftarrow{0} \mathbb{A} \xleftarrow{id} \mathbb{A} \xleftarrow{0} \mathbb{A} \xleftarrow{id} \mathbb{A} \xleftarrow{0} \mathbb{A} \xleftarrow{id} \dots$$

Par conséquent,

$$\boxed{H_n(\{x\}, \mathbb{A}) = \begin{cases} \mathbb{A} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}.$$

Proposition 5.6 Si X est un espace topologique connexe par arcs et non vide, alors

$$H_0(X, \mathbb{A}) \simeq \mathbb{A}.$$

De plus, pour tout point x de X , sa classe d'homologie $[x]$ est un générateur de $H_0(X, \mathbb{A})$.

Démonstration. On rappelle que l'on a identifié les 0-simplexes de X aux points de X . Le module $C_0(X)$ est le module libre engendré par les points de X . On considère l'unique morphisme de modules

$$\phi : C_0(X) \rightarrow \mathbb{A}$$

valant 1 sur chaque point de X , donc qui à $\sum_{i=0}^k n_i x_i$ avec $x_i \in X, n_i \in \mathbb{A}$ associe $\sum_{i=0}^k n_i$. Le morphisme ϕ est surjectif car X est non vide.

Montrons qu'une 0-chaîne singulière c est un bord si et seulement si $\phi(c)$ est nul.

Si σ est un 1-simplexe singulier, identifié avec un chemin de $[0, 1]$ dans X , alors $\partial\sigma = \sigma(1) - \sigma(0)$. Donc ϕ est nulle sur les bords de simplexes singuliers, et par linéarité, ϕ est nulle sur les bords.

Réciproquement, si $c = \sum n_i x_i$ vérifie $\phi(c) = 0$, soit σ_{x_i} un chemin (continu) de y à x_i pour y un point fixé de X . Alors

$$c = \sum n_i x_i - \left(\sum n_i \right) y = \sum n_i (x_i - y) = \sum n_i \partial \sigma_{x_i} = \partial \left(\sum n_i \sigma_{x_i} \right),$$

donc c est un bord. Comme

$$H_0(X) = C_0(X)/B_0(X),$$

le morphisme de modules ϕ induit donc un isomorphisme de $H_0(X)$ sur \mathbb{A} . \square

Exercice E.52 Si X est un espace topologique et $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$ est la famille de ses composantes connexes par arcs, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$H_n(X, \mathbb{A}) \simeq \bigoplus_{\alpha \in I} H_n(X_\alpha, \mathbb{A}).$$

En particulier, $H_0(X, \mathbb{Z})$ est le groupe abélien libre engendré par les composantes connexes par arcs de X .

Le seul espace dont on sait vraiment calculer l'homologie pour l'instant est l'espace réduit à un point. L'un des buts du chapitre qui suit est de montrer que l'on peut calculer l'homologie des espaces contractiles.

Invariance homotopique

On déduit des propriétés fonctorielles que les groupes d'homologie singulière sont des invariants topologiques, i.e. que si $f : X \rightarrow Y$ est un homéomorphisme, alors $f_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ est un isomorphisme de modules pour tout n .

La proposition impliquera que ce sont aussi des invariants homotopiques, i.e. que si $f : X \rightarrow Y$ est une équivalence d'homotopie, alors $f_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ est un isomorphisme de modules.

Proposition 5.7 Si $f, g : X \rightarrow Y$ sont homotopes, alors $f_* = g_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ pour tout n .

Démonstration. Soient $\iota : X \rightarrow X \times [0, 1]$ et $\iota' : X \rightarrow X \times [0, 1]$ définis par $\iota : x \mapsto (x, 0)$ et $\iota' : x \mapsto (x, 1)$. Si h est une homotopie entre f et g , alors $f = h \circ \iota$ et $g = h \circ \iota'$. Par functorialité, il suffit donc de montrer que $\iota_* = \iota'_*$.

D'après la partie d'algèbre homologique 5.1, il suffit de construire une homotopie $(K_p)_{p \in \mathbb{N}}$ entre $(\iota_p)_{p \in \mathbb{N}}$ et $(\iota'_p)_{p \in \mathbb{N}}$, c'est-à-dire une suite de morphismes de modules $(K_p : C_p(X) \rightarrow C_{p+1}(X \times [0, 1]))_{p \in \mathbb{N}}$ telle que $\partial \circ K_p + K_{p-1} \circ \partial = \iota_p - \iota'_p$ pour tout p (en convenant que $K_{-1} = 0$).

$$\begin{array}{ccc} C_{p-1}(X) & \xleftarrow{\partial} & C_p(X) \\ \searrow K_{p-1} & & \downarrow \iota_p - \iota'_p & \searrow K_p \end{array}$$

$$C_p(X \times [0, 1]) \xleftarrow{\partial} C_{p+1}(X \times [0, 1])$$

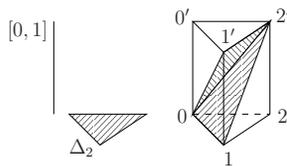
Par linéarité, il suffit de construire K_p sur les p -simplexes singuliers, et de vérifier l'égalité sur ceux-ci.

Soit $\sigma : \Delta_p \rightarrow X$ un p -simplexe singulier.

Remarque. On a une application continue

$$\sigma \times id : \Delta_p \times [0, 1] \rightarrow X \times [0, 1].$$

On va décomposer le prisme $\Delta_p \times [0, 1]$ en $(p+1)$ -simplexes. Par exemple, on décompose $\Delta_2 \times [0, 1]$ en trois tétraèdres de sommets $(0, 0', 1', 2')$, $(0, 1, 1', 2')$, $(0, 1, 2, 2')$.



Notations : Pour x_0, \dots, x_p dans \mathbb{R}^N , on note $((x_0, \dots, x_p))$ l'unique application affine de Δ_p dans \mathbb{R}^N envoyant e_k sur x_k pour $0 \leq k \leq p$. On note $(y_0, \dots, y_j, \dots, y_n)$ la suite obtenue à partir d'une suite (y_0, \dots, y_n) en omettant le terme y_j .

Si e_0, \dots, e_p sont les sommets de Δ_p , on note $a_k = (e_k, 0), b_k = (e_k, 1)$ pour $0 \leq k \leq p$ les sommets du prisme $\Delta_p \times [0, 1]$.

On pose alors

$$K_p(\sigma) = \sum_{i=0}^p (-1)^i (\sigma \times id) \circ ((a_0, \dots, a_i, b_i, \dots, b_p)) \in C_{p+1}(X \times [0, 1]).$$

Pour vérifier la propriété d'homotopie de $(K_p)_{p \in \mathbb{N}}$, on calcule

$$\begin{aligned} \partial \circ K_p(\sigma) &= \partial \left(\sum_{i=0}^p (-1)^i (\sigma \times id) \circ ((a_0, \dots, a_i, b_i, \dots, b_p)) \right) = \\ &= \sum_{j \leq i} (-1)^{i+j} (\sigma \times id) \circ ((a_0, \dots, \widehat{a}_j, \dots, a_i, b_i, \dots, b_p)) - \\ &= \sum_{j \geq i} (-1)^{i+j} (\sigma \times id) \circ ((a_0, \dots, a_i, b_i, \dots, \widehat{b}_j, \dots, b_p)). \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} K_{p+1} \circ \partial(\sigma) &= K \left(\sum_{j=0}^p (-1)^j \sigma \circ ((e_0, \dots, \widehat{e}_j, \dots, e_p)) \right) = \\ &= \sum_{i < j} (-1)^{i+j} (\sigma \times id) \circ ((a_0, \dots, a_i, b_i, \dots, \widehat{b}_j, \dots, b_p)) - \\ &= \sum_{j \geq i} (-1)^{i+j} (\sigma \times id) \circ ((a_0, \dots, \widehat{a}_j, \dots, a_i, b_i, \dots, b_p)). \end{aligned}$$

Donc

$$(\partial \circ K_p + K_{p+1} \circ \partial)(\sigma) =$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=0}^p (\sigma \times id) \circ ((a_0, \dots, a_{i-1}, b_i, \dots, b_p)) - \sum_{i=0}^p (\sigma \times id) \circ ((a_0, \dots, a_i, b_{i+1}, \dots, b_p)) \\ &= (\sigma \times id) \circ ((b_0, \dots, b_p)) - (\sigma \times id) \circ ((a_0, \dots, a_p)) = \iota \circ \sigma - \iota' \circ \sigma, \end{aligned}$$

ce qui montre le résultat. \square

Si deux espaces topologiques X, Y ont le même type d'homotopie, il existe $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow X$ continues telles que $f \circ g$ est homotope à l'application identique de X et $g \circ f$ est homotope à l'application identique de Y . Le résultat suivant découle alors du précédent par functorialité.

Corollaire 5.8 Deux espaces topologiques ayant même type d'homotopie ont leurs groupes d'homologie singulière isomorphes.

Démonstration. Si $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow X$ sont deux applications continues, telles que $f \circ g$ est homotope à l'application identique de X et $g \circ f$ est homotope à l'application identique de Y , alors par fonctorialité, $f_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ est un isomorphisme, car il admet g_* pour inverse. \square

Comme les espaces contractiles ont même type d'homotopie que le point, on a aussi, par le calcul de l'homologie du point ci-dessus :

Corollaire 5.9 *Si X est un espace contractile, alors*

$$H_n(X, \mathbb{A}) = \begin{cases} \mathbb{A} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} . \quad \square$$

Nous savons donc calculer l'homologie des espaces contractiles. Mais il existe des espaces intéressants non contractiles. La plupart d'entre eux, comme les CW-complexes, sont tout de même localement contractiles. Pour calculer l'homologie d'un espace topologique X muni d'un recouvrement $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ par ouverts contractiles, nous allons développer plusieurs outils. Le théorème des petites chaînes est l'outil qui permet de ne regarder que les simplexes singuliers dont les images sont contenues dans l'un des U_i . La suite exacte longue d'homotopie relative permet de calculer l'homologie de X à partir de l'homologie d'une partie A de X et de l'homologie relative de X par rapport à A . Le théorème d'excision permet (essentiellement) dans le calcul de l'homologie relative de X par rapport à A d'oublier l'intérieur de A . Enfin, la suite exacte longue de Mayer-Vietoris est le moyen de calculer l'homologie de la réunion de deux ouverts de X en fonction de l'homologie de chacun des ces deux ouverts, et de l'homologie de l'intersection.

Homologie relative

Une *paire* d'espaces topologiques est un couple (X, Y) avec X un espace topologique et Y un sous-espace de X . Un *morphisme de paires* d'espaces topologiques $(X, Y) \rightarrow (X', Y')$ est une application continue $f : X \rightarrow X'$ telle que $f(Y) \subset Y'$. Deux morphismes de paires $f, g : (X, Y) \rightarrow (X', Y')$ sont *homotopes* s'il existe une homotopie $h : X \times I \rightarrow X'$ entre $f : X \rightarrow X'$ et $g : X \rightarrow X'$ telle que $h(Y \times I) \subset Y'$. Deux paires d'espaces topologiques $(X, Y), (X', Y')$ ont *même type d'homotopie de paires* s'il existe des morphismes de paires $f : (X, Y) \rightarrow (X', Y')$ et $g : (X', Y') \rightarrow (X, Y)$ tels que $f \circ g$ est homotope à $id : (X', Y') \rightarrow (X', Y')$ et $g \circ f$ est homotope à $id : (X, Y) \rightarrow (X, Y)$.

Les paires d'espaces topologiques et leurs morphismes (avec la composition des applications) forment une catégorie. On identifie X et (X, \emptyset) . Si $f : (X, Y) \rightarrow (X', Y')$ est un morphisme de paires, on note aussi $f : X \rightarrow X'$ et $f : Y \rightarrow Y'$ les applications induites.

Soit (X, Y) une paire d'espaces topologiques. Le module $C_p(Y)$ s'identifie avec le sous-module de $C_p(X)$ de base l'ensemble des p -simplexes singuliers de X à valeurs dans Y . Clairement, le bord $\partial : C_p(X) \rightarrow C_{p-1}(X)$ envoie alors $C_p(Y)$ dans $C_{p-1}(Y)$.

De plus, si $f : (X, Y) \rightarrow (X', Y')$ est un morphisme de paires, alors $f_p : C_p(X) \rightarrow C_p(X')$ envoie $C_p(Y)$ dans $C_p(Y')$.

Le *complexe de chaînes singulières relatives* de (X, Y) est le complexe de chaînes de modules

$$C_p(X, Y) = C_p(X, Y; \mathbb{A}) = C_p(X)/C_p(Y)$$

et de morphismes de bord

$$\partial : C_p(X, Y) \rightarrow C_{p-1}(X, Y)$$

le morphisme quotient de $\partial : C_p(X) \rightarrow C_{p-1}(X)$. Le n -ème groupe d'homologie de ce complexe de chaînes (qui est un module) est appelé *n -ème groupe d'homologie singulière relative* de la paire (X, Y) à coefficients dans \mathbb{A} , et noté

$$H_n(X, Y) = H_n(X, Y; \mathbb{A}) .$$

Exercice E.53 *Si $Z_p(X, Y) = \{\sigma \in C_p(X) \mid \partial\sigma \in C_{p-1}(Y)\}$, montrer que $H_n(X, Y)$ est isomorphe à $Z_p(X, Y)/(B_p(X) + C_p(Y))$.*

Un morphisme de paires $f : (X, Y) \rightarrow (X', Y')$ induit par passage au quotient un morphisme de complexes de chaînes $f_p : C_p(X, Y) \rightarrow C_p(X', Y')$. Donc, par les rappels d'algèbre homologique, f induit un morphisme de modules

$$f_* : H_n(X, Y) \rightarrow H_n(X', Y')$$

L'identification $X = (X, \emptyset)$ induit une identification $C_p(X) = C_p(X, \emptyset)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Si $j : (X, \emptyset) \rightarrow (X, Y)$ est l'inclusion, alors le morphisme induit $j_p : C_p(X, \emptyset) \rightarrow C_p(X, Y)$ s'identifie avec la projection canonique $C_p(X) \rightarrow C_p(X, Y)$.

Donc, si (X, Y) est une paire d'espaces topologiques, et $i : Y \rightarrow X$ et $j : (X, \emptyset) \rightarrow (X, Y)$ sont les inclusions, alors

$$0 \longrightarrow C_*(Y) \xrightarrow{i_*} C_*(X) \xrightarrow{j_*} C_*(X, Y) \longrightarrow 0$$

est, par construction, une suite exacte courte de complexes de chaînes.

Théorème 5.10 (Suite exacte longue d'homologie singulière relative) *Pour toute paire d'espaces topologiques (X, Y) , il existe pour tout n dans \mathbb{N} un morphisme de modules*

$$\delta : H_n(X, Y) \rightarrow H_{n-1}(Y)$$

tels que

1. pour tout morphisme de paires $f : (X, Y) \rightarrow (X', Y')$, on a

$$\delta \circ f_* = f_* \circ \delta ,$$

2. si $i : Y \rightarrow X$ et $j : X = (X, \emptyset) \rightarrow (X, Y)$ sont les inclusions, alors la suite de modules et de morphismes de modules

$$\dots \longrightarrow H_{n+1}(X, Y) \xrightarrow{\delta} H_n(Y) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, Y) \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(Y) \longrightarrow \dots$$

est exacte.

Démonstration. Ceci découle immédiatement du théorème 5.2 appliqué à la suite exacte $0 \rightarrow C_*(Y) \xrightarrow{i_*} C_*(X) \xrightarrow{j_*} C_*(X, Y) \rightarrow 0$. \square

Corollaire 5.11 Si X est un espace topologique connexe par arcs, et si Y est non vide, alors

$$H_0(X, Y; \mathbb{A}) \simeq 0.$$

Démonstration. Le théorème précédent fournit une suite exacte

$$H_0(Y) \longrightarrow H_0(X) \longrightarrow H_0(X, Y) \longrightarrow 0$$

et les hypothèses impliquent que $H_0(Y) \rightarrow H_0(X)$ est surjective. \square

Exemple. Les groupes d'homologies relatives de la paire $(\mathbb{B}_{n+1}, \mathbb{S}_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ satisfont :

$$H_p(\mathbb{B}_{n+1}, \mathbb{S}_n; \mathbb{A}) \simeq \begin{cases} H_{p-1}(\mathbb{S}_n, \mathbb{A}) & \text{si } p \geq 2 \\ 0 & \text{si } p = 1, n \geq 1 \\ \mathbb{A} & \text{si } p = 1, n = 0 \\ 0 & \text{si } p = 0 \end{cases}$$

En effet, si $k \geq 1$, alors il existe une suite exacte

$$H_{k+1}(\mathbb{B}_{n+1}) \longrightarrow H_{k+1}(\mathbb{B}_{n+1}, \mathbb{S}_n) \longrightarrow H_k(\mathbb{S}_n) \longrightarrow H_k(\mathbb{B}_{n+1}),$$

et $H_{k+1}(\mathbb{B}_{n+1})$ et $H_k(\mathbb{B}_{n+1})$ sont nuls. De plus, la suite

$$H_1(\mathbb{B}_{n+1}) \longrightarrow H_1(\mathbb{B}_{n+1}, \mathbb{S}_n) \longrightarrow H_0(\mathbb{S}_n) \longrightarrow H_0(\mathbb{B}_{n+1})$$

est exacte, $H_1(\mathbb{B}_{n+1})$ est nul, et $H_0(\mathbb{S}_n) \rightarrow H_0(\mathbb{B}_{n+1})$ est un isomorphisme si $n \geq 1$ et est de noyau isomorphe à \mathbb{A} si $n = 0$.

La proposition suivante dit que l'homologie relative est un invariant d'homotopie de paires d'espaces topologiques.

Proposition 5.12 Si $f, g : (X, Y) \rightarrow (X', Y')$ sont des morphismes de paires qui sont homotopes, alors

$$f_* = g_* : H_n(X, Y) \rightarrow H_n(X', Y').$$

Deux paires d'espaces topologiques qui ont même type d'homotopie de paires ont leurs homologies relatives isomorphes : si $f : (X, Y) \rightarrow (X', Y')$ est une équivalence d'homotopie de paires, alors $f_* : H_n(X, Y) \rightarrow H_n(X', Y')$ est un isomorphisme pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. L'homotopie $(K_p)_{p \in \mathbb{N}}$ entre $(t_p)_{p \in \mathbb{N}}$ et $(t'_p)_{p \in \mathbb{N}}$ construite dans la preuve de la proposition 5.7 passe au quotient. La seconde assertion se montre alors comme dans le cas des espaces topologiques (voir corollaire 5.8). \square

Théorème des petites chaînes

Soit X un espace topologique et $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ une famille de parties de X dont les intérieurs recouvrent X :

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i^\circ.$$

On construit un complexe de chaînes, appelé *complexe des chaînes \mathcal{U} -petites*, de la manière suivante. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, le module $C_p(\mathcal{U})$ est le sous-module (libre) de $C_p(X)$ engendré par les p -simplexes singuliers d'image contenue dans l'un des U_i . Le morphisme de bord $\partial : C_p(\mathcal{U}) \rightarrow C_{p-1}(\mathcal{U})$ est la restriction du morphisme $\partial : C_p(X) \rightarrow C_{p-1}(X)$, qui envoie bien chaînes \mathcal{U} -petites sur chaînes \mathcal{U} -petites. On note $H_n(\mathcal{U})$ le n -ème groupe d'homologie du complexe des chaînes \mathcal{U} -petites, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La suite des inclusions $(C_p(\mathcal{U}) \rightarrow C_p(X))_{p \in \mathbb{N}}$ est un morphisme de complexes de chaînes.

Théorème 5.13 (Théorème des petites chaînes) Ce morphisme de complexes de chaînes induit un isomorphisme en homologie : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$H_n(\mathcal{U}) \simeq H_n(X).$$

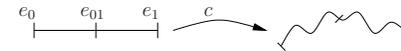
Démonstration. L'idée est de construire un opérateur qui transforme une p -chaîne en une p -chaîne \mathcal{U} -petite, par subdivisions barycentriques des p -simplexes standards.

On va définir un morphisme de complexes de chaînes $(Sd = Sd_p : C_p(X) \rightarrow C_p(X))_{p \in \mathbb{N}}$, appelé *opérateur de subdivision*, qui est fonctoriel, i.e. si $f : X \rightarrow Y$ est une application continue, alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} C_p(X) & \xrightarrow{Sd} & C_p(X) \\ \downarrow f_p & & \downarrow f_p \\ C_p(Y) & \xrightarrow{Sd} & C_p(Y) \end{array}$$

est commutatif, pour tout $p \in \mathbb{N}$.

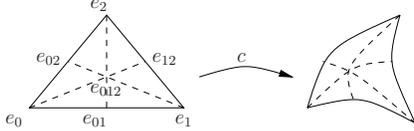
Exemple. Si c est un 1-simplexe singulier, alors on pose $Sd(c) = c \circ ((e_0, e_{01})) + c \circ ((e_{01}, e_1))$, avec e_{01} le milieu de Δ_1 .



Si c est un 2-simplexe singulier, alors on pose

$$\begin{aligned} Sd(c) &= c \circ ((e_0, e_{01}, e_{012})) - c \circ ((e_1, e_{01}, e_{012})) + c \circ ((e_1, e_{12}, e_{012})) \\ &\quad - c \circ ((e_2, e_{1,2}, e_{012})) + c \circ ((e_2, e_{02}, e_{012})) - c \circ ((e_0, e_{02}, e_{012})) \end{aligned}$$

avec les notations du dessin ci-dessous.



On rappelle que e_0, e_1, \dots, e_p sont les sommets du p -simplexe standard Δ_p , et que, pour x_0, \dots, x_p dans \mathbb{R}^N , on note $((x_0, \dots, x_p))$ l'unique application affine de Δ_p dans \mathbb{R}^N envoyant e_k sur x_k pour $0 \leq k \leq p$. Si s est une partie de $\{0, 1, \dots, p\}$, on note b_s le barycentre des points $\{e_i : i \in s\}$.

Soit α un élément du groupe symétrique \mathcal{S}_{p+1} des bijections de $\{0, 1, \dots, p\}$. On note $\epsilon(\alpha) \in \{\pm 1\}$ la signature de α . On considère le p -simplexe singulier $\beta_\alpha : \Delta_p \rightarrow \Delta_p$

$$\beta_\alpha = ((b_{\{\alpha(0)\}}, b_{\{\alpha(0), \alpha(1)\}}, \dots, b_{\{\alpha(0), \alpha(1), \dots, \alpha(p)\}})) .$$

On pose, pour tout p -simplexe singulier c ,

$$Sd(c) = \sum_{\alpha \in \mathcal{S}_{p+1}} \epsilon(\alpha) c \circ \beta_\alpha .$$

En prolongeant par linéarité, on obtient un morphisme de modules $Sd : C_p(X) \rightarrow C_p(X)$.

On vérifie que $\partial \circ Sd = Sd \circ \partial$ et que $Sd \circ f_p = f_p \circ Sd$ pour toute application continue f .

On montre maintenant que les morphismes de complexes de chaînes id et Sd sont fonctoriellement homotopes, i.e. qu'il existe, pour tout $p \in \mathbb{N}$, un morphisme de modules $T = T_p : C_p(X) \rightarrow C_{p+1}(X)$ tels que (avec $T_{-1} : C_{-1}(X) \rightarrow C_0(X)$ l'application forcément nulle),

1. (homotopie) $\partial \circ T_p + T_{p-1} \circ \partial = id - Sd$
2. (fonctorialité) si $f : X \rightarrow Y$ est une application continue, alors $f_{p+1} \circ T_p = T_p \circ f_p$.

La construction procède par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$.

Comme $Sd : C_0(X) \rightarrow C_0(X)$ est l'application identité, en posant $T_0 : C_0(X) \rightarrow C_1(X)$ l'application nulle, on a bien $\partial \circ T_0 + T_{-1} \circ \partial = id - Sd$.

On suppose construits T_0, \dots, T_{p-1} vérifiant (1) et (2). On pose $i_p = id_{\Delta_p}$, qui est un p -simplexe singulier de Δ_p . Par l'hypothèse de récurrence appliquée à la $(p-1)$ -chaîne singulière ∂i_p , on a

$$\partial i_p - Sd(\partial i_p) = \partial \circ T_{p-1}(\partial i_p) + T_{p-2} \circ \partial(\partial i_p).$$

Comme $\partial \circ \partial(i_p) = 0$ et $\partial \circ Sd = Sd \circ \partial$, on a $\partial(i_p - Sd(i_p) - T_{p-1} \circ \partial(i_p)) = 0$. Comme Δ_p est contractile, il existe $\sigma_{p+1} \in C_{p+1}(\Delta_p)$ tel que

$$i_p - Sd(i_p) - T_{p-1} \circ \partial(i_p) = \partial \sigma_{p+1} . \quad (*)$$

Soit maintenant $c : \Delta_p \rightarrow X$ un p -simplexe singulier de X . On note $(c_k : C_k(\Delta_p) \rightarrow C_k(X))_{k \in \mathbb{N}}$ le morphisme de complexes de chaînes induit par l'application continue c . On pose $T_p(c) = c_{p+1}(\sigma_{p+1}) \in C_{p+1}(X)$. En prolongeant par linéarité, on obtient un morphisme de modules $T_p : C_p(X) \rightarrow C_{p+1}(X)$.

Pour montrer que T_p vérifie la condition (1), il suffit par linéarité de montrer qu'elle est vérifiée sur tout p -simplexe singulier $c : \Delta_p \rightarrow X$. On applique à la relation (*) l'application $c_p : C_p(\Delta_p) \rightarrow C_p(X)$. On obtient

$$c_p(i_p) - c_p \circ Sd(i_p) = c_p \circ T_{p-1} \circ \partial(i_p) + c_p \circ \partial(\sigma_{p+1}) .$$

On a $c_p(i_p) = c$ car $i_p = id_{\Delta_p}$. Par fonctorialité de Sd , on a $c_p \circ Sd = Sd \circ c_p$. Par fonctorialité de T_{p-1} et puisque $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est un morphisme de complexes de chaînes, on a $c_p \circ T_{p-1} \circ \partial = T_{p-1} \circ \partial \circ c_p$. Par définition de T_p , on a $c_{p+1}(\sigma_{p+1}) = T_p(c)$. Donc

$$c - Sd(c) = T_{p-1} \circ \partial(c) + \partial \circ T_p(c),$$

ce qui montre le résultat.

Pour montrer que T_p vérifie la condition (2), soit $c : \Delta_p \rightarrow X$ un p -simplexe singulier. Alors

$$f_{p+1} \circ T_p(c) = f_{p+1} \circ c_{p+1}(\sigma_{p+1}) = (f \circ c)_{p+1}(\sigma_{p+1}) = T_p(f \circ c) = T_p \circ f_p(c),$$

ce qui montre le résultat.

Lemme 5.14 Soit $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ une famille de parties de X dont les intérieurs recouvrent X . Alors pour tout $c \in C_p(X)$, il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $Sd^r(c) \in C_p(\mathcal{U})$.

Démonstration. Par linéarité, on peut supposer que c est un p -simplexe singulier.

On pose $V_i = c^{-1}(\overset{\circ}{U}_i)$. Alors $(V_i)_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de l'espace métrique compact Δ_p . Il existe donc $\epsilon > 0$ tel que pour toute partie A de Δ_p , dont le diamètre vérifie $\text{diam}(A) \leq \epsilon$, il existe $i \in I$ tel que $A \subset V_i$.

Si $u = \sum_k a_k \sigma_k$, avec σ_k des p -simplexes singuliers, est une p -chaîne singulière à valeurs dans un espace métrique, on note $\text{diam}(u)$ le maximum des diamètres des images des σ_k . Il est facile de montrer que, pour tout $r \in \mathbb{N}$,

$$\text{diam } Sd^r(i_p) \leq \left(\frac{p}{p+1} \right)^r \text{diam}(\Delta_p) .$$

En effet, soit S un simplexe affine de \mathbb{R}^N , enveloppe convexe affine des points x_0, x_1, \dots, x_p . Par convexité, $\text{diam}(S) = \sup_{i \neq j} \|e_i - e_j\|$. Si S' est un simplexe affine de dimension p de la subdivision barycentrique de S , il possède un sommet de la

forme x_j et un sommet qui est le barycentre affine $b = \sum_{i=0}^p \frac{1}{p+1} x_i$ de S . De plus $\text{diam}(S') = \|b - x_j\| = \frac{1}{p+1} \|\sum_{i=0}^p x_i - x_j\| \leq \frac{p}{p+1} \text{diam}(S)$.

Pour r assez grand, on a donc $\text{diam } Sd^r(i_p) \leq \epsilon$. Donc $Sd^r(c) = Sd^r(c_p(i_p)) = c_p(Sd^r(i_p)) \in C_p(\mathcal{U})$, ce qui montre le résultat. \square

La preuve du théorème des petites chaînes se termine comme suit.

Soit z un cycle de X . Pour tout $r \in \mathbb{N}$, $Sd^r(z)$ est aussi un cycle, car Sd commute avec ∂ . De plus,

$$z - Sd^r(z) = \sum_{k=0}^{r-1} (Sd^k(z) - Sd^{k+1}(z)) = \sum_{k=0}^{r-1} (T \circ \partial(Sd^k(z)) - \partial \circ T(Sd^k(z))) = \partial \circ T \left(\sum_{k=0}^{r-1} Sd^k(z) \right).$$

On montre maintenant, pour tout $p \in \mathbb{N}$, que $H_p(\mathcal{U}) \rightarrow H_p(X)$ est un isomorphisme de modules.

Si z est un p -cycle de X , soit r suffisamment grand pour que $Sd^r(z) \in \mathcal{C}_p(\mathcal{U})$. Alors par ce qui précède, $Sd^r(z)$ est un p -cycle \mathcal{U} -petit, homologue à z dans X , donc l'application $H_p(\mathcal{U}) \rightarrow H_p(X)$ est surjective.

Soit z un p -cycle \mathcal{U} -petit, qui est un bord dans X . Alors il existe $t \in C_{p+1}(X)$ tel que $z = \partial t$. Montrons que z est le bord d'une chaîne \mathcal{U} -petite. Soit r suffisamment grand pour que $Sd^r(t) \in C_{p+1}(\mathcal{U})$. D'après ce qui précède, on a $Sd^r(z) = Sd^r(\partial t) = \partial \circ Sd^r(t)$, donc

$$z = \partial \left(Sd^r(t) + T \left(\sum_{k=0}^{r-1} Sd^k(z) \right) \right).$$

Comme Sd envoie $C_i(\mathcal{U})$ dans $C_i(\mathcal{U})$, et comme T envoie $C_p(\mathcal{U})$ dans $C_{p+1}(\mathcal{U})$, on a bien montré que z est le bord d'une chaîne \mathcal{U} -petite. Donc $H_p(\mathcal{U}) \rightarrow H_p(X)$ est injective. \square

Excision

Théorème 5.15 (Théorème d'excision) *Soit X un espace topologique, A un sous-espace de X , et $U \subset A$ avec $\bar{U} \subset \overset{\circ}{A}$. L'inclusion des paires d'espaces topologiques $(X - U, A - U) \rightarrow (X, A)$ induit un isomorphisme en homologie : pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$H_n(X - U, A - U) \simeq H_n(X, A).$$

Démonstration. On pose $\mathcal{U} = \{X - U, A\}$. Comme $\bar{U} \subset \overset{\circ}{A}$, l'espace X est réunion des intérieurs de $X - U$ et de A . On peut donc appliquer le théorème des petites chaînes : l'inclusion $u : C_*(\mathcal{U}) \rightarrow C_*(X)$ induit un isomorphisme en homologie.

On rappelle que si E, F sont deux sous-modules d'un module G , alors l'inclusion $E \rightarrow E + F$ induit un isomorphisme

$$E/(E \cap F) \simeq (E + F)/F.$$

Comme $C_*(\mathcal{U}) = C_*(X - U) + C_*(A)$, il vient

$$\begin{aligned} C_*(\mathcal{U})/C_*(A) &\simeq C_*(X - U)/(C_*(X - U) \cap C_*(A)) = C_*(X - U)/C_*(A - U) \\ &= C_*(X - U, A - U). \end{aligned}$$

On obtient donc un morphisme de suites exactes courtes de complexes de chaînes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C_*(A) & \longrightarrow & C_*(\mathcal{U}) & \xrightarrow{f} & C_*(X - U, A - U) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow id & & \downarrow u & & \downarrow g & & \\ 0 & \longrightarrow & C_*(A) & \longrightarrow & C_*(X) & \longrightarrow & C_*(X, A) & \longrightarrow & 0 \end{array},$$

avec g l'application induite par l'inclusion $(X - U, A - U) \rightarrow (X, A)$, et f le morphisme de complexes de chaînes obtenu comme composition de la projection $C_*(\mathcal{U}) \rightarrow C_*(\mathcal{U})/C_*(A)$ avec l'isomorphisme $C_*(\mathcal{U})/C_*(A) \simeq C_*(X - U, A - U)$ ci-dessus défini. La commutativité du diagramme ci-dessus est immédiate.

Par le théorème 5.2, le diagramme suivant est commutatif, et ses lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} H_n(A) & \longrightarrow & H_n(\mathcal{U}) & \longrightarrow & H_n(X - U, A - U) & \longrightarrow & H_{n-1}(A) & \longrightarrow & H_{n-1}(\mathcal{U}) \\ \downarrow id & & \downarrow u_* & & \downarrow g_* & & \downarrow id & & \downarrow u_* \\ H_n(A) & \longrightarrow & H_n(X) & \longrightarrow & H_n(X, A) & \longrightarrow & H_{n-1}(A) & \longrightarrow & H_{n-1}(X) \end{array}.$$

Comme les première, seconde, quatrième et cinquième flèches verticales sont des isomorphismes, il découle du lemme des cinq (voir exercice E.51) que la troisième flèche verticale est aussi un isomorphisme, ce qui démontre le résultat. \square

On rappelle (voir la partie A.2) que si X est un espace topologique et si Y est un sous-espace de X , alors X/Y désigne l'espace topologique quotient X/\mathcal{R} avec \mathcal{R} la relation d'équivalence engendrée par $x \sim y$ pour tous x, y de Y . Pour alléger les notations dans cette fin de partie, on notera X/Y l'espace X/Y (il n'y aura pas de risque de confondre avec un autre quotient).

Lemme 5.16 *Soit X un espace topologique, et Y un fermé de X qui est un rétracte par déformation forte de X . Alors le singleton Y/Y est un rétracte par déformation forte de X/Y .*

Démonstration. Soit $\pi : X \rightarrow X/Y$ la projection canonique. Comme Y est fermé, on rappelle (voir la partie A.2) que $\pi|_{X-Y}$ est un homéomorphisme sur son image. Soit $h : X \times [0, 1] \rightarrow X$ une application continue, avec $h(x, 0) = x$ et $h(x, 1) \in Y$ pour tout $x \in X$, et $h(y, t) = y$ pour tout $y \in Y$.

Il existe une unique application ϕ rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X \times [0, 1] & \xrightarrow{h} & X \\ \pi \times id \downarrow & & \downarrow \pi \\ (X/Y) \times [0, 1] & \xrightarrow{\phi} & X/Y \end{array}$$

En effet, si $(\pi(x), t) \in (X/Y) \times [0, 1]$, alors $(\pi \times id)^{-1}(\pi(x), t) = \{(x, t)\}$ si $x \notin Y$, et $(\pi \times id)^{-1}(\pi(x), t) = Y \times \{t\}$ sinon. Or $\pi \circ h(Y \times \{t\}) = Y/Y$, qui est un singleton.

Pour montrer que ϕ ainsi définie est continue en tout point $(\pi(x), t) \in (X/Y) \times [0, 1]$, soit V un voisinage de $\phi(\pi(x), t) = \pi \circ h(x, t)$. Alors $U = \pi^{-1}(V)$ est un voisinage de $h(x, t)$, qui est un voisinage de Y si $h(x, t) \in Y$. Donc $h^{-1}(U)$ est un voisinage de (x, t) , qui est un voisinage de $Y \times [0, 1]$ si $h(x, t) \in Y$.

Si $x \in X - Y$, comme $X - Y$ est ouvert, il existe un voisinage W de x , contenu dans $X - Y$, et un voisinage W' de t tels que $W \times W' \subset h^{-1}(U)$. Comme $\pi|_{X-Y}$ est un homéomorphisme sur son image, on en déduit que $\pi(W) \times W'$ est un voisinage de $(\pi(x), t)$ contenu dans $\phi^{-1}(V)$.

Si $x \in Y$, alors $h(x, t) \in Y$, donc $Y \times [0, 1] \subset h^{-1}(U)$. Par conséquent, pour tout $y \in Y$ et tout $s \in [0, 1]$, il existe U_s et V_s voisinages de y et s dans X et $[0, 1]$ respectivement tels que $U_s \times V_s \subset h^{-1}(U)$. Par compacité de $[0, 1]$, il existe $s_1, \dots, s_k \in [0, 1]$ tels que $[0, 1] \subset V_{s_1} \cup \dots \cup V_{s_k}$. Soit $U_y = U_{s_1} \cap \dots \cap U_{s_k}$, qui est un voisinage de y dans X avec

$$U_y \times [0, 1] = U_y \times (V_{s_1} \cup \dots \cup V_{s_k}) = (U_y \times V_{s_1}) \cup \dots \cup (U_y \times V_{s_k}) \subset h^{-1}(U).$$

Donc $(\bigcup_{y \in Y} U_y) \times [0, 1]$ est un voisinage de $Y \times [0, 1]$ contenu dans $h^{-1}(U)$. Et puisque l'image par π d'un voisinage saturé de Y dans X est un voisinage de Y/Y dans X/Y , on en déduit que $\pi(\bigcup_{y \in Y} U_y) \times [0, 1]$ est un voisinage de $(\pi(x), t)$ contenu dans $\phi^{-1}(V)$. \square

Proposition 5.17 *Soit X un espace topologique normal, Y un fermé de X , rétracte par déformation forte d'un voisinage ouvert U . Si $\pi : (X, Y) \rightarrow (X/Y, Y/Y)$ est la projection canonique, alors*

$$\pi_* : H_n(X, Y) \rightarrow H_n(X/Y, Y/Y)$$

est un isomorphisme de modules pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Par le lemme précédent, Y/Y est un rétracte par déformation forte de U/Y . Par l'invariance homotopique de l'homologie relative (Proposition 5.12), les inclusions $(X, Y) \rightarrow (X, U)$ et $(X/Y, Y/Y) \rightarrow (X/Y, U/Y)$ induisent des isomorphismes en homologie relative :

$$H_n(X, Y) \simeq H_n(X, U) \quad \text{et} \quad H_n(X/Y, Y/Y) \simeq H_n(X/Y, U/Y)$$

Comme X est normal, il existe un ouvert V de X tel que $Y \subset V \subset \bar{V} \subset U$. Comme U (resp. \bar{V}) est un ouvert (resp. fermé) saturé de X , son image dans X/Y est ouverte (resp. fermée). En particulier l'adhérence de V/Y est contenue dans l'intérieur de U/Y . Par le théorème d'excision 5.15, les inclusions de paires évidentes induisent des isomorphismes

$$H_n(X - V, U - V) \simeq H_n(X, U) \quad \text{et} \quad H_n(X/Y - V/Y, U/Y - V/Y) \simeq H_n(X/Y, U/Y).$$

Comme Y est fermé, on rappelle que $\pi|_{X-Y}$ est un homéomorphisme sur son image. La restriction de π de $(X - V, U - V)$ dans $(X/Y - V/Y, U/Y - V/Y)$ est donc un homéomorphisme. Elle induit par conséquent un isomorphisme en homologie relative.

Il est immédiat de vérifier que la composition des isomorphismes (ci-dessus définis)

$$H_n(X, Y) \simeq H_n(X, U) \simeq H_n(X - V, U - V) \simeq H_n(X/Y - V/Y, U/Y - V/Y) \simeq$$

$$H_n(X/Y, U/Y) \simeq H_n(X/Y, Y/Y)$$

est $\pi_* : H_n(X, Y) \rightarrow H_n(X/Y, Y/Y)$, d'où le résultat. \square

Suite exacte de Mayer-Vietoris

Soit X un espace topologique, U, V deux ouverts de X recouvrant X , et

$$\begin{array}{ccc} U \cap V & \xrightarrow{i_1} & U \\ i_2 \downarrow & & \downarrow j_1 \\ V & \xrightarrow{j_2} & X \end{array}$$

le diagramme commutatif des inclusions. On note $((i_1)_*, -(i_2)_*) : C_*(U \cap V) \rightarrow C_*(U) \times C_*(V)$ l'application $c \mapsto ((i_1)_*c, -(i_2)_*c)$ (on prendra garde à ne pas oublier le signe $-$ dans les calculs). On note $(j_1)_* + (j_2)_* : C_*(U) \times C_*(V) \rightarrow C_*(\{U, V\})$ l'application $(c, c') \mapsto (j_1)_*c + (j_2)_*c'$. On note $X', U', V', i'_1, i'_2, j'_1, j'_2$ une autre telle donnée, et $f : X \rightarrow X'$ une application continue telle que $f(U) \subset U', f(V) \subset V'$.

Proposition 5.18 La suite

$$0 \longrightarrow C_*(U \cap V) \xrightarrow{((i_1)_*, -(i_2)_*)} C_*(U) \times C_*(V) \xrightarrow{(j_1)_* + (j_2)_*} C_*(\{U, V\}) \longrightarrow 0$$

est une suite exacte courte de complexes de chaînes, et le triplet

$$((f|_{U \cap V})_*, (f|_U)_* \times (f|_V)_*, f_*)$$

est un morphisme de suites exactes courtes de complexes de chaînes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C_*(U \cap V) & \xrightarrow{((i_1)_*, -(i_2)_*)} & C_*(U) \times C_*(V) & \xrightarrow{(j_1)_* + (j_2)_*} & C_*(\{U, V\}) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow (f|_{U \cap V})_* & & \downarrow (f|_U)_* \times (f|_V)_* & & \downarrow f_* \\ 0 & \longrightarrow & C_*(U' \cap V') & \xrightarrow{((i'_1)_*, -(i'_2)_*)} & C_*(U') \times C_*(V') & \xrightarrow{(j'_1)_* + (j'_2)_*} & C_*(\{U', V'\}) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Démonstration. Par définition du complexes de chaînes $\{U, V\}$ -petites, l'application $(j_1)_* + (j_2)_*$ est surjective. L'application $((i_1)_*, -(i_2)_*)$, qui est $c \mapsto (c, -c)$ après identification du complexe des chaînes singulières d'une partie de X avec un sous-module du complexe des chaînes singulières de X , est clairement injective. Le diagramme commutatif des inclusions ci-dessus induit un diagramme commutatif

sur les complexes de chaînes singulières, donc l'image de $((i_1)_*, -(i_2)_*)$ est contenue dans le noyau de $(j_1)_* + (j_2)_*$.

Réciproquement, en utilisant des sommes sur les simplexes singuliers de X avec des familles presque nulles d'éléments de l'anneau des coefficients \mathbb{A} , si

$$\sum_{\sigma: \text{im } \sigma \subset U} n_\sigma \sigma + \sum_{\sigma: \text{im } \sigma \subset V} m_\sigma \sigma = 0,$$

alors

$$\sum_{\sigma: \text{im } \sigma \subset U, \text{im } \sigma \not\subset V} n_\sigma \sigma + \sum_{\sigma: \text{im } \sigma \subset V, \text{im } \sigma \not\subset U} m_\sigma \sigma + \sum_{\sigma: \text{im } \sigma \subset (U \cap V)} (n_\sigma + m_\sigma) \sigma = 0,$$

donc, comme le module des chaînes singulières est libre, on a

$$\begin{aligned} n_\sigma &= 0 & \text{si } \text{im } \sigma \subset U, \text{im } \sigma \not\subset V \\ m_\sigma &= 0 & \text{si } \text{im } \sigma \subset V, \text{im } \sigma \not\subset U \\ n_\sigma &= -m_\sigma & \text{si } \text{im } \sigma \subset (U \cap V) \end{aligned} .$$

Ceci montre que tout élément du noyau du morphisme $(j_1)_* + (j_2)_*$ appartient à l'image du morphisme $((i_1)_*, -(i_2)_*)$, ce qui démontre le résultat. \square

Corollaire 5.19 *Pour tout espace topologique X , muni d'un recouvrement ouvert $\{U, V\}$, il existe une suite exacte longue de modules, dite suite exacte de Mayer-Vietoris de X ,*

$$\begin{aligned} \dots \longrightarrow H_{n+1}(X) \xrightarrow{\delta} H_n(U \cap V) \xrightarrow{((i_1)_*, -(i_2)_*)} H_n(U) \times H_n(V) \xrightarrow{(j_1)_* + (j_2)_*} H_n(X) \\ \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(U \cap V) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

telle que, pour tout espace topologique X' , muni d'un recouvrement ouvert $\{U', V'\}$, pour toute application continue $f: X \rightarrow X'$ telle que $f(U) \subset U', f(V) \subset V'$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & H_n(U \cap V) & \xrightarrow{((i_1)_*, -(i_2)_*)} & H_n(U) \times H_n(V) & \xrightarrow{(j_1)_* + (j_2)_*} & H_n(X) & \xrightarrow{\delta} & H_{n-1}(U \cap V) \dots \\ & \downarrow (f|_{U \cap V})_* & & \downarrow (f|_U)_* \times (f|_V)_* & & \downarrow f_* & & \downarrow (f|_{U \cap V})_* \\ \dots & H_n(U' \cap V') & \xrightarrow{((i'_1)_*, -(i'_2)_*)} & H_n(U') \times H_n(V') & \xrightarrow{(j'_1)_* + (j'_2)_*} & H_n(X') & \xrightarrow{\delta} & H_{n-1}(U' \cap V') \dots \end{array}$$

Démonstration. Le théorème 5.2 des rappels d'algèbre homologique associe, de manière fonctorielle, une suite exacte longue en homologie à toute suite exacte courte de complexes de chaînes. On l'applique à la proposition précédente. Le résultat en découle, en appliquant le théorème des petites chaînes 5.13, et la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} C_*\{U, V\} & \longrightarrow & C_*(X) \\ f_* \downarrow & & \downarrow f_* \\ C_*\{U', V'\} & \longrightarrow & C_*(X') \end{array} .$$

\square

Remarques. (1) Dans certaines applications, on n'a pas besoin de connaître explicitement les morphismes dans les suites exactes de Mayer-Vietoris, leur existence suffisant. On omettra donc de les désigner nommément, pour simplifier les notations. Mais par défaut, les morphismes seront ceux indiqués ci-dessus.

(2) Le corollaire ci-dessus reste vrai si U, V sont des sous-espaces de X qui sont des rétractes par déformation forte, préservant $U \cap V$, de voisinages. C'est par exemple le cas si U, V sont des variétés différentielles à bord dans une variété différentielle X , ou si X est un CW-complexe et U, V des sous-CW-complexes.

5.3 Quelques calculs et applications de l'homologie

Les applications qui seront présentées ci-dessous utilisent de manière essentielle la valeur des groupes d'homologie (singulière) des sphères, et la fonctorialité de l'homologie (singulière).

Calcul de l'homologie des sphères

On note encore \mathbb{A} l'anneau (commutatif unitaire) des coefficients.

Théorème 5.20 *Pour tous p, n dans \mathbb{N} ,*

$$H_p(\mathbb{S}_n, \mathbb{A}) = \begin{cases} \mathbb{A} \oplus \mathbb{A} & \text{si } 0 = p = n \\ \mathbb{A} & \text{si } 0 = p < n \\ 0 & \text{si } 0 < p < n \\ \mathbb{A} & \text{si } 0 < p = n \\ 0 & \text{si } p > n \end{cases}$$

Démonstration. Si $n = 0$, alors $\mathbb{S}_n = \{-1, +1\}$, et le résultat est déjà connu (voir le paragraphe avant proposition 5.6 et l'exercice E.52). On suppose donc $n \geq 1$.

Si $p = 0$, alors le résultat est déjà connu, car \mathbb{S}_n est connexe par arcs (proposition 5.6). On suppose donc $p \geq 1$.

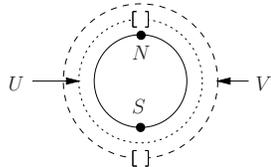
On montre le résultat par récurrence sur p . Soit N le pôle nord de \mathbb{S}_n , S le pôle sud de \mathbb{S}_n , $U = \mathbb{S}_n - \{N\}$, $V = \mathbb{S}_n - \{S\}$. Alors U, V sont des ouverts contractiles, donc ont la même homologie que le point. L'inclusion $\mathbb{S}_{n-1} \hookrightarrow U \cap V$ est une équivalence d'homotopie (car $U \cap V$ se rétracte par déformation forte sur \mathbb{S}_{n-1} le long des grands cercles passant par les pôles). Elle induit donc un isomorphisme en homologie.

Pour $p = 1$, la suite exacte de Mayer-Vietoris appliquée à l'espace topologique \mathbb{S}_n muni du recouvrement ouvert $\{U, V\}$ donne une suite exacte

$$H_1(U) \times H_1(V) \longrightarrow H_1(\mathbb{S}_n) \longrightarrow H_0(U \cap V) \xrightarrow{\phi} H_0(U) \times H_0(V) .$$

Le module $H_1(U) \times H_1(V)$ est nul, donc $H_1(\mathbb{S}_n)$ s'injecte dans $H_0(U \cap V)$. Le module $H_0(U) \times H_0(V)$ est isomorphe à $\mathbb{A} \times \mathbb{A}$. Si $n > 1$, alors $H_0(U \cap V) \simeq H_0(\mathbb{S}_{n-1}) \simeq \mathbb{A}$ et l'application ϕ s'écrit $x \mapsto (x, -x)$. En particulier, ϕ est injective, donc par exactitude, $H_1(\mathbb{S}_n) = 0$.

Si $n = 1$, alors $H_0(U \cap V) \simeq H_0(\mathbb{S}_0) \simeq \mathbb{A} \times \mathbb{A}$. L'application ϕ s'écrit $(x, y) \mapsto (x + y, -(x + y))$, car les deux composantes connexes par arcs de $U \cap V$, qui forment une base de $H_0(U \cap V)$, s'envoient sur la seule composante connexe par arcs de U , qui engendre $H_0(U)$, et de même pour V . En particulier, le noyau de ϕ est isomorphe à \mathbb{A} , donc par exactitude, $H_1(\mathbb{S}_1) = \mathbb{A}$.



Pour $p > 1$, la suite exacte de Mayer-Vietoris appliquée à l'espace topologique \mathbb{S}_n muni du recouvrement ouvert $\{U, V\}$ donne une suite exacte

$$H_p(U) \times H_p(V) \longrightarrow H_p(\mathbb{S}_n) \longrightarrow H_{p-1}(U \cap V) \longrightarrow H_{p-1}(U) \times H_{p-1}(V).$$

Les modules aux extrémités étant nuls, on a un isomorphisme $H_p(\mathbb{S}_n) \simeq H_{p-1}(U \cap V) \simeq H_{p-1}(\mathbb{S}_{n-1})$. On conclut par récurrence. \square

Le théorème du point fixe de Brouwer

On renvoie à l'introduction pour l'énoncé (corollaire 1.2) et la preuve du théorème du point fixe de Brouwer. Les seuls outils utilisés étaient la valeur des groupes d'homologie des sphères, calculées ci-dessus (théorème 5.20), la valeur des groupes d'homologie des boules (qui découle du corollaire 5.9), et la fonctorialité de l'homologie singulière.

Homologie et limite inductive

Le premier résultat suivant dit essentiellement que pour calculer les groupes d'homologies, il suffit de le faire pour les espaces compacts. On rappelle d'abord quelques notions sur les limites inductives, que l'on prendra garde à ne pas confondre avec les notions homonymes introduites pour les groupes avant la proposition 4.3.

Un *ordre inductif* sur un ensemble I est un ordre partiel \leq tel que

$$\forall i, j \in I, \exists k \in I, \quad i \leq k \quad \text{et} \quad j \leq k.$$

Par exemple, tout ordre total est inductif. L'exemple le plus utilisé en pratique est celui de l'ensemble \mathbb{N} muni de son ordre usuel.

Une *famille inductive* dans une catégorie est la donnée, notée (X_i, f_{ij}) , d'un ensemble I muni d'un ordre inductif, d'une famille d'objets $(X_i)_{i \in I}$ et d'une famille de morphismes $(f_{ji} : X_i \rightarrow X_j)_{i \leq j}$ tels que

- (1) $\forall i \in I, \quad f_{ii} = id_{X_i}$
- (2) $\forall i \leq j \leq k, \quad f_{ki} = f_{kj} \circ f_{ji}$

Si X est un ensemble, une *famille inductive de parties* de X est une famille inductive dans la catégorie dont les objets sont les parties de X et l'ensemble des morphismes entre deux parties de X est vide ou réduit à l'inclusion. Plus simplement, c'est une famille $(X_i)_{i \in I}$ de parties de X , telle que l'ordre sur I défini par l'inclusion

($i \leq j$ si et seulement si $X_i \subset X_j$) est inductif. Par exemple, une suite croissante de parties de X est une famille inductive de parties de X . Si X est un espace topologique, une famille inductive de parties $(X_i)_{i \in I}$ dans X sera dite *complète* si tout compact de X est contenu dans l'un des X_i .

Exemples. (1) Toute suite croissante d'ouverts de X , de réunion X , est une famille inductive complète de parties de X .

(2) Si X est séparé, la famille de tous les compacts de X est une famille inductive complète de parties de X , car la réunion de deux compacts de X est un compact de X .

(3) Une *suite exhaustive de compacts* de X est une suite $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de compacts de X tels que $K_i \subset \overset{\circ}{K}_{i+1}$, et $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i = X$. Par exemple, tout espace localement compact séparé admet une suite exhaustive de compacts. Toute suite exhaustive de compacts de X est une famille inductive complète de parties de X .

Soit \mathbb{A} un anneau commutatif unitaire. On rappelle que si $(E_i)_{i \in I}$ est une famille de modules, alors $\bigoplus_{i \in I} E_i$ est le module des *sommes presque nulles* $\sum_{i \in I} x_i$ avec les x_i dans E_i , nuls sauf un nombre fini d'entre eux. On identifie E_i à un sous-module de $\bigoplus_{i \in I} E_i$ par l'application $x \mapsto \sum_{j \in I} x_j$ avec $x_j = 0$ si $j \neq i$ et $x_i = x$.

Soit (E_i, g_{ij}) une famille inductive de modules, on appelle *limite inductive* de (E_i, g_{ij}) le module quotient

$$\varinjlim (E_i, g_{ij}) = \left(\bigoplus_{i \in I} E_i \right) / F$$

avec F le sous-module de $\bigoplus_{i \in I} E_i$ engendré par les éléments de la forme $x - g_{ji}(x)$ avec $i \leq j$ et $x \in E_i$ $g_{ki}(x) = 0$. (Il est facile de vérifier, en utilisant le fait que l'ordre sur I est inductif, que la limite inductive admet aussi la définition suivante. On considère la relation \sim sur la réunion disjointe $\coprod E_i$, définie par $x \sim y$, avec x dans E_j et y dans E_k , s'il existe $i \geq j, k$ tels que $f_{ij}(x) = f_{ik}(y)$. On montre que c'est une relation d'équivalence, et que si $[x]$ désigne la classe d'équivalence de x , si x est dans E_j et y est dans E_k , alors la formule $\lambda[x] + \lambda[y] = [\lambda f_{ij}(x) + \mu f_{ik}(y)]$ pour tout $i \geq j, k$, définit une structure de module sur l'ensemble des classes d'équivalences, telle que l'application $[x] \mapsto x + F$ soit un isomorphisme de modules sur la limite inductive.

Lorsque les morphismes sont sous-entendus, on note aussi $\varinjlim E_i$ ou $\varinjlim_i E_i$ cette limite inductive.

Remarque. La limite inductive est solution d'un problème universel, qu'on laisse au lecteur le soin de formuler et de vérifier.

Soit X un espace topologique, et $(X_i)_{i \in I}$ une famille inductive de parties de X , avec $f_{ji} : X_i \rightarrow X_j$ l'inclusion si $i \leq j$. Alors $(H_*(X_i), (f_{ij})_*)$ est une famille inductive de modules et de morphismes de modules. Si $f_i : X_i \rightarrow X$ est l'inclusion, alors le

diagramme

$$\begin{array}{ccc} X_i & \xrightarrow{f_{ji}} & X_j \\ f_i \searrow & & \swarrow f_j \\ & X & \end{array}$$

est commutatif, donc induit un diagramme commutatif en homologie. En particulier, le morphisme $\phi = \bigoplus_{i \in I} (f_i)_* : \bigoplus_{i \in I} H_*(X_i) \rightarrow H_*(X)$ passe au quotient en un morphisme

$$\tilde{\phi} : \varinjlim H_*(X_i) \rightarrow H_*(X).$$

Proposition 5.21 *Soit X un espace topologique séparé, $(X_i)_{i \in I}$ une famille inductive complète de parties de X . Alors le morphisme $\tilde{\phi} : \varinjlim H_*(X_i) \rightarrow H_*(X)$ défini ci-dessus est un isomorphisme.*

Démonstration. On appelle *support* d'une chaîne singulière $c = \sum_{p=1}^n a_i \sigma_i$ d'un espace topologique Y la réunion des images des simplexes singuliers σ_i dont le coefficient a_i est non nul.

Comme X est séparé, toute chaîne singulière de X est à support dans un compact de X , donc dans un X_i . Donc l'application $\tilde{\phi}$ est surjective.

Soit $c = \sum_{i \in I} c_i$ une somme presque nulle de chaînes singulières c_i dans X_i , qui est un bord $c = \partial b$ dans X . Alors il existe $k \in I$ tel que X_k contienne le support de b et les X_i avec c_i non nulle. Donc c est une chaîne singulière dans X_k , qui est un bord dans X_k . Par conséquent, l'application $\tilde{\phi}$ est injective. \square

Homologie du complémentaire d'une sphère dans une sphère

On commence par le calcul de l'homologie du complémentaire dans la sphère \mathbb{S}_n d'une partie homéomorphe à une boule.

Lemme 5.22 *Soit A un sous-espace de \mathbb{S}_n homéomorphe à \mathbb{B}_k , avec $0 \leq k \leq n$. Alors*

$$H_j(\mathbb{S}_n - A, \mathbb{A}) = \begin{cases} \mathbb{A} & \text{si } j = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Démonstration. On raisonne par récurrence sur k . Si $k = 0$, alors A est réduit à un point, et $\mathbb{S}_n - A$ est homéomorphe à \mathbb{R}^n , donc le résultat est connu.

Soit $k \geq 1$. On suppose le résultat vrai pour $k - 1$. Soit A une partie de \mathbb{S}_n homéomorphe à \mathbb{B}_k , avec $n \geq k$, et $f : A \rightarrow [0, 1]^k$ un homéomorphisme. Soient

$$I_+ = \{(x_1, \dots, x_k) \in [0, 1]^k : x_1 \geq \frac{1}{2}\}, \quad I_- = \{(x_1, \dots, x_k) \in [0, 1]^k : x_1 \leq \frac{1}{2}\}$$

et $A_{\pm} = f^{-1}(I_{\pm})$. En particulier, $B = A_+ \cap A_-$ est homéomorphe à \mathbb{B}_{k-1} . Comme A_{\pm} est un compact de \mathbb{S}_n , les sous-espaces $\mathbb{S}_n - A_+$, $\mathbb{S}_n - A_-$ sont ouverts. Leur

réunion est $\mathbb{S}_n - B$, leur intersection $\mathbb{S}_n - A$. Si $i_{\pm} : \mathbb{S}_n - A \rightarrow \mathbb{S}_n - A_{\pm}$ est l'inclusion, la suite exacte de Mayer-Vietoris donne une suite exacte

$$H_{j+1}(\mathbb{S}_n - B) \longrightarrow H_j(\mathbb{S}_n - A) \xrightarrow{((i_+)_*, -(i_-)_*)} H_j(\mathbb{S}_n - A_+) \times H_j(\mathbb{S}_n - A_-) \longrightarrow H_j(\mathbb{S}_n - B).$$

Par récurrence, $((i_+)_*, -(i_-)_*)$ est injective.

On suppose d'abord $j > 0$. On suppose par l'absurde qu'il existe un élément non nul x dans $H_j(\mathbb{S}_n - A)$. Alors $(i_+)_*(x) \neq 0$ ou $(i_-)_*(x) \neq 0$. On suppose par exemple que le premier cas est vrai, et on pose $A_1 = A_+$. Par dichotomies successives, on construit une suite décroissante $A = A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \dots$ de sous-espaces de \mathbb{S}_n homéomorphes à \mathbb{B}_k , avec $C = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i$ homéomorphe à \mathbb{B}_{k-1} , et telle que l'application $H_j(\mathbb{S}_n - A) \rightarrow H_j(\mathbb{S}_n - A_k)$ (induite par l'inclusion) envoie x sur un élément non nul x_k .

Comme tout compact de $\mathbb{S}_n - C$ est contenu dans un $\mathbb{S}_n - A_k$ pour tout k assez grand, la suite $(\mathbb{S}_n - A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite inductive complète de parties de $\mathbb{S}_n - C$. La proposition 5.21 implique que

$$\varinjlim H_j(\mathbb{S}_n - A_k) \simeq H_j(\mathbb{S}_n - C).$$

En particulier, comme aucun x_k n'est nul, l'application $H_j(\mathbb{S}_n - A) \rightarrow H_j(\mathbb{S}_n - C)$ (induite par l'inclusion) envoie x sur un élément non nul. Ceci contredit le fait que par récurrence, $H_j(\mathbb{S}_n - C) = 0$.

On suppose maintenant $j = 0$. Il s'agit de montrer que $H_0(\mathbb{S}_n - A)$ est isomorphe à \mathbb{A} . On rappelle que $H_0(X)$ est le module libre engendré par les composantes connexes par arcs de X , et que si Y est un sous-espace de X , alors l'inclusion $Y \rightarrow X$ induit l'unique morphisme de modules $H_0(Y) \rightarrow H_0(X)$ envoyant une composante connexe par arcs de Y sur la composante connexe par arcs de X la contenant.

On suppose par l'absurde qu'il existe deux composantes connexes par arcs distinctes x, y de $\mathbb{S}_n - A$. On construit par dichotomie une suite décroissante $A = A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \dots$ de sous-espaces de \mathbb{S}_n homéomorphes à \mathbb{B}_k , avec $C = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i$ homéomorphe à \mathbb{B}_{k-1} , et telle que l'application $H_0(\mathbb{S}_n - A) \rightarrow H_0(\mathbb{S}_n - A_k)$ (induite par l'inclusion) envoie x, y sur deux composantes connexes par arcs distinctes x_k, y_k de $\mathbb{S}_n - A_k$. Comme $H_j(\mathbb{S}_n - C) \simeq \varinjlim H_j(\mathbb{S}_n - A_k)$, les deux composantes connexes par arcs de $\mathbb{S}_n - C$ contenant x, y respectivement sont distinctes. Ceci contredit le fait que, par récurrence, $H_0(\mathbb{S}_n - C) = \mathbb{A}$. \square

Proposition 5.23 *Soit B un sous-espace de \mathbb{S}_n homéomorphe à \mathbb{S}_k , avec $0 \leq k \leq n - 1$. Alors*

$$H_j(\mathbb{S}_n - B, \mathbb{A}) = \begin{cases} \mathbb{A} \oplus \mathbb{A} & \text{si } j = 0 \text{ et } k = n - 1 \\ \mathbb{A} & \text{si } j = 0 \text{ et } k < n - 1 \\ \mathbb{A} & \text{si } j = n - k - 1 \text{ et } k < n - 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Démonstration. On raisonne par récurrence sur k . Si $k = 0$, alors B a deux points. Donc $\mathbb{S}_n - B$ a le type d'homotopie de \mathbb{S}_{n-1} , et le résultat est déjà connu.

On suppose le résultat vrai pour k . Soit B un sous-espace de \mathbb{S}_n homéomorphe à \mathbb{S}_{k+1} , avec $0 \leq k+1 \leq n-1$. En considérant par exemple les hémisphères nord et sud de \mathbb{S}_{k+1} , on écrit $B = B_+ \cup B_-$ avec B_{\pm} homéomorphes à \mathbb{B}_{k+1} et $C = B_+ \cap B_-$ homéomorphe à \mathbb{S}_k . En particulier, $\{\mathbb{S}_n - B_+, \mathbb{S}_n - B_-\}$ est un recouvrement ouvert de $\mathbb{S}_n - C$.

On suppose d'abord $j > 0$. La suite exacte de Mayer-Vietoris donne une suite exacte

$$H_{j+1}(\mathbb{S}_n - B_+) \times H_{j+1}(\mathbb{S}_n - B_-) \longrightarrow H_{j+1}(\mathbb{S}_n - C) \longrightarrow H_j(\mathbb{S}_n - B) \longrightarrow H_j(\mathbb{S}_n - B_+) \times H_j(\mathbb{S}_n - B_-).$$

Par le lemme 5.22, les modules aux deux extrémités sont nuls. Donc $H_{j+1}(\mathbb{S}_n - C) \simeq H_j(\mathbb{S}_n - B)$. Par récurrence, comme $k < n-1$, on a

$$H_{j+1}(\mathbb{S}_n - C) = \begin{cases} \mathbb{A} & \text{si } j+1 = n-k-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Comme $k+1 < n-1$ si $j+1 = n-k-1$ et $j > 0$, on a donc

$$H_j(\mathbb{S}_n - B) = \begin{cases} \mathbb{A} & \text{si } j = n-(k+1)-1 \text{ et } k+1 < n-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

ce qui montre le résultat.

On suppose maintenant $j = 0$. La suite exacte de Mayer-Vietoris donne une suite exacte

$$H_1(\mathbb{S}_n - B_+) \times H_1(\mathbb{S}_n - B_-) \longrightarrow H_1(\mathbb{S}_n - C) \longrightarrow H_0(\mathbb{S}_n - B) \longrightarrow H_0(\mathbb{S}_n - B_+) \times H_0(\mathbb{S}_n - B_-) \longrightarrow H_0(\mathbb{S}_n - C) \longrightarrow 0.$$

On applique l'hypothèse de récurrence et le lemme 5.22. Si $k+1 < n-1$, alors cette suite exacte s'écrit

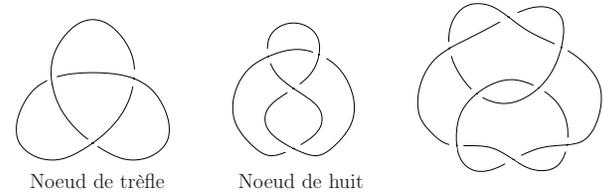
$$0 \rightarrow 0 \rightarrow H_0(\mathbb{S}_n - B) \rightarrow \mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A} \rightarrow 0.$$

Donc $H_0(\mathbb{S}_n - B) \simeq \mathbb{A}$. Si $k+1 = n-1$, alors on a une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathbb{A} \rightarrow H_0(\mathbb{S}_n - B) \rightarrow \mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A} \rightarrow 0.$$

Donc $H_0(\mathbb{S}_n - B) \simeq \mathbb{A} \times \mathbb{A}$, ce qui termine la preuve. \square

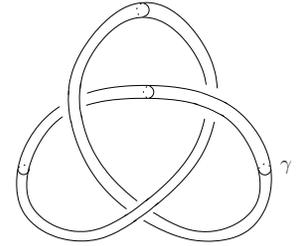
Comme première application, on étudie le cas $n = 3, k = 1$, c'est à dire le cas des cercles plongés dans \mathbb{S}_3 . Une partie K de la sphère \mathbb{S}_3 est appelée un *noeud* s'il existe $f : \mathbb{S}_1 \rightarrow \mathbb{S}_3$ un homéomorphisme sur son image tel que $f(\mathbb{S}_1) = K$. Deux noeuds sont dit *isomorphes* s'il existe un homéomorphisme de \mathbb{S}_3 dans lui-même qui envoie l'un sur l'autre. En identifiant \mathbb{S}_3 avec le compactifié d'Alexandrov de \mathbb{R}^3 , prendre des projections sur des plans de \mathbb{R}^3 permet de représenter graphiquement des noeuds. En voici quelques exemples, on pourra consulter le livre [Rol] et ses tables pour d'autres exemples.



Corollaire 5.24 Si K est un noeud dans \mathbb{S}_3 , alors $H_j(\mathbb{S}_3 - K, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } j = 0, 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

\square

Le fait le plus important est que $H_1(\mathbb{S}_3 - K, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Un générateur de $H_1(\mathbb{S}_3 - K, \mathbb{Z})$ est fourni par un lacet γ contenu dans le bord d'un voisinage tubulaire de K , non homotope à zéro dans ce bord, mais bordant un disque contenu dans le voisinage tubulaire.



En particulier, on ne peut pas distinguer deux noeuds par l'homologie de leur complémentaire : les complémentaires de deux noeuds ont la même homologie. Mais le noeud trivial $\mathbb{S}_1 \subset \mathbb{S}_3$ et le noeud de trèfle, par exemple, ne sont pas isomorphes (voir par exemple [Rol]).

Le théorème de séparation de Jordan-Brouwer

Théorème 5.25 (Théorème de séparation de Jordan-Brouwer) Une partie de \mathbb{S}_n homéomorphe à \mathbb{S}_{n-1} sépare \mathbb{S}_n en deux composantes connexes, et est la frontière de chacune d'entre elles.

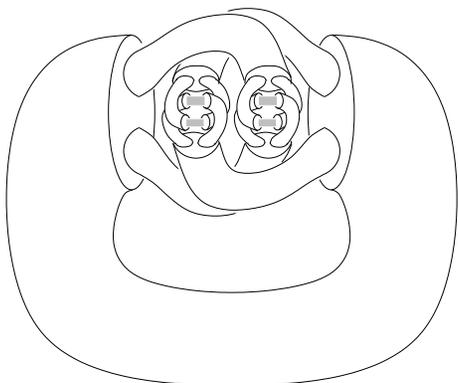
Démonstration. Soit B une partie de \mathbb{S}_n homéomorphe à \mathbb{S}_{n-1} . Comme B est compacte, $\mathbb{S}_n - B$ est un ouvert de \mathbb{S}_n . Donc les composantes connexes de $\mathbb{S}_n - B$ sont ses composantes connexes par arcs. Par la proposition 5.23, $H_0(\mathbb{S}_n - B, \mathbb{Z})$, qui est le groupe abélien libre engendré par les composantes connexes par arcs de $\mathbb{S}_n - B$, est isomorphe à $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Donc B sépare \mathbb{S}_n en deux composantes connexes, que l'on note C_1, C_2 .

Soit $i \in \{1, 2\}$. Puisque $C_i \cup B$ est fermé, la frontière $\partial C_i = \overline{C_i} - C_i$ de C_i est contenue dans B . Il suffit donc de montrer que $B \subset \partial C_i$. Soit $x \in B$, et U un voisinage quelconque de x dans \mathbb{S}_n . Par symétrie, il suffit de montrer que U contient un point de C_1 .

Puisque B est homéomorphe à \mathbb{S}_{n-1} , il existe une partie A de $U \cap B$ telle que $x \in A$ et $B - A$ est homéomorphe à \mathbb{B}_{n-1} . Par le lemme 5.22, $H_0(\mathbb{S}_n - (B - A), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$,

donc $\mathbb{S}_n - (B - A)$ est connexe par arcs. Soit $x \in C_1$, $y \in C_2$, et γ un chemin de x à y contenu dans $\mathbb{S}_n - (B - A)$. Comme C_1, C_2 sont des composantes connexes distinctes de $\mathbb{S}_n - B$, le chemin γ doit rencontrer A . Le premier point d'intersection de γ avec A appartient à la frontière de C_1 . Donc U contient un point de C_1 , ce qui montre le résultat. \square

Remarque. Les deux composantes connexes du complémentaire d'un cercle dans le plan sont homéomorphes à des disques ouverts. Mais ceci n'est pas vrai en dimension supérieure.



En effet, l'adhérence de la composante connexe bornée du complémentaire dans \mathbb{R}^3 de la *sphère à cornes d'Alexander* ci-dessus est homéomorphe à \mathbb{B}_3 . En particulier, la sphère à cornes d'Alexander est homéomorphe à \mathbb{S}_2 . Mais son complémentaire dans \mathbb{S}_3 n'est pas simplement connexe (en fait, son groupe fondamental n'est pas de type fini), voir par exemple [Rol, page 80].

Le théorème d'invariance du domaine de Brouwer

On a déjà énoncé et démontré en l'introduction (corollaire 1.1), une première version du théorème d'invariance du domaine de Brouwer, à savoir que si $n \neq m$, alors \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^m ne sont pas homéomorphes. Les seuls outils utilisés étaient la valeur des groupes d'homologie des sphères (théorème 5.20), et la functorialité de l'homologie singulière. On donne ci-dessous la version plus générale.

Théorème 5.26 (Théorème d'invariance du domaine de Brouwer II) *Si U, V sont des parties de \mathbb{R}^n homéomorphes, et si U est ouvert dans \mathbb{R}^n , alors V est ouvert dans \mathbb{R}^n .*

Démonstration. L'espace \mathbb{R}^n est homéomorphe à l'ouvert de \mathbb{S}_n , complémentaire de n'importe quel point de \mathbb{S}_n . Ce théorème est donc équivalent au théorème obtenu

en remplaçant \mathbb{R}^n par \mathbb{S}_n . Soit y un point de V , et $h : U \rightarrow V$ un homéomorphisme. Soit x dans U tel que $h(x) = y$, et A un voisinage de x homéomorphe à \mathbb{B}_n , et de frontière B homéomorphe à \mathbb{S}_{n-1} . Soit $A' = f(A)$ et $B' = f(B)$. Par le lemme 5.22, l'espace $\mathbb{S}_n - A'$ est connexe. Par le théorème 5.25, l'espace $\mathbb{S}_n - B'$ admet deux composantes connexes. Comme $\mathbb{S}_n - B' = (\mathbb{S}_n - A') \cup (A' - B')$ et que $\mathbb{S}_n - A'$ et $A' - B'$ sont connexes et disjoints, ce sont les composantes connexes de $\mathbb{S}_n - B'$. Donc $A' - B'$ est ouvert dans \mathbb{S}_n , car dans un espace localement connexe par arcs, comme l'est l'ouvert $\mathbb{S}_n - B'$ de \mathbb{S}_n , les composantes connexes sont ouvertes (voir l'appendice, avant la sous-section A.2). Comme $y' \in A' - B' \subset V$, ceci montre que V est ouvert. \square

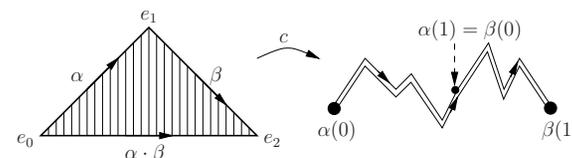
Rappelons qu'une variété topologique est un espace topologique (en général supposé métrisable, séparable), dans lequel tout point x admet un voisinage homéomorphe à un ouvert de \mathbb{R}^n . Si X est connexe, l'entier n ci-dessus est bien défini, et est indépendant du point x . Cet entier est appelé la *dimension* de X .

5.4 Groupe fondamental et homologie : le théorème d'Hurewicz

Dans toute cette partie, l'anneau des coefficients \mathbb{A} est l'anneau des entiers \mathbb{Z} .

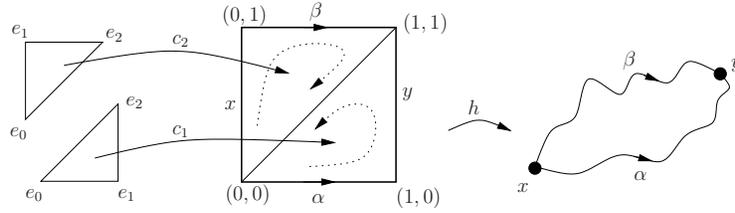
Soit X un espace topologique. On rappelle que, via l'identification de $[0, 1]$ avec Δ_1 par $t \mapsto (1-t)e_0 + te_1$, on identifie un chemin dans X avec un 1-simplexe singulier de X .

Lemme 5.27 *Si α, β sont deux chemins composables dans X , alors il existe une 2-chaîne singulière à coefficients entiers $c \in C_2(X, \mathbb{Z})$ telle que $\alpha \cdot \beta = \alpha + \beta - \partial c$.*



Démonstration. On pose $c : \Delta_2 \rightarrow X$ l'unique application telle que $c((1-s)e_1 + se_2) = \beta(s)$, $c((1-s)e_0 + se_2) = (\alpha \cdot \beta)(s)$, $c((1-s)e_0 + se_1) = \alpha(s)$, et c est constante sur les segments parallèles à $[e_1, \frac{1}{2}(e_0 + e_2)]$. Il est immédiat de vérifier que c est continue, avec $\partial c = \beta - \alpha \cdot \beta + \alpha$. \square

Lemme 5.28 *Si α, β sont deux chemins homotopes dans X , alors il existe une 2-chaîne singulière à coefficients entiers $c \in C_2(X, \mathbb{Z})$ telle que $\alpha = \beta + \partial c$.*



Démonstration. Soit $h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ une homotopie (relativement extrémités) entre α et β . On note c_1, c_2 les 2-simplexes singuliers de $[0, 1] \times [0, 1]$, qui sont les uniques applications affines telles que $c_1(e_0) = (0, 0), c_1(e_1) = (1, 0), c_1(e_2) = (1, 1)$ et $c_2(e_0) = (0, 0), c_2(e_1) = (0, 1), c_2(e_2) = (1, 1)$. Pour $z \in X$, on note $c_z : \Delta_2 \rightarrow X$ le 2-simplexe singulier de X constant en z , dont le bord ∂c_z est $(1 - 1 + 1)\epsilon_z = \epsilon_z$ respectivement, avec ϵ_z le chemin constant en z . On pose alors $c = h \circ c_1 - h \circ c_2 - c_x + c_y$, qui est une 2-chaîne singulière à coefficients entiers. Il est immédiat de vérifier que $\partial c = \alpha - \beta$. \square

Proposition 5.29 Soit X un espace topologique pointé en $x \in X$. L'application $\tilde{\phi}$ de l'ensemble des lacets en x dans $H_1(X, \mathbb{Z})$, qui à un lacet α associe la classe d'homologie du 1-simplexe singulier α , passe au quotient en un morphisme de groupes $\phi : \pi_1(X, x) \rightarrow H_1(X, \mathbb{Z})$, appelé morphisme de Hurewicz.

Démonstration. D'abord, tout lacet α est un 1-simplexe singulier qui est un 1-cycle, car $\partial \alpha = \alpha(1) - \alpha(0) = 0$, donc $\tilde{\phi}$ est bien définie.

L'application $\tilde{\phi}$ passe au quotient par le lemme 5.28. Elle est compatible avec les lois de compositions $\tilde{\phi}(\alpha \cdot \beta) = \tilde{\phi}(\alpha) + \tilde{\phi}(\beta)$ par le lemme 5.27. Enfin, si $\bar{\alpha}$ est le chemin inverse de α , alors, comme $\alpha \cdot \bar{\alpha}$ est homotope au lacet constant en x , et comme un 1-simplexe singulier constant est un bord, il découle des lemmes 5.27 et 5.28 que $\tilde{\phi}(\bar{\alpha}) = -\tilde{\phi}(\alpha)$. Le résultat s'en déduit. \square

Avant d'énoncer le théorème de Hurewicz, on donne quelques rappels de théorie des groupes.

Soit G un groupe. Le sous-groupe des commutateurs $[G, G]$ (auss appelé sous-groupe dérivé) de G est le sous-groupe de G engendré par les commutateurs $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ avec x, y dans G . Par exemple, si G est abélien, alors son sous-groupe des commutateurs est trivial.

On rappelle que $[G, G]$ est distingué, car $a[x, y]a^{-1} = [axa^{-1}, aya^{-1}]$. Le quotient $G/[G, G]$ s'appelle l'abélianisé de G . C'est le "plus grand quotient abélien" de G , au sens que si H est un groupe abélien, et si $f : G \rightarrow H$ est un morphisme de groupes, alors il existe un morphisme de groupes $\tilde{f} : G/[G, G] \rightarrow H$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & H \\ \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \\ G/[G, G] & & \end{array}$$

Par exemple, l'abélianisé du groupe libre engendré par S est le groupe abélien libre engendré par S :

$$L(x_1, \dots, x_n) / [L(x_1, \dots, x_n), L(x_1, \dots, x_n)] = \mathbb{Z}^n.$$

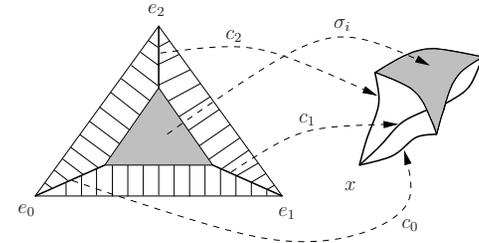
Théorème 5.30 (Théorème de Hurewicz) Si X est un espace topologique, connexe par arcs, pointé en x , alors le morphisme de Hurewicz $\phi : \pi_1(X, x) \rightarrow H_1(X, \mathbb{Z})$ est surjectif, et de noyau le sous-groupe des commutateurs de $\pi_1(X, x)$.

Le premier groupe d'homologie de X à coefficients entiers s'identifie donc à l'abélianisé du groupe fondamental de X . En particulier, lorsque $\pi_1(X, x)$ est abélien, alors $H_1(X, \mathbb{Z})$ est isomorphe à $\pi_1(X, x)$. Si X est simplement connexe, alors $H_1(X, \mathbb{Z}) = 0$.

Démonstration. Pour montrer que ϕ est surjective, montrons que tout 1-cycle singulier $\sum_{i=1}^k n_i \sigma_i$ de X est homologue à un lacet. Quitte à dupliquer les σ_i en changeant les noms, on peut supposer que $n_i = \pm 1$. Comme $-\sigma$ est homologue à $\bar{\sigma}$, on peut supposer que $n_i = 1$. Si σ_i n'est pas un lacet, comme $\partial(\sum_{i=1}^k \sigma_i) = 0$, il existe j tel que σ_i et σ_j sont compossables. Comme $\sigma_i + \sigma_j$ est homologue à $\sigma_i \cdot \sigma_j$, et par récurrence, on peut donc supposer que chaque σ_i est un lacet. Comme X est connexe par arcs, soit α_i un chemin d'origine x et d'extrémité l'origine de σ_i . Comme $\alpha_i \cdot \sigma_i \cdot \bar{\alpha}_i$ est homologue à σ_i , on peut supposer que chaque σ_i est un lacet en x_0 . Alors $\sum_{i=1}^k \sigma_i$ est homologue à $\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \dots \cdot \sigma_k$.

Le sous-groupe des commutateurs de $\pi_1(X, x)$ est contenu dans $\ker \phi$, car $H_1(X, \mathbb{Z})$ est abélien. Réciproquement, montrons que, pour tout lacet α homologue à zéro, l'image de la classe d'homotopie de α dans l'abélianisé de $\pi_1(X, x)$ est triviale. Soit $\sum_{i=1}^k n_i \sigma_i$ un 2-cycle singulier tel que $\partial(\sum_{i=1}^k n_i \sigma_i) = \alpha$.

Chaque σ_i est homotope, donc homologue, à un 2-simplexe singulier dont les trois sommets sont égaux à x . En effet, on note λ_t l'homothétie euclidienne de rapport t et de centre le barycentre de Δ_2 . On considère les chemins c_0, c_1, c_2 joignant x à chaque sommet $\sigma_i(e_0), \sigma_i(e_1), \sigma_i(e_2)$ de σ_i .



Pour s dans $[0, 1]$, on considère alors l'application continue h_s de Δ_2 dans X , qui vaut $\sigma_i \circ \lambda_{\frac{1-s}{2}}^{-1}$ sur $\lambda_{\frac{1+s}{2}}(\Delta_2)$, qui vaut c_j en $(1-t)e_j + t\lambda_{\frac{1+s}{2}}(e_j)$ pour $j = 0, 1, 2$, et,

qui sur chaque composante connexe C de $\Delta_2 - (\lambda_{\frac{1+\varepsilon}{2}}(\Delta_2) \cup \cup_{j=0,1,2}[e_j, \lambda_{\frac{1+\varepsilon}{2}}(e_j)])$, est constant sur les segments perpendiculaires au côté de Δ_2 contenu dans l'adhérence de C .

On peut donc supposer que les sommets de σ_i sont égaux à x . Comme ci-dessus, on peut supposer que $n_i = \pm 1$. Pour $j = 0, 1, 2$, soit σ_{ij} la j -ème face de σ_i , de sorte que $\partial\sigma_i = \sigma_{i0} - \sigma_{i1} + \sigma_{i2}$. Comme $\alpha = \partial(\sum_{i,j} (-1)^j n_i \sigma_{ij})$, il est possible de regrouper les σ_{ij} , sauf un, par paires pour lesquels les deux coefficients $(-1)^j n_i$ valent $+1$ et -1 . Le σ_{ij} restant vaut α . On remarque que chaque σ_{ij} est un lacet en x . On note entre crochets les images des classes d'homotopie de lacets dans le groupe abélien $\pi_1(X, x) / [\pi_1(X, x), \pi_1(X, x)]$, et on utilise la notation additive. Alors, comme les termes s'annulent par paires sauf un, on a $[f] = \sum_{i,j} (-1)^j n_i [\sigma_{ij}]$. Or le lacet $\sigma_{i0} \cdot \overline{\sigma_{i1}} \cdot \sigma_{i2}$ est homotope à zéro (car il borde σ_i). Donc $[f] = \sum_i n_i ([\sigma_{i0}] - [\sigma_{i1}] + [\sigma_{i2}]) = 0$. \square

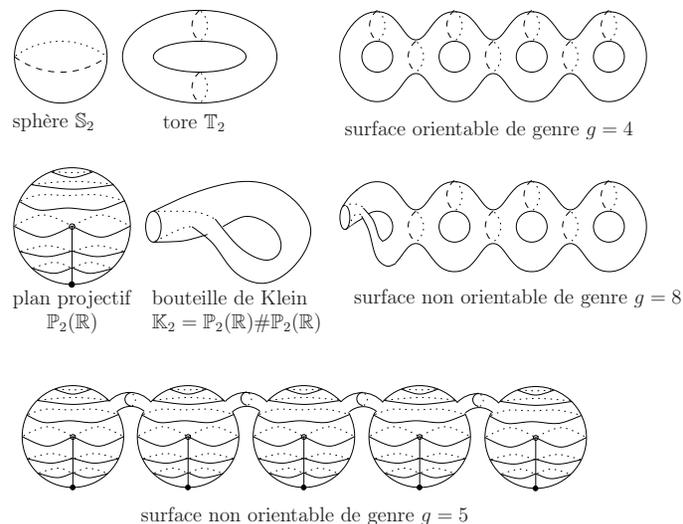
Exemples. (1) Comme le groupe fondamental du cercle est \mathbb{Z} , on retrouve que $H_1(\mathbb{S}_1, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Comme le groupe fondamental du tore $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ est \mathbb{Z}^n , on a $H_1(\mathbb{T}^n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^n$.

(2) Comme le groupe fondamental de l'espace projectif réel $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pour $n \geq 2$, on a $H_1(\mathbb{P}_n(\mathbb{R}), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Comme le groupe fondamental de l'espace projectif complexe $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ est trivial pour $n \geq 1$, on a $H_1(\mathbb{P}_n(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) = 0$.

(3) Comme le groupe fondamental de l'espace lenticulaire $L_{n,p} = U_p \backslash \mathbb{S}_{2n+1}$ est $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ pour $n, p \geq 1$, on a $H_1(L_{n,p}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

(4) Si X est le bouquet de n cercles, alors son groupe fondamental est isomorphe au groupe libre de rang n , donc $H_1(X, \mathbb{Z})$ est isomorphe à \mathbb{Z}^n . Si X est un graphe, alors par la proposition 4.13, le groupe $H_1(X, \mathbb{Z})$ est un groupe abélien libre, de type fini si X est fini.

On rappelle la classification des surfaces compactes (voir par exemple [Gra]). Une surface est une variété topologique de dimension 2. On montre que toute surface admet une unique structure, à homéomorphisme près, de variété lisse (i.e. de variété différentielle C^∞).



Si S, S' sont des surfaces connexes, et D, D' deux disques fermés dans S, S' respectivement, on appelle *somme connexe* de S, S' toute surface obtenue par recollement $S'' = (S - D) \amalg_f (S' - D')$ avec $f : \partial D \rightarrow \partial D'$ un homéomorphisme. On montre qu'à homéomorphisme près, ceci ne dépend pas des choix de D, D', f , et on note $S'' = S \# S'$.

Théorème 5.31 (Théorème de classification des surfaces compactes connexes)

Toute surface compacte connexe est homéomorphe à la somme connexe d'un nombre fini $g \geq 0$ de tores ou d'un nombre fini non nul $g \geq 1$ de plan projectifs. (Voir l'exercice ??.) \square

On convient que la somme connexe d'un ensemble vide de surfaces est la sphère \mathbb{S}_2 (car si S est une surface, alors $S \# \mathbb{S}_2$ est difféomorphe à S).

On appelle g le *genre* de la surface compacte connexe. L'exercice suivant montre que le genre d'une surface est un invariant d'homologie (et en particulier est bien défini).

Exercice E.54 Montrer que le groupe fondamental d'une surface Σ_g compacte connexe, qui est somme connexe de $g \geq 0$ tores, admet une présentation

$$\langle a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g : [a_1, b_1][a_2, b_2] \dots [a_g, b_g] = 1 \rangle$$

et que $H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z})$ est isomorphe à \mathbb{Z}^{2g} .

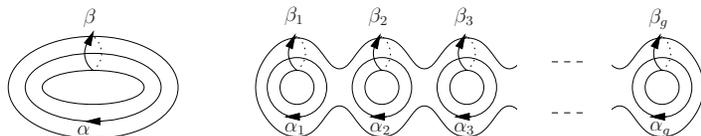
Montrer que le groupe fondamental d'une surface Σ'_g compacte connexe, qui est somme connexe de $g \geq 1$ plans projectifs, admet une présentation

$$\langle a_1, a_2, \dots, a_g : a_1^2 a_2^2 \dots a_g^2 = 1 \rangle$$

et que $H_1(\Sigma'_g, \mathbb{Z})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^{g-1} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

En déduire que deux sommes connexes finies de tores sont homéomorphes si et seulement si elles ont même nombre de tores, et que deux sommes connexes finies non nul de plan projectifs sont homéomorphes si et seulement si elles ont le même nombre de plans projectifs.

On rappelle que les lacets d'un espace topologique sont des 1-cycles. La résolution de l'exercice précédent permet de montrer que l'ensemble des classes d'homologies des lacets $\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g$ ci-dessous sur une somme connexe de g tores est une base du groupe abélien libre $H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z})$.



5.5 Autres exercices

Exercice E.55 (1) Soient (C_*, ∂_*) et (C'_*, ∂'_*) deux complexes de chaînes. On note $(f_n : C'_n \rightarrow C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de morphismes d'anneaux. Quand est-ce que la suite

$$(C_n \oplus C'_n, \begin{pmatrix} \partial_n & f_n \\ 0 & \partial'_n \end{pmatrix})_{n \in \mathbb{N}}$$

est un complexe de chaînes? Que peut-on alors dire de son homologie?

(2) Soit $\{(\alpha C_*, \alpha \partial_*)\}_{\alpha \in A}$ une famille de complexes de chaînes. On définit leur somme directe de manière évidente

$$\bigoplus_{\alpha \in A} (\alpha C_*, \alpha \partial_*) = \left(\bigoplus_{\alpha \in A} \alpha C_n, \bigoplus_{\alpha \in A} \alpha \partial_n \right)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Montrer que $H_*\left(\bigoplus_{\alpha \in A} (\alpha C_*, \alpha \partial_*)\right) = \bigoplus_{\alpha \in A} H_*(\alpha C_*, \alpha \partial_*)$.

Exercice E.56 Soient X et Y deux espaces topologiques et $f : X \rightarrow Y$ une application continue.

(1) Si X et Y sont non vides et connexes par arcs, montrer que $f_* : H_0(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H_0(Y, \mathbb{Z})$ est un isomorphisme.

(2) Plus généralement, en identifiant $H_0(W, \mathbb{Z})$ avec le groupe abélien libre engendré par l'ensemble des composantes connexes par arcs d'un espace topologique W , montrer que $f_* : H_0(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H_0(Y, \mathbb{Z})$ est l'unique morphisme de groupes envoyant une composante connexe par arcs C de X sur l'unique composante connexe par arcs de Y contenant $f(C)$.

Exercice E.57 Soit (X, A) une paire d'espaces topologiques. Montrer que l'inclusion $A \hookrightarrow X$ induit un isomorphisme sur tous les groupes d'homologie si et seulement si $H_n(X, A) = 0$ pour tout n dans \mathbb{N} .

Exercice E.58 Si X est une variété topologique, et si x est un point de X , calculer $H_n(X, X - \{x\})$.

Exercice E.59 Soit S une surface compacte connexe, somme connexe de $g \geq 0$ tores, et privée d'un ensemble fini de points. Calculer $H_n(S, \mathbb{Z})$ pour tout n dans \mathbb{N} .

Exercice E.60 Pour p, n, m dans \mathbb{N} , calculer $H_n(\mathbb{S}_p \times \mathbb{S}_m, \mathbb{Z})$.

Exercice E.61 Soit X l'espace topologique $\mathbb{S}_2 \times \mathbb{S}_1$ privé d'un ensemble fini de points. Calculer $H_n(X, \mathbb{Z})$ pour tout n dans \mathbb{N} .

Exercice E.62 Soit X un espace topologique et x un point de X . On note SX la suspension de X (voir l'appendice). Montrer que $H_n(X)$ est isomorphe à $H_{n+1}(SX)$ pour $n \geq 1$, et que $H_1(SX)$ est isomorphe au quotient $H_0(X)/i_*(H_0(\{x\}))$ (avec $i : \{x\} \hookrightarrow X$ l'inclusion).

Exercice E.63 Soient X, Y deux espaces topologiques pointés, tels que le point base admette un voisinage ouvert qui se rétracte par déformation forte sur ce point. On note $X \vee Y$ la somme connexe pointée de X et Y . Calculer $H_n(X \vee Y, \mathbb{Z})$ pour tout n dans \mathbb{N} en fonction des $H_k(X, \mathbb{Z}), H_k(Y, \mathbb{Z})$.

Exercice E.64 Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note x_k un point fixé quelconque de la sphère \mathbb{S}_k . On note

$$X = \left(\prod_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{S}_k \right) / \sim$$

l'espace topologique quotient de l'espace topologique somme disjointe des sphères \mathbb{S}_k , par la relation d'équivalence engendrée par $x_i \sim x_j$ pour tous $i, j \in \mathbb{N}$. Calculer $H_n(X, \mathbb{Z})$ pour tout n dans \mathbb{N} .

Exercice E.65 Soient p, q, r, s des entiers tels que $ps - rq = 1$. L'anneau des coefficients est \mathbb{Z} .

a) Si $g : \mathbb{S}_1 \rightarrow \mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1$ est l'application définie par $e^{i\theta} \mapsto (e^{ip\theta}, e^{iq\theta})$, calculer $g_* : H_k(\mathbb{S}_1) \rightarrow H_k(\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1)$ pour tout k dans \mathbb{N} .

b) Soit $f : \mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1 \rightarrow \mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1$ l'application définie par $(e^{i\theta}, e^{i\theta'}) \mapsto (e^{i(p\theta+r\theta')}, e^{i(q\theta+s\theta')})$. Montrer que f est un homéomorphisme, et calculer $f_* : H_k(\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1) \rightarrow H_k(\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1)$ pour tout k dans \mathbb{N} .

c) Soient $M_1 = M_2 = \mathbb{B}_2 \times \mathbb{S}_1$ et $M = M_1 \cup_f M_2$ l'espace topologique recollement de M_1 et M_2 le long de f . Calculer $H_k(M)$ pour tout k dans \mathbb{N} .

d) Calculer le groupe fondamental de M .

Exercice E.66 On note $\mathbb{S}_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ le cercle, et $T = \mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1$ le tore. Le groupe à deux éléments $G = \{\pm 1\}$ agit sur T par

$$(\epsilon, (w, z)) = (w^\epsilon, z^\epsilon)$$

avec $z, z' \in \mathbb{S}_1$ et $\epsilon \in G$. On note $S = G \backslash T$ l'espace topologique quotient et $\pi : T \rightarrow S$ la projection canonique.

Calculer $H_1(T - \{x_1, \dots, x_k\}, \mathbb{Z})$, avec x_1, \dots, x_k des points deux à deux distincts de T .

Exercice E.67 On note $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ la projection canonique, et A l'homéomorphisme du tore \mathbb{T}^2 défini par

$$A \circ \pi(u, v) = \pi(au + bv, cu + dv)$$

avec $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice 2-2 à coefficients entiers de déterminant 1.

On considère l'espace topologique quotient

$$M_A = (\mathbb{T}^2 \times [0, 1]) / \sim$$

de l'espace topologique produit $\mathbb{T}^2 \times [0, 1]$, par la relation d'équivalence engendrée par $(x, 1) \sim (Ax, 0)$ pour tout x dans \mathbb{T}^2 .

(1) Montrer que M_A est une variété topologique compacte connexe de dimension 3.

(2) Calculer $H_n(M_A, \mathbb{Z})$ pour tout n dans \mathbb{N} .

Application numérique : $A = \begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$.

5.6 Indications pour la résolution des exercices

Exercice E.52 Utiliser l'exercice E.55 (2).

Exercice E.57 Appliquer la suite exacte longue relative pour la paire (X, A) .

Exercice E.58 Utiliser le théorème d'excision, ainsi qu'un voisinage U de x dans X qui est homéomorphe à la boule \mathbb{B}_n .

Exercice E.59 On pourra montrer que la surface trouée S a le même type d'homotopie qu'un bouquet de cercles.

Exercice E.60 Utiliser la suite exacte de Mayer-Vietoris, en enlevant un point dans chacun des facteurs.

Exercice E.62 Utiliser la suite exacte de Mayer-Vietoris, en enlevant les pôles nord et sud de la suspension.

Exercice E.63 Utiliser la suite exacte de Mayer-Vietoris, en enlevant le complémentaire dans $X \vee Y$ d'un tel voisinage du point de recollement respectivement dans X et dans Y .

Exercice E.64 Méthode 1. Comme X a deux composantes connexes par arcs, on a $H_0(X, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z} + \mathbb{Z}$. On note y_k un point de \mathbb{S}_k différent de x_k pour tout $k \in \mathbb{N}$, et on note toujours y_k son image dans X par la projection canonique $\pi : \coprod \mathbb{S}_k \rightarrow X$. On remarque que la restriction de π à \mathbb{S}_k est un homéomorphisme sur son image, pour tout $k \in \mathbb{N}$. Pour calculer $H_n(X, \mathbb{Z})$ pour $n \geq 1$, on pose $U = X - \{y_k : k \neq n\}$ et V la réunion des images par π de $\mathbb{S}_k - \{x_k\}$ dans X pour $k \neq n$. Alors U, V sont ouverts (car leurs images réciproques par π le sont), avec V somme disjointe d'espaces contractiles, U se rétractant par déformation forte sur $\pi(\mathbb{S}_n)$, et $U \cap V$ ayant le type d'homotopie de la somme disjointe de \mathbb{S}_{k-1} pour $k \neq n$. La suite exacte de Mayer-Vietoris

$$H_n(U \cap V) \rightarrow H_n(U) \times H_n(V) \rightarrow H_n(X^{(p)}) \rightarrow H_{n-1}(U \cap V) \rightarrow H_{n-1}(U) \times H_{n-1}(V)$$

a sa flèche de gauche nulle, car la composante connexe par arcs de $U \cap V$ ayant le type d'homotopie de \mathbb{S}_n est homotope à zéro dans U et dans V . Donc, pour $n = 1$, on a une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow H_1(X) \rightarrow \bigoplus_{k \neq n} H_0(\mathbb{S}_{k-1}) \rightarrow (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \oplus \bigoplus_{k \neq n} H_0(\mathbb{S}_k - \{x_k\})$$

de flèche de gauche injective, et pour $n > 1$

$$0 \rightarrow H_n(\pi(\mathbb{S}_n)) \rightarrow H_n(X) \rightarrow 0.$$

Donc l'inclusion induit un isomorphisme $H_n(\pi(\mathbb{S}_n)) \simeq H_n(X)$. D'où

$$H_n(X, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} + \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ \mathbb{Z} & \text{sinon} \end{cases}.$$

Méthode 2. Dans ce qui suit, l'anneau des coefficients est \mathbb{Z} . On note $X^{(p)}$ le sous-espace de X image de $\coprod_{k=0}^n \mathbb{S}_k$. On vérifie que la topologie faible sur X définie par la famille des $X^{(p)}$ coïncide avec la topologie quotient de la topologie somme disjointe. Tout compact de X est donc contenu dans un $X^{(p)}$ pour p assez grand. Donc pour tout n dans \mathbb{N} , on a

$$\varinjlim_p H_n(X^{(p)}) = H_n(X).$$

On calcule alors $H_n(X^{(p)})$ et le morphisme $H_n(X^{(p-1)}) \rightarrow H_n(X^{(p)})$ induit par l'inclusion, par récurrence sur p . Si $p = 0$, alors $X^{(p)}$ est discret avec deux éléments, donc $H_n(X^{(0)}) = \begin{cases} \mathbb{Z} + \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

On suppose le résultat vrai pour $p - 1 \geq 0$. Soit y_p un point de \mathbb{S}_p différent de x_p , et y son image dans $X^{(p)}$. Soit $U = X - \{y\}$ et V l'image de $\mathbb{S}_p - \{x_p\}$ dans $X^{(p)}$. Alors U, V sont ouverts, avec V contractile, U se rétractant par déformation forte sur $X^{(p-1)}$, et $U \cap V$ ayant le type d'homotopie de \mathbb{S}_{p-1} . La suite exacte de Mayer-Vietoris

$$H_n(U \cap V) \rightarrow H_n(U) \times H_n(V) \rightarrow H_n(X^{(p)}) \rightarrow H_{n-1}(U \cap V) \rightarrow H_{n-1}(U) \times H_{n-1}(V)$$

donne donc une suite exacte

$$\mathbb{Z} + \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} + \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \rightarrow H_0(X^{(p)}) \rightarrow 0$$

avec flèche de gauche $(x, y) \rightarrow (x + y, 0, x + y)$, donc $H_0(X^{(p)}) = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}$. Pour $n \geq 1$ et $n \neq p, p - 1$, elle donne aussi une suite exacte

$$0 \rightarrow H_n(X^{(p-1)}) \rightarrow H_n(X^{(p)}) \rightarrow 0.$$

Pour $n = p > 1$, on a, par récurrence, une suite exacte

$$0 \rightarrow H_p(X^{(p)}) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$

avec flèche de droite nulle, car $U \cap V$ est homotope à un point dans U . Pour $n = p = 1$, on a une suite exacte

$$0 \rightarrow H_1(X^{(1)}) \rightarrow \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} + \mathbb{Z} + \mathbb{Z}$$

avec flèche de droite $(x, y) \rightarrow (x + y, 0, x + y)$, donc $H_1(X^{(1)}) = \mathbb{Z}$. Pour $n = p - 1 \geq 1$, on a, par récurrence, une suite exacte

$$\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow H_{p-1}(X^{(p)}) \rightarrow 0$$

avec la flèche de gauche nulle, car $U \cap V$ est homotope à un point dans U . D'où

$$H_n(X, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} + \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ \mathbb{Z} & \text{sinon} \end{cases}.$$

Exercice E.65 a) L'application $g_* : H_0(\mathbb{S}_1) \rightarrow H_0(\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1)$ est l'identité de \mathbb{Z} dans \mathbb{Z} . L'application $g_* : H_1(\mathbb{S}_1) \rightarrow H_1(\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1)$ est $x \mapsto (px, qx)$ de \mathbb{Z} dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. L'application $g_* : H_k(\mathbb{S}_1) \rightarrow H_k(\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1)$ est l'application nulle pour $k \geq 2$.

b) L'application $f_* : H_0(\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1) \rightarrow H_0(\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1)$ est l'identité de \mathbb{Z} dans \mathbb{Z} . L'application $f_* : H_1(\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1) \rightarrow H_1(\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1)$ est l'application linéaire de matrice $\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$ de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. L'application $f_* : H_2(\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1) \rightarrow H_2(\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1)$ est l'identité de \mathbb{Z} dans \mathbb{Z} , et l'application $g_* : H_k(\mathbb{S}_1) \rightarrow H_k(\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1)$ est l'application nulle pour $k \geq 3$.

c) Utiliser Mayer-Vietoris.

d) Utiliser van Kampen (et vérifiez que le calcul du H_1 fait en c) est le bon, par le théorème de Hurewicz).

Exercice E.66 Si $k = 0$, on a vu en cours que $\pi_1(T) = \mathbb{Z}^2$ et $H_1(T, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^2$. On suppose donc que $k \geq 1$. On renvoie à la solution de l'exercice E.32 pour le calcul de $\pi_1(T - \{x_1, \dots, x_k\})$.

Par le théorème de Hurewicz, $H_1(T - \{x_1, \dots, x_k\}, \mathbb{Z})$ étant l'abélianisé de $*_{k+1} \mathbb{Z}$, est un groupe abélien libre de rang $k + 1$:

$$H_1(T - \{x_1, \dots, x_k\}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{k+1}.$$

Exercice E.67 (1) Tout d'abord, A est bien défini, car a, b, c, d sont entiers, est continu par passage au quotient d'application continue, et est un homéomorphisme car son inverse est l'application obtenue en prenant la matrice inverse, qui est aussi à coefficients entiers.

L'espace topologique produit $X = \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$ est une variété topologique séparée. Le groupe $G = \mathbb{Z}$ agit librement et proprement sur X par $(n, (x, t)) \mapsto (A^n(x), t + n)$. Donc le quotient $G \backslash X$ est un espace topologique séparé, qui est une variété topologique car cette propriété est invariante par homéomorphisme local surjectif, connexe car image d'un connexe par une application continue et compacte car séparée et image du compact $\mathbb{T}^2 \times [0, 1]$ par une application continue.

(2) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note T_t (qui est homéomorphe au tore) l'image (compacte) de $\mathbb{T}^2 \times \{t\}$ par la projection canonique dans $G \backslash X$. On a $T_t = T_{t+k}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Soit U, V l'ouvert complémentaire de $T_{\frac{1}{2}}, T_0$ dans $G \backslash X$ respectivement. L'inclusion de $T_{\frac{1}{4}}$ dans U et V induit une équivalence d'homotopie, donc un isomorphisme en homologie. L'inclusion de la réunion disjointe $T_{\frac{1}{4}} \cup T_{\frac{3}{4}}$ dans $U \cap V$ est aussi une équivalence d'homotopie. La réunion de U et V est $G \backslash X$.

On utilise dans la suite l'anneau de coefficients \mathbb{Z} . Par la suite exacte de Mayer-Vietoris, on a une suite exacte

$$H_k(U) \oplus H_k(V) \rightarrow H_k(U \cup V) \rightarrow H_{k-1}(U \cap V),$$

donc pour $k \geq 4$, on a $H_k(G \backslash X) = 0$. (Ceci découle aussi du fait que $G \backslash X$ est une variété compacte sans bord de dimension 3.)

Toujours par le théorème de Mayer-Vietoris, on a une suite exacte

$$H_3(U) \oplus H_3(V) \rightarrow H_3(U \cup V) \xrightarrow{\phi_7} H_2(U \cap V) \xrightarrow{\phi_6},$$

$$H_2(U) \oplus H_2(V) \xrightarrow{\phi_5} H_2(U \cup V) \xrightarrow{\phi_4} H_1(U \cap V) \xrightarrow{\phi_3},$$

$$H_1(U) \oplus H_1(V) \xrightarrow{\phi_2} H_1(U \cup V) \xrightarrow{\phi_1} H_1(U \cap V) \xrightarrow{\phi_0} H_0(U) \oplus H_0(V).$$

Comme $H_3(U) = H_3(V) = 0$, l'application ϕ_7 est injective, et l'application ϕ_6 est l'application $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \rightarrow (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ définie par $(p, q) \mapsto (p + q, -(p + q))$. Donc $H_3(G \backslash X) = \mathbb{Z}$. (Ceci découle aussi de la dualité de Poincaré en montrant que $G \backslash X$ est orientable, car X l'est et l'action de G préserve l'orientation.)

On note $f : T_{\frac{3}{4}} \rightarrow T_{\frac{1}{4}}$ l'homéomorphisme $(x, \frac{3}{4}) \mapsto (Ax, \frac{1}{4})$ et $g : T_{\frac{3}{4}} \rightarrow T_{\frac{1}{4}}$ l'homéomorphisme $(x, \frac{3}{4}) \mapsto (x, \frac{1}{4})$. Alors le diagramme suivant est commutatif, où les flèches non indiquées sont les applications induites par les inclusions, et C_1, C_2 sont les composantes connexes de $U \cap V$:

$$\begin{array}{ccc} H_1(U \cap V) & \xrightarrow{\phi_3 = (i_* \circ -j_*)} & H_1(U) \oplus H_1(V) \\ \parallel & & \uparrow \qquad \qquad \uparrow \\ H_1(C_1) \oplus H_1(C_2) & \begin{pmatrix} id & f_* \\ -id & -g_* \end{pmatrix} & H_1(T_{\frac{1}{4}}) \oplus H_1(T_{\frac{3}{4}}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H_1(T_{\frac{1}{4}}) \oplus H_1(T_{\frac{3}{4}}) & & \end{array}$$

On remarque que ϕ_0 est l'application $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \rightarrow (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ définie par $(p, q) \mapsto (p + q, -(p + q))$.

Par exactitude de la suite de Mayer-Victoris, on a une suite exacte

$$0 \rightarrow \text{im } \phi_2 = \ker \phi_1 \rightarrow H_1(G \setminus X) \rightarrow \text{im } \phi_1 = \ker \phi_0 = \mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

[A suivre]

6 Homologie cellulaire

Le but de ce chapitre est d'introduire, pour la sous-catégorie des CW-complexes de la catégorie des espaces topologiques, une théorie de l'homologie, qui soit facile à calculer, tout en donnant le même résultat que l'homologie singulière.

6.1 Le complexe de chaînes cellulaires

On note \mathbb{A} un anneau commutatif unitaire, appelé *anneau des coefficients*.

Homologie relative du p -squelette par rapport au $(p-1)$ -squelette.

Lemme 6.1 *Pour tous entiers $i, p \in \mathbb{N}$,*

$$H_i(\mathbb{B}_p, \mathbb{S}_{p-1}; \mathbb{A}) = \begin{cases} \mathbb{A} & \text{si } i = p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Démonstration. On pose par convention $\mathbb{S}_{-1} = \emptyset$. Le résultat découle du calcul suivant le corollaire 5.11, et du calcul de l'homologie des sphères 5.20. \square

On rappelle que pour tout p dans \mathbb{N} , si X est un CW-complexe (voir la partie 4.3), alors $X^{(p)}$ désigne le p -squelette de X , avec $X^{(-1)} = \emptyset$.

Théorème 6.2 *Si X est un CW-complexe, avec $(e_\alpha)_{\alpha \in A_p}$ la famille de ses cellules ouvertes de dimension p , alors*

$$H_i(X^{(p)}, X^{(p-1)}; \mathbb{A}) = \begin{cases} \bigoplus_{\alpha \in A_p} \mathbb{A} & \text{si } i = p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Plus précisément, soit u un générateur de $H_p(\mathbb{B}_p, \mathbb{S}_{p-1})$ (qui est libre de rang 1 par le lemme 6.1). Pour tout α dans A_p , soit $g_\alpha : \mathbb{B}_p \rightarrow \overline{e_\alpha}$ l'application caractéristique pour la cellule ouverte e_α de X , qui est un morphisme de paires d'espaces topologiques $g_\alpha : (\mathbb{B}_p, \mathbb{S}_{p-1}) \rightarrow (X^{(p)}, X^{(p-1)})$. Alors

$$\{(g_\alpha)_*(u) : \alpha \in A_p\}$$

est une base (dite *base canonique*) du module $H_p(X^{(p)}, X^{(p-1)}; \mathbb{A})$, qui est donc libre.

Démonstration. Si $p = 0$, alors $X^{(p)}$ est un espace discret, et $X^{(p-1)}$ est vide, donc le résultat est immédiat. On suppose $p \geq 1$.

On considère le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc} (\prod_{\alpha \in A_p} \mathbb{B}_p, \prod_{\alpha \in A_p} \mathbb{S}_{p-1}) & \longrightarrow & (\prod_{\alpha \in A_p} \mathbb{B}_p, \prod_{\alpha \in A_p} \mathbb{B}_p - \{0\}) & \longleftarrow & (\prod_{\alpha \in A_p} \overset{\circ}{\mathbb{B}}_p, \prod_{\alpha \in A_p} \overset{\circ}{\mathbb{B}}_p - \{0\}) \\ \downarrow \Pi g_\alpha & & \downarrow \Pi g_\alpha & & \downarrow \Pi g_\alpha \\ (X^{(p)}, X^{(p-1)}) & \longrightarrow & (X^{(p)}, X^{(p)} - \bigcup_{\alpha \in A_p} \{g_\alpha(0)\}) & \longleftarrow & (\bigcup_{\alpha \in A_p} e_\alpha, \bigcup_{\alpha \in A_p} (e_\alpha - \{g_\alpha(0)\})) \end{array}$$

Les flèches horizontales de gauche sont des équivalences d'homotopie de paires, donc induisent un isomorphisme en homologie relative.

Les flèches horizontales de droite induisent des isomorphismes en homologie relative, par le théorème d'excision (Théorème 5.15) : en posant successivement (l'ensemble des indices étant A_p)

$$X = \coprod \mathbb{B}_p, \quad A = \coprod (\mathbb{B}_p - \{0\}), \quad U = \coprod \mathbb{S}_{p-1}$$

et

$$X = X^{(p)}, \quad A = X^{(p)} - \bigcup \{g_\alpha(0)\}, \quad U = X^{(p-1)},$$

on vérifie que $\bar{U} = U \subset \overset{\circ}{A} = A$.

Comme la flèche verticale de droite est un homéomorphisme de paires d'espaces topologiques, on en déduit que

$$H_i(X^{(p)}, X^{(p-1)}) \simeq H_i\left(\coprod_{\alpha \in A_p} \mathbb{B}_p, \coprod_{\alpha \in A_p} \mathbb{S}_{p-1}\right) = \bigoplus_{\alpha \in A_p} H_i(\mathbb{B}_p, \mathbb{S}_{p-1}),$$

et le résultat découle du lemme 6.1. \square

En particulier, si X est un CW-complexe fini, ayant n_p cellules ouvertes de dimension p , alors

$$H_i(X^{(p)}, X^{(p-1)}; \mathbb{A}) = \begin{cases} \mathbb{A}^{n_p} & \text{si } i = p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On donne ci-dessous une série de résultats destinés à mieux faire comprendre le théorème précédent : le p -squelette d'un CW-complexe, dans lequel on a écrasé en un point le $(p-1)$ -squelette, est un bouquet de sphères de dimension p , dont les groupes homologie se calculent aisément : en dimension non nulle, ce sont les sommes directes des groupes d'homologie de ces sphères.

Si X est un espace topologique et si Y est un sous-espace de X , on notera pour simplifier dans tout ce chapitre X/Y l'espace topologique quotient $X/\langle Y \rangle$ (voir la partie A.2).

Lemme 6.3 *Soit X un CW-complexe, p un élément de \mathbb{N} et $(e_\alpha)_{\alpha \in A_p}$ la famille des cellules ouvertes de dimension p de X . Alors $X^{(p)}/X^{(p-1)}$ est homéomorphe au bouquet d'une famille de sphères de dimension p indexée par A .*

Plus précisément, l'espace $S_\alpha = \bar{e}_\alpha / \partial e_\alpha$ est homéomorphe à une sphère de dimension p , que l'on munit du point base $\partial e_\alpha / \partial e_\alpha$. Alors l'inclusion $\coprod_{\alpha \in A_p} \bar{e}_\alpha \hookrightarrow X^{(p)}$ induit par passage au quotient un homéomorphisme

$$\bigvee_{\alpha \in A_p} S_\alpha \xrightarrow{\sim} X^{(p)}/X^{(p-1)}.$$

Démonstration. Ceci découle de la proposition 4.7. \square

Lemme 6.4 *Si X est un bouquet de sphères de dimension $p \geq 1$, indexées par l'ensemble non vide A , alors*

$$H_i(X, \mathbb{A}) = \begin{cases} \mathbb{A} & \text{si } i = 0 \\ \bigoplus_{\alpha \in A} \mathbb{A} & \text{si } i = p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

(La convention naturelle que le bouquet de sphères indexées par un ensemble vide est réduite à un point fait que le résultat reste valable si A est vide.)

Démonstration. Tout compact de X est contenu dans une union finie de sphères du bouquet, et $\bigoplus_A \mathbb{A}$ est la limite inductive de ses sous-modules de type fini. Donc, par la proposition 5.21, il suffit de montrer le résultat quand A est fini. On raisonne par récurrence sur le cardinal de A . Si celui-ci est 1, alors X est une sphère de dimension p , et le résultat est déjà connu. Si $\text{Card}(A) > 1$, on prend U un voisinage d'une sphère S_0 dans le bouquet, se rétractant par déformation forte sur S_0 , et V le complémentaire d'un point de S_0 différent du point base. Alors U a le type d'homotopie de la sphère de dimension p , V le type d'homotopie d'un bouquet ayant $\text{Card}(A) - 1$ sphères, et $U \cap V$ a le type d'homotopie d'un point. La suite exacte de Mayer-Vietoris, appliquée à l'espace X muni du recouvrement ouvert $\{U, V\}$ conclut alors. \square

On note par abus x le singleton $\{x\}$.

Lemme 6.5 *Si X est un espace topologique et x un point de X , alors l'inclusion $(X, \emptyset) \rightarrow (X, x)$ induit un isomorphisme*

$$H_n(X) \simeq H_n(X, x)$$

si $n \neq 0$. De plus, $H_0(X, x)$ est le module libre engendré par les composantes connexes par arcs de X ne contenant pas x .

Démonstration. La suite exacte longue d'homologie relative de la paire (X, x) (Théorème 5.10) donne une suite exacte

$$H_n(x) \longrightarrow H_n(X) \longrightarrow H_n(X, x) \longrightarrow H_{n-1}(x).$$

En utilisant le calcul de l'homologie du point, le résultat en découle. \square

Remarque. Voici une autre preuve du théorème 6.2, pour $p \geq 1$.

Comme $\mathbb{S}_{p-1} \subset \mathbb{B}_p$ est un rétracte par déformation forte de $\mathbb{B}_p - \{0\}$, le $(p-1)$ -squelette $X^{(p-1)}$ est un rétracte par déformation forte d'un voisinage de $X^{(p-1)}$ dans $X^{(p)}$ (obtenu par exemple en enlevant un point exactement par cellule ouverte de dimension p de X).

Par récurrence et l'exercice E.A.96, le p -squelette d'un CW-complexe est un espace normal.

Par la proposition 5.17, on a

$$H_i(X^{(p)}, X^{(p-1)}) \simeq H_i(X^{(p)}/X^{(p-1)}, X^{(p-1)}/X^{(p-1)}).$$

Le théorème 6.2 découle alors des lemmes 6.4 et 6.5.

Le complexe de chaînes cellulaires

Soit X un CW-complexe. Pour tout p dans \mathbb{N} , on pose

$$D_p(X) = D_p(X, \mathbb{A}) = H_p(X^{(p)}, X^{(p-1)}).$$

On identifiera par la suite $D_p(X)$ avec le module libre engendré par les p -cellules ouvertes de X , par l'unique morphisme de modules libres envoyant $(g_\alpha)_*(u)$ sur e_α , avec les notations suivant le théorème 6.2. Comme $X^{(-1)} = \emptyset$, $D_0 = H_0(X^{(0)})$ est le module libre engendré par les sommets de X .

On note $\partial : D_p(X) \rightarrow D_{p-1}(X)$ le morphisme composé de

$$H_p(X^{(p)}, X^{(p-1)}) \xrightarrow{-\delta} H_{p-1}(X^{(p-1)}) \xrightarrow{(j_{p-1})_*} H_{p-1}(X^{(p-1)}, X^{(p-2)})$$

avec δ le morphisme de bord de la suite exacte longue de la paire $(X^{(p)}, X^{(p-1)})$, et $j_k : X^{(k)} \rightarrow (X^{(k)}, X^{(k-1)})$ l'inclusion.

Lemme 6.6

$$\partial \circ \partial = 0.$$

Démonstration. Par la suite exacte longue d'homologie relative de la paire $(X^{(p)}, X^{(p-1)})$, la suite

$$H_p(X^{(p)}) \xrightarrow{(j_p)_*} H_p(X^{(p)}, X^{(p-1)}) \xrightarrow{\delta} H_{p-1}(X^{(p-1)})$$

est exacte. Donc $\partial \circ \partial = (j_{p-1})_* \circ \delta \circ (j_p)_* \circ \delta = 0$. \square

Donc $(D_*(X), \partial)$ est un complexe de chaînes, appelé le *complexe de chaînes cellulaires* de X .

Le n -ème groupe d'homologie de ce complexe de chaînes, $H_n(D_*(X))$, est appelé le n -ème *groupe d'homologie cellulaire* de X . (C'est un module sur l'anneau \mathbb{A}).

Remarque. Si X est un CW-complexe de dimension finie d , alors son n -ème groupe d'homologie cellulaire est nul pour $n > d$. Si X est un CW-complexe fini, alors son n -ème groupe d'homologie cellulaire est de type fini pour tout n .

Une application $f : X \rightarrow Y$ entre deux CW-complexes est dite *cellulaire* si elle est continue, et si $f(X^{(p)}) \subset Y^{(p)}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Théorème 6.7 Soient X, Y deux CW-complexes, et A un sous-CW-complexe de X . Toute application continue de X dans Y , cellulaire sur A , est homotope relativement à A à une application cellulaire.

Démonstration. Voir par exemple [Hat, Theorem 4.8]. \square

Les remarques suivantes découlent en particulier de ce théorème. Mais leurs preuves sont plus faciles, et essentiellement contenues dans les preuves des propositions 4.15 et 4.16.

- Un CW-complexe X est connexe si et seulement si son 1-squelette $X^{(1)}$ l'est.
- Tout chemin dans X entre deux sommets de X est homotope (relativement extrémités) à un chemin contenu dans $X^{(1)}$.
- Toute homotopie dans X (relativement extrémités) entre deux chemins contenus dans $X^{(1)}$ est homotope (relativement au bord de $[0, 1] \times [0, 1]$) à une homotopie (relativement extrémités) contenue dans $X^{(2)}$ entre ces deux chemins.

Si X, Y sont deux CW-complexes, toute application cellulaire $f : X \rightarrow Y$ induit par restriction, pour tout p dans \mathbb{N} , un morphisme de paires $f : (X^{(p)}, X^{(p-1)}) \rightarrow (Y^{(p)}, Y^{(p-1)})$. Celui-ci induit en homologie un morphisme de modules $f_p : D_p(X) = H_p(X^{(p)}, X^{(p-1)}) \rightarrow H_p(Y^{(p)}, Y^{(p-1)}) = D_p(Y)$. Par la functorialité de l'opérateur bord dans la suite exacte longue d'homologie relative, f_* est un morphisme de complexes de chaînes de $(D_*(X), \partial)$ dans $(D_*(Y), \partial)$.

Ce morphisme de complexes de chaînes induit en homologie un morphisme de modules

$$f_* : H_n(D_*(X)) \rightarrow H_n(D_*(Y))$$

pour tout n dans \mathbb{N} .

Pour pouvoir expliciter les morphismes de bord du complexe de chaînes cellulaires, on commence par définir la notion de degré d'une application d'une sphère dans elle-même.

Degré des applications de la sphère

Pour $n \geq 1$, soit $f : \mathbb{S}_n \rightarrow \mathbb{S}_n$ une application continue, et $f_* : H_n(\mathbb{S}_n) \rightarrow H_n(\mathbb{S}_n)$ l'application induite sur le n -ème groupe d'homologie. Comme $H_n(\mathbb{S}_n, \mathbb{A})$ est isomorphe à \mathbb{A} , si ξ est un générateur de $H_n(\mathbb{S}_n)$, alors il existe $d \in \mathbb{A}$ tel que $f_*(\xi) = d\xi$. Cet élément d ne dépend pas du choix du générateur, car tout autre générateur est de la forme $u\xi$, avec u un élément inversible de \mathbb{A} , et $f_*(u\xi) = d(u\xi)$. On appelle d le *degré* de f (à coefficient dans \mathbb{A}), et on le note $\deg(f)$.

Remarque. On utilise en général l'anneau des coefficients $\mathbb{A} = \mathbb{Z}$, auquel cas le degré est un entier. Pour $n = 1$, l'entier $\deg(f)$ s'interprète alors intuitivement comme le nombre de fois que le cercle source \mathbb{S}_1 s'enroule sur le cercle but \mathbb{S}_1 , à homotopie près.

Remarque. Les propriétés suivantes du degré sont immédiates, et laissées en exercice.

- Si f s'étend continuellement en une application continue de \mathbb{B}_{n+1} dans \mathbb{S}_n , alors on a $\deg(f) = 0$. En particulier, le degré d'une application constante est nulle.
- Si f est homotope à g , alors $\deg(f) = \deg(g)$. En particulier, le degré d'une application non surjective est nul.

- Le degré de l'identité est 1.
- Si $f, g : \mathbb{S}_n \rightarrow \mathbb{S}_n$ sont deux applications continues, alors

$$\deg(f \circ g) = \deg(f) \deg(g) .$$

Proposition 6.8 Pour $n \geq 1$, le degré de l'application antipodale $-id : \mathbb{S}_n \rightarrow \mathbb{S}_n$ est $(-1)^{n+1}$.

Démonstration. On considère d'abord la réflexion $r : \mathbb{S}_n \rightarrow \mathbb{S}_n$ définie par $r(x_0, x_1, \dots, x_n) = (-x_0, x_1, \dots, x_n)$. Pour $n = 0$, l'application $r_* : H_0(\mathbb{S}_0) \rightarrow H_0(\mathbb{S}_0)$ est l'application $(x, y) \mapsto (y, x)$, car r échange les deux points de \mathbb{S}_0 , qui forment une base de $H_0(\mathbb{S}_0)$.

Par naturalité de l'opérateur bord δ de la suite exacte de Mayer-Vietoris associée au recouvrement de \mathbb{S}_n par ses hémisphères nord U et sud V (qui sont préservés par r), on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H_{n+1}(\mathbb{S}_{n+1}) & \xrightarrow{\delta} & H_n(\mathbb{S}_n) \\ \downarrow r_* & & \downarrow r_* \\ H_{n+1}(\mathbb{S}_{n+1}) & \xrightarrow{\delta} & H_n(\mathbb{S}_n) \end{array} .$$

Si $n = 0$ (voir la preuve du théorème 5.20), alors δ est injective, d'image le noyau de l'application $H_0(\mathbb{S}_0) \rightarrow H_0(U) \times H_0(V)$, qui est $(x, y) \mapsto (x + y, -(x + y))$, donc $\text{im } \delta = \{(x, -x) : x \in \mathbb{A}\}$. Par conséquent $r_* : H_1(\mathbb{S}_1) \rightarrow H_1(\mathbb{S}_1)$ est $-id$.

Si $n > 0$, alors δ est un isomorphisme, donc par récurrence, $r_* : H_n(\mathbb{S}_n) \rightarrow H_n(\mathbb{S}_n)$ est $-id$. En particulier, le degré de r est -1 .

Maintenant, toute rotation de \mathbb{S}_n est homotope à l'identité. Deux réflexions sont conjuguées par une rotation, donc sont homotopes, donc ont le même degré. L'application antipodale est la composée de $n + 1$ réflexions (sur chacun des hyperplans de coordonnées). Ceci montre le résultat. \square

Calcul des morphismes de bords cellulaires

Soit X un CW-complexe, $(e_\alpha)_{\alpha \in A_p}$ la famille des cellules ouvertes de dimension p de X , pour p dans \mathbb{N} . On note $g_\alpha : \mathbb{B}_p \rightarrow X^{(p-1)}$ l'application caractéristique et $f_\alpha = g_{\alpha|_{\partial \mathbb{B}_p}} : \mathbb{S}_{p-1} \rightarrow X^{(p-1)}$ l'application d'attachement de la cellule e_α . On identifie \mathbb{S}_p avec l'espace quotient $\mathbb{B}_p/\mathbb{S}_{p-1}$ par un homéomorphisme quelconque fixé. On note $\pi^{(p)} : X^{(p)} \rightarrow X^{(p)}/X^{(p-1)}$ la projection canonique. Pour tout α dans A_p , l'application g_α induit par passage au quotient un homéomorphisme $\tilde{g}_\alpha : \mathbb{S}_p = \mathbb{B}_p/\mathbb{S}_{p-1} \rightarrow \bar{e}_\alpha/\partial e_\alpha$. On note S_α la sphère $\bar{e}_\alpha/\partial e_\alpha$ pointée en $\partial e_\alpha/\partial e_\alpha$, et $\pi_\alpha : \bigvee_{\beta \in A_p} S_\beta \rightarrow S_\alpha$ l'application qui écrase sur le point base les sphères du bouquet différentes de S_α . Enfin, soit $\phi : \bigvee_{\alpha \in A_p} S_\alpha \rightarrow X^{(p)}/X^{(p-1)}$ l'homéomorphisme obtenu par le lemme 6.3.

Si $p \geq 2$, pour tout i dans A_p et j dans A_{p-1} , on considère la composition des applications

$$\mathbb{S}_{p-1} \xrightarrow{f_i} X^{(p-1)} \xrightarrow{\pi^{(p-1)}} X^{(p-1)}/X^{(p-2)} \xrightarrow{\phi^{-1}} \bigvee_{\beta \in A_{p-1}} S_\beta \xrightarrow{\pi_j} S_j \xrightarrow{\tilde{g}_j^{-1}} \mathbb{S}_{p-1}$$

et on note $d_{i,j}$ son degré.

Si $p = 1$, pour toute arête e_i de X , et tout sommet e_j de X , alors par convention, $d_{i,j}$ vaut 1 si e_j est l'extrémité de e_i , -1 si e_j est l'origine de e_i , et 0 sinon.

Remarque. (1) En termes imagés, lorsque $\mathbb{A} = \mathbb{Z}$, l'entier $d_{i,j}$ mesure le nombre de fois que le bord de la i -ème cellule de dimension p s'enroule autour de la j -ème cellule de dimension $p - 1$ par l'application d'attachement.

(2) Le degré d'une application non surjective est nul. Un compact du $(p - 1)$ -squelette de X ne contient qu'un nombre fini de centres $g_\beta(0)$ de cellules ouvertes e_β de dimension $p - 1$. L'image de l'application d'attachement d'une cellule de dimension p est compacte, car X est séparé. Donc pour i dans A_p fixé, seuls un nombre fini de $d_{i,j}$ sont non nuls lorsque j parcourt A_{p-1} .

Proposition 6.9 Le morphisme de bord $\partial : D_p(X) = H_p(X^{(p)}, X^{(p-1)}) \rightarrow D_{p-1}(X) = H_{p-1}(X^{(p-1)}, X^{(p-2)})$ est le morphisme

$$\begin{array}{ccc} \partial : \bigoplus_{i \in A_p} \mathbb{A} e_i & \longrightarrow & \bigoplus_{j \in A_{p-1}} \mathbb{A} e_j \\ e_i & \longmapsto & \sum_{j \in A_{p-1}} d_{i,j} e_j \end{array} .$$

Démonstration. C'est immédiat si $p = 0$, car $\partial : D_0(X) \rightarrow D_{-1}(X)$ est l'application nulle. Si $p = 1$, alors $\partial : H_1(X^{(1)}, X^{(0)}) \rightarrow H_0(X^{(0)})$ est l'opérateur bord de la suite exacte longue d'homologie relative, et le résultat découle de la définition des $d_{i,j}$.

On suppose donc $p \geq 1$ et on calcule $\partial : D_{p+1}(X) \rightarrow D_p(X)$. Soient i dans A_{p+1} et j dans A_p . Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H_{p+1}(X^{(p+1)}, X^{(p)}) & \xrightarrow{\delta} & H_p(X^{(p)}) \\ \uparrow (g_i)_* & & \uparrow (f_i)_* \\ H_{p+1}(\mathbb{B}_{p+1}, \mathbb{S}_p) & \xrightarrow{\delta} & H_p(\mathbb{S}_p) \end{array}$$

est commutatif, par functorialité de l'opérateur bord de la suite exacte longue d'homologie relative. De plus, la flèche horizontale basse est un isomorphisme, car $p \geq 1$.

On considère le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} H_p(X^{(p)}) & \xrightarrow{(j_p)_*} & H_p(X^{(p)}, X^{(p-1)}) & \xleftarrow{(g_j)_*} & H_p(\mathbb{B}_p, \mathbb{S}_{p-1}) \\ \downarrow (\pi^{(p)})_* & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ H_p(X^{(p)}/X^{(p-1)}) & \xrightarrow{\simeq} & H_p(X^{(p)}/X^{(p-1)}, *) & & H_p(\mathbb{B}_p/\mathbb{S}_{p-1}, *) \\ & & (\pi_j \circ \phi^{-1})_* \searrow & & \uparrow \sim \\ & & H_p(S_j) & \xleftarrow{(\tilde{g}_j)_*} & H_p(\mathbb{B}_p/\mathbb{S}_{p-1}) \end{array} ,$$

avec $*$ désignant le singleton Z/Z dans l'espace topologique quotient Y/Z pour Z une partie de Y . Chaque flèche marquée \simeq est le morphisme induit par la projection

canonique $(Y, Z) \rightarrow (Y/Z, *)$, qui est un isomorphisme par la proposition 5.17. Chaque flèche marquée \sim est le morphisme induit par l'inclusion $U = (U, \emptyset) \hookrightarrow (U, *)$, qui est un isomorphisme car $p \geq 1$, par le lemme 6.5.

Enfin, après identification de $H_p(\bigvee_{\beta \in A_p} S_\beta)$ avec le module libre engendré par les S_β , le morphisme $(\pi_j)_* : H_p(\bigvee_{\beta \in A_p} S_\beta) \rightarrow H_p(S_j)$ est l'application j -ème coordonnée. \square

6.2 Homologie cellulaire et homologie singulière

Le but de cette partie est de montrer que les homologies cellulaires et singulières des CW-complexes coïncident, de manière fonctorielle.

Théorème 6.10 *Pour tout CW-complexe X et tout n dans \mathbb{N} , il existe un isomorphisme de modules*

$$H_n(D_*(X)) \xrightarrow{\sim} H_n(X)$$

de sorte que, pour toute application cellulaire $f : Y \rightarrow Z$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H_n(D_*(Y)) & \xrightarrow{\sim} & H_n(Y) \\ \downarrow f_* & & \downarrow f_* \\ H_n(D_*(Z)) & \xrightarrow{\sim} & H_n(Z) \end{array}$$

Démonstration. Étape 1. Si $k \leq p$, l'inclusion $X^{(p+1)} \rightarrow X$ induit un isomorphisme de modules $H_k(X^{(p+1)}) \rightarrow H_k(X)$.

Démonstration. Par la suite exacte longue d'homologie relative,

$$H_{k+1}(X^{(p+i+1)}, X^{(p+i)}) \rightarrow H_k(X^{(p+i)}) \rightarrow H_k(X^{(p+i+1)}) \rightarrow H_k(X^{(p+i+1)}, X^{(p+i)})$$

est une suite exacte. Par le théorème 6.2, le module de gauche est nul si $k \leq p$ et $i \geq 1$, et le module de droite est nul si $k \leq p$. Donc $H_k(X^{(p+i)}) \simeq H_k(X^{(p+i+1)})$. Comme tout compact de X est contenu dans $X^{(p+i)}$ pour i suffisamment grand, la proposition 5.21 implique que $\varinjlim_i H_k(X^{(p+i)}) \simeq H_k(X)$. Le résultat en découle. \square

Étape 2. Le morphisme de modules $j_* : H_p(X^{(p+1)}) \rightarrow H_p(X^{(p+1)}, X^{(p-2)})$ induit par l'inclusion est un isomorphisme.

Démonstration. Comme $X^{(-1)} = \emptyset$, il suffit de montrer que le morphisme

$$H_p(X^{(p+1)}, X^{(i-1)}) \rightarrow H_p(X^{(p+1)}, X^{(i)})$$

est un isomorphisme pour $i = 0, \dots, p-2$. On utilise pour cela le lemme suivant

Lemme 6.11 *Si X est un espace topologique et $A \subset B \subset X$, alors les inclusions $i : (B, A) \rightarrow (X, A)$ et $j : (X, A) \rightarrow (X, B)$ induisent une suite exacte de complexes de chaînes*

$$0 \longrightarrow C_*(B, A) \longrightarrow C_*(X, A) \longrightarrow C_*(X, B) \longrightarrow 0$$

qui induit une suite exacte longue en homologie

$$\dots \xrightarrow{\delta} H_p(B, A) \xrightarrow{i_*} H_p(X, A) \xrightarrow{j_*} H_p(X, B) \xrightarrow{\delta} H_{p-1}(B, A) \longrightarrow \dots$$

(appelée suite exacte longue du triplet).

Démonstration. Par passage au quotient, on a un morphisme surjectif

$$C_*(X)/C_*(A) \longrightarrow C_*(X)/C_*(B),$$

dont le noyau est $C_*(B)/C_*(A)$. Le résultat découle alors des rappels d'algèbre homologique. \square

Remarque. Il est immédiat de montrer que la suite exacte longue du triplet est fonctorielle, au sens suivant. Soit $f : X \rightarrow X'$ une application continue, et $A' \subset B'$ deux parties de X' telles que $f(A) \subset A'$ et $f(B) \subset B'$. Alors f induit trois morphismes de paires d'espaces topologiques $f|_B : (B, A) \rightarrow (B', A')$, $f : (X, A) \rightarrow (X', A')$, $f : (X, B) \rightarrow (X', B')$. Le triplet $((f|_B)_*, f_*, f'_*)$ est un morphisme de suites exactes courtes de complexes de chaînes entre $0 \rightarrow C_*(B, A) \rightarrow C_*(X, A) \rightarrow C_*(X, B) \rightarrow 0$ et $0 \rightarrow C_*(B', A') \rightarrow C_*(X', A') \rightarrow C_*(X', B') \rightarrow 0$. Il donne donc en homologie un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & H_p(B, A) & \longrightarrow & H_p(X, A) & \longrightarrow & H_p(X, B) & \xrightarrow{\delta} & H_{p-1}(B, A) & \dots \\ & \downarrow (f|_B)_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & & \\ \dots & H_p(B', A') & \longrightarrow & H_p(X', A') & \longrightarrow & H_p(X', B') & \xrightarrow{\delta} & H_{p-1}(B', A') & \dots \end{array}$$

On applique maintenant ce lemme au triplet $X = X^{(p+1)}$, $B = X^{(i)}$, $A = X^{(i+1)}$. On a donc une suite exacte

$$H_p(X^{(i)}, X^{(i+1)}) \xrightarrow{i_*} H_p(X^{(p+1)}, X^{(i+1)}) \xrightarrow{j_*} H_p(X^{(p+1)}, X^{(i)}) \xrightarrow{\delta} H_{p-1}(X^{(i)}, X^{(i+1)})$$

dont les modules aux extrémités sont nuls si $p-1 > i$. Ceci démontre l'étape 2. \square

Étape 3. On considère le quadruplet $(X^{(p+1)}, X^{(p)}, X^{(p-1)}, X^{(p-2)})$, et le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} H_p(X^{(p-1)}, X^{(p-2)}) & & H_p(X^{(p+1)}, X^{(p-2)}) & \longrightarrow & H_p(X^{(p+1)}, X^{(p)}) \\ & \searrow & \ell_* \nearrow & & \\ & & H_p(X^{(p)}, X^{(p-2)}) & & \\ & m_* \nearrow & & & \searrow k_* \\ H_{p+1}(X^{(p+1)}, X^{(p)}) & \xrightarrow{\partial_{p+1}} & H_p(X^{(p)}, X^{(p-1)}) & \xrightarrow{\partial_p} & H_{p-1}(X^{(p-1)}, X^{(p-2)}) \end{array}$$

qui est commutatif, par construction de ∂_{p+1} . Les modules en haut à droite et en haut à gauche sont nuls. La suite exacte du triplet $(X^{(p)}, X^{(p-1)}, X^{(p-2)})$ implique que $\ker \partial_p = \text{im } k_*$ et que k_* est injective.

La suite exacte du triplet $(X^{(p+1)}, X^{(p)}, X^{(p-2)})$ implique que $\text{im } m_* = \ker \ell_*$ et que ℓ_* est surjective.

Comme $k_* : H_p(X^{(p)}, X^{(p-2)}) \rightarrow \text{im } k_*$ est un isomorphisme, le module $\text{im } k_*$ est surjecte par $\ell_* \circ k_*^{-1}$ sur $H_p(X^{(p+1)}, X^{(p-2)})$.

Par commutativité, on a $\partial_{p+1} = k_* \circ m_*$ et donc $\text{im } \partial_{p+1} = \ker \ell_* \circ k_*^{-1}$. Par conséquent,

$$H_p(D_*(X)) = \ker \partial_p / \text{im } \partial_{p+1} = \text{im } k_* / \ker \ell_* \circ k_*^{-1} \simeq \text{im } \ell_* \circ k_*^{-1} = H_p(X^{(p+1)}, X^{(p-2)}).$$

Par les étapes 1 et 2, ce dernier module est isomorphe à $H_p(X)$.

La functorialité de l'isomorphisme $H_p(D_*(X)) \simeq H_p(X)$ est claire. Le théorème 6.10 en découle. \square

Corollaire 6.12 *Si X est un CW-complexe de dimension finie n , alors $H_i(X) = 0$ pour $i > n$. Si X est un CW-complexe fini, et si l'anneau des coefficients \mathbb{A} est un corps, alors $H_i(X)$ est de dimension finie pour tout i dans \mathbb{N} . Si X est un CW-complexe fini, et si $\mathbb{A} = \mathbb{Z}$, alors $H_i(X)$ est un groupe abélien de type fini pour tout i dans \mathbb{N} .*

Démonstration. Ceci découle de l'isomorphisme entre homologie cellulaire et homologie singulière de X , et des résultats de finitude pour l'homologie cellulaire. \square

Caractéristique d'Euler des CW-complexes.

Soit X un espace topologique, avec $H_i(X, \mathbb{R})$ de dimension finie pour tout i dans \mathbb{N} , et nulle si i est assez grand. On appelle *caractéristique d'Euler* de X la caractéristique d'Euler-Poincaré du complexe des chaînes singulières de X , c'est-à-dire l'entier

$$\chi(X) = \sum_{k \in \mathbb{N}} (-1)^k \dim H_k(X, \mathbb{R}).$$

On remarque que la caractéristique d'Euler est un invariant topologique et même homotopique : si deux espaces topologiques X et Y ont le même type d'homotopie, alors $\chi(X) = \chi(Y)$.

Corollaire 6.13 *Soit X un CW-complexe fini, ayant n_i cellules ouvertes de dimension i , alors*

$$\chi(X) = \sum_{i \in \mathbb{N}} (-1)^i n_i.$$

Démonstration. Ceci découle de l'isomorphisme entre homologie cellulaire et homologie singulière de X et des rappels d'algèbre homologique (proposition 5.3). \square

Exemples. (1) Si X est contractile, alors $\chi(X) = 1$. En particulier $\chi(\mathbb{B}_n) = 1$.

$$(2) \chi(\mathbb{S}_n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

$$(3) \chi(\mathbb{T}_n) = 0.$$

(4) La caractéristique d'Euler d'une surface compacte connexe Σ qui est somme connexe de g tores (donc de genre g) est $2 - 2g$, car Σ est homéomorphe à un CW-complexe obtenu par recollement d'une 2-cellule sur un bouquet de $2g$ cercles (ayant $2g$ arêtes et 1 sommet), voir l'exemple (4) de la partie 4.3.

(5) Soit X un graphe connexe fini. Alors la caractéristique d'Euler de X vaut $\chi(X) = n_0 - n_1$ avec n_0 le nombre de sommets de X et n_1 le nombre d'arêtes de X (voir aussi l'exercice E.43).

6.3 Homologie des espaces projectifs

On rappelle que l'espace projectif réel $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ est construit par récurrence avec $\mathbb{P}_0(\mathbb{R})$ un point et $\mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{R})$ obtenu par recollement d'une seule cellule de dimension $n+1$ sur $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ avec pour application d'attachement $f_{n+1} : \mathbb{S}_n \rightarrow \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ la projection canonique, qui est un revêtement à 2 feuillets.

Donc le complexe de chaînes cellulaires de $X = \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$, à coefficients dans l'anneau des coefficients \mathbb{A} , est :

$$D_0(X) = \mathbb{A} \xleftarrow{\partial_1} \mathbb{A} \leftarrow \dots \leftarrow \mathbb{A} \xleftarrow{\partial_n} D_n(X) = \mathbb{A} \leftarrow 0 \leftarrow 0 \leftarrow \dots$$

En prenant $\mathbb{A} = \mathbb{R}$, le calcul de la caractéristique d'Euler de $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ est alors immédiat :

$$\chi(\mathbb{P}_n(\mathbb{R})) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On effectue maintenant le calcul des morphismes de bord du complexe de chaînes cellulaires de $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$.

Proposition 6.14 *Le morphisme $\partial_p : D_p(\mathbb{P}_n(\mathbb{R})) = \mathbb{A} \rightarrow D_{p-1}(\mathbb{P}_n(\mathbb{R})) = \mathbb{A}$ est la multiplication par $1 + (-1)^{p+1}$.*

Démonstration. La projection canonique $f_{p+1} : \mathbb{S}_p \rightarrow \mathbb{P}_p(\mathbb{R})$ induit par passage au quotient une application continue $\tilde{f}_{p+1} : \mathbb{S}_p/\mathbb{S}_{p-1} \rightarrow \mathbb{P}_p(\mathbb{R})/\mathbb{P}_{p-1}(\mathbb{R})$. L'espace $\mathbb{P}_p(\mathbb{R})/\mathbb{P}_{p-1}(\mathbb{R})$ s'identifie à la sphère \mathbb{S}_p et le quotient $\mathbb{S}_p/\mathbb{S}_{p-1}$ s'identifie au bouquet de deux sphères $\mathbb{S}_p \vee \mathbb{S}_p$. L'application $\tilde{f}_{p+1} : \mathbb{S}_p \vee \mathbb{S}_p \rightarrow \mathbb{S}_p$ est l'application qui vaut l'identité sur la première sphère et l'application antipodale sur la deuxième. Par la proposition 6.8, le degré de l'application antipodale est $(-1)^{p+1}$. Le degré de la composition

$$\mathbb{S}_p \xrightarrow{f_{p+1}} \mathbb{P}_p(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}_p(\mathbb{R})/\mathbb{P}_{p-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{S}_p$$

est donc $1 + (-1)^{p+1}$, car la projection canonique $\mathbb{S}_p \rightarrow \mathbb{S}_p/\mathbb{S}_{p-1} = \mathbb{S}_p \vee \mathbb{S}_p$ induit en homologie l'application de $H_p(\mathbb{S}_p) = \mathbb{A}$ dans $H_p(\mathbb{S}_p \vee \mathbb{S}_p) = \mathbb{A} \times \mathbb{A}$ définie par $x \mapsto (x, x)$.

Comme le p -squelette de $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ est $\mathbb{P}_p(\mathbb{R})$, le résultat découle alors de la proposition 6.9. \square

Le calcul de l'homologie (cellulaire, donc singulière) de $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ est alors immédiat. On note \mathbb{A}_2 le noyau de la multiplication par 2 de \mathbb{A} dans \mathbb{A} .

Corollaire 6.15 Pour p, n dans \mathbb{N} , on a

$$H_p(\mathbb{P}_n(\mathbb{R}), \mathbb{A}) = \begin{cases} \mathbb{A} & \text{si } p = 0 \text{ ou } p = n \text{ impair} \\ \mathbb{A}/2\mathbb{A} & \text{si } p \text{ impair avec } 1 \leq p \leq n-1 \\ \mathbb{A}_2 & \text{si } p \text{ pair avec } 1 \leq p \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} . \quad \square$$

Par exemple, si $\mathbb{A} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, alors $H_p(\mathbb{P}_n(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } p \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$

Si $\mathbb{A} = \mathbb{Z}$, alors $H_p(\mathbb{P}_n(\mathbb{R}), \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } p = 0 \text{ ou } p = n \text{ impair} \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } p \text{ impair avec } 1 \leq p \leq n-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$

De même, l'espace projectif complexe $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ est construit par récurrence avec $\mathbb{P}_0(\mathbb{C})$ un point et $\mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{C})$ obtenu par recollement d'une seule cellule de dimension $2n+2$ sur $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ avec pour application d'attachement $\mathbb{S}_{2n+1} \rightarrow \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ la projection canonique.

Donc le complexe de chaînes cellulaires de $X = \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$, à coefficients dans l'anneau des coefficients \mathbb{A} , est :

$$D_0(X) = \mathbb{A} \leftarrow 0 \leftarrow \mathbb{A} \leftarrow 0 \leftarrow \dots \leftarrow D_{2n-1}(X) = 0 \leftarrow D_{2n}(X) = \mathbb{A} \leftarrow 0 \leftarrow 0 \dots$$

En prenant $\mathbb{A} = \mathbb{R}$, le calcul de la caractéristique d'Euler de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ est alors immédiat :

$$\chi(\mathbb{P}_n(\mathbb{C})) = n + 1 .$$

Comme les opérateurs bords du complexe de chaînes cellulaires de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ sont nuls, le calcul de l'homologie des espaces projectifs complexes est alors immédiat :

Théorème 6.16 Pour p, n dans \mathbb{N} , on a

$$H_p(\mathbb{P}_n(\mathbb{C}), \mathbb{A}) = \begin{cases} \mathbb{A} & \text{si } p \text{ pair et } 0 \leq p \leq 2n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} . \quad \square$$

6.4 Autres exercices

Exercice E.68 Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note x_k un point fixé quelconque de la sphère \mathbb{S}_k . On note

$$X = \left(\prod_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{S}_k \right) / \sim$$

l'espace topologique quotient de l'espace topologique somme disjointe des sphères \mathbb{S}_k , par la relation d'équivalence engendrée par $x_i \sim x_j$ pour tous i, j dans \mathbb{N} . Calculer $H_n(X, \mathbb{Z})$ pour tout n dans \mathbb{N} .

Exercice E.69 Soit n un entier positif non nul.

a) Montrer que si $a : \mathbb{S}_n \rightarrow \mathbb{S}_n$ est l'application antipodale $x \mapsto -x$, et si $f, g : \mathbb{S}_n \rightarrow \mathbb{S}_n$ sont deux applications continues telles que $f(x) \neq g(x)$ pour tout x dans \mathbb{S}_n , alors f et $a \circ g$ sont homotopes.

b) En déduire le théorème de Borsuk-Ulam : si $f : \mathbb{S}_{2n} \rightarrow \mathbb{S}_{2n}$ est une application continue, alors il existe un point x de \mathbb{S}_{2n} tel que $f(x) = \pm x$.

c) Montrer qu'il n'existe pas d'application continue f de \mathbb{S}_{2n} dans \mathbb{S}_{2n} telle que x et $f(x)$ sont orthogonaux pour tout x dans \mathbb{S}_{2n} .

d) Montrer le théorème de peignage des sphères : il existe un champ de vecteurs qui ne s'annule pas sur \mathbb{S}_n si et seulement si n est impair.

Exercice E.70 a) Montrer que le cercle $\mathbb{S}_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ admet une structure de CW-complexe X_n dont le 0-squelette est $U_n = \{e^{2i\pi \frac{k}{n}} : k = 0, \dots, n-1\}$.

b) Calculer le complexe de chaînes cellulaires de ce CW-complexe.

c) En déduire, pour tout n dans \mathbb{N} , quel est le degré de l'application de \mathbb{S}_1 dans \mathbb{S}_1 définie par $z \mapsto z^n$.

Exercice E.71 Soient n, k deux éléments de \mathbb{N} avec $n \geq 2$.

a) Montrer qu'il existe une application continue $f : \mathbb{S}_n \rightarrow \mathbb{S}_n$ de degré k .

b) Montrer qu'il existe un espace topologique simplement connexe X tel que $H_n(X, \mathbb{Z})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$, et $H_i(X, \mathbb{Z}) = 0$ si $i \neq 0, n$.

c) Montrer que pour tout groupe abélien de type fini G , il existe un espace topologique simplement connexe X tel que $H_n(X, \mathbb{Z}) \simeq G$, et $H_i(X, \mathbb{Z}) = 0$ si $i \neq 0, n$. Un tel espace X est appelé *espace de Moore*.

Exercice E.72 a) Si X et Y sont des CW-complexes finis, montrer que

$$\chi(X \times Y) = \chi(X)\chi(Y) .$$

b) Si X est un CW-complexe fini, union de deux sous-complexes A et B , montrer que

$$\chi(X) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B) .$$

c) Si X est un CW-complexe, et $p : \bar{X} \rightarrow X$ un revêtement, montrer que \bar{X} admet une unique structure de CW-complexe telle que p soit cellulaire et tout relèvement par p d'une cellule ouverte de X est une cellule ouverte de \bar{X} .

d) Si X est un CW-complexe fini, et $p : \bar{X} \rightarrow X$ un revêtement à n feuilletés, montrer que

$$\chi(\bar{X}) = n\chi(X) .$$

6.5 Indications pour la résolution des exercices

Exercice E.68 Il s'agit bien du même exercice que l'exercice E.64, mais voici une autre solution, plus courte, utilisant l'homologie cellulaire.

Pour $k \geq 1$, la sphère \mathbb{S}_k admet une structure de CW-complexe, ayant un sommet x_k et une cellule de dimension k , avec application d'attachement constante en x_k . Donc X admet une structure de CW-complexe, ayant deux sommets x, y avec x la classe commune des points x_k , et pour tout $k \geq 1$, une cellule de dimension k , avec application d'attachement constante en x . On vérifie que la topologie faible sur X définie par la famille des p -squelettes $X^{(p)}$ coïncide avec la topologie quotient de la topologie somme disjointe (soit $\pi : \coprod \mathbb{S}_k \rightarrow X$ la projection canonique; alors U est un ouvert de X si et seulement si $\pi^{-1}(U)$ est un ouvert de $\coprod \mathbb{S}_k$, si et seulement si $\pi^{-1}(U) \cap \coprod_{k=0}^p \mathbb{S}_k$ est un ouvert de $\coprod_{k=0}^p \mathbb{S}_k$ pour tout p , si et seulement si $U \cap X^{(p)}$ est un ouvert de $X^{(p)}$ pour tout p).

Le complexe de chaînes cellulaires de X à coefficients entiers est donc

$$\mathbb{Z} + \mathbb{Z} \xleftarrow{\partial_1} \mathbb{Z} \xleftarrow{\partial_2} \mathbb{Z} \xleftarrow{\partial_3} \mathbb{Z} \xleftarrow{\partial_4} \dots$$

Comme le degré d'une application constante de \mathbb{S}_m dans \mathbb{S}_m est 0, les morphismes de bords ∂_k sont nuls pour $k \geq 1$.

$$\text{Donc } H_n(X, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} + \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ \mathbb{Z} & \text{sinon} \end{cases}.$$

Exercice E.69 a) Utiliser l'image du segment $[f(x), a \circ g(x)]$ par la rétraction radiale de $\mathbb{B}_{n+1} - \{0\}$ sur \mathbb{S}_n .

- b) Par l'absurde, en considérant les degrés.
- c) Utiliser b).
- d) Utiliser c).

Exercice E.70 a) Les 1-cellules sont $t \mapsto e^{2i\pi \frac{k+t}{n}}$.

b) Il s'agit de

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{A}^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} & \longleftarrow & \mathbb{A}^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & 0 \dots \\ (x_{i+1} - x_i)_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} & \longleftarrow & (x_i)_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} & & & & \end{array}$$

c) L'application $z \mapsto z^n$ est cellulaire du cercle X_n dans le cercle X_1 .

Exercice E.71 a) Utiliser le cas $n = 1$ démontré dans l'exercice ci-dessus, et utiliser les suspensions : si $f : \mathbb{S}_n \rightarrow \mathbb{S}_n$ est une application continue, alors $Sf : S\mathbb{S}_n \simeq \mathbb{S}_{n+1} \rightarrow S\mathbb{S}_n \simeq \mathbb{S}_{n+1}$ est encore continue (voir l'appendice pour les notations).

b) Considérer l'espace X obtenu par recollement de \mathbb{B}_{n+1} sur \mathbb{S}_n par une application $f : \partial\mathbb{B}_{n+1} = \mathbb{S}_n \rightarrow \mathbb{S}_n$ continue de degré k .

c) Utiliser le théorème de structure des groupes abéliens de type fini, et considérer un espace somme connexe pointée (voir exercice E.63).

7 Cohomologie singulière et cellulaire

Soit \mathbb{A} un anneau commutatif unitaire. Par module, on entendra module sur l'anneau \mathbb{A} . Soit M un module fixé, appelé *module des coefficients*. Les cas $A = M = \mathbb{Z}$ et $A = M = k$ avec k un corps sont particulièrement importants.

7.1 Le foncteur Hom et les complexes de cochaînes

Si N est un module, on note $\text{Hom}(N, M)$ (ou $\text{Hom}_{\mathbb{A}}(N, M)$) le module des morphismes de modules de N dans M . Le module $\text{Hom}(N, \mathbb{A})$ est appelé le *dual* de N . Si $f : N \rightarrow N'$ est un morphisme de modules, on note ${}^t f : \text{Hom}(N', M) \rightarrow \text{Hom}(N, M)$ le morphisme de modules ${}^t f : \phi \mapsto \phi \circ f$. On vérifie que ${}^t id = id$, et ${}^t(f \circ g) = {}^t g \circ {}^t f$. On a donc défini un foncteur (contravariant) de la catégorie des modules dans elle-même, noté $\text{Hom}(\cdot, M)$.

Si N, N' sont des modules, on a une bijection de l'ensemble des applications bilinéaires de $N \times N'$ dans M dans l'ensemble des morphismes de modules de N dans $\text{Hom}(N', M)$, qui à une application bilinéaire ϕ associe le morphisme de modules (dit *induit par ϕ*) $x \mapsto \{y \mapsto \phi(x, y)\}$.

On remarque aussi que

$$\text{Hom}\left(\bigoplus_{\alpha} N_{\alpha}, M\right) \simeq \prod_{\alpha} \text{Hom}(N_{\alpha}, M).$$

Proposition 7.1 Si $C \xrightarrow{f} C' \xrightarrow{g} C'' \rightarrow 0$ est une suite exacte de modules, alors $\text{Hom}(C, M) \xleftarrow{{}^t f} \text{Hom}(C', M) \xleftarrow{{}^t g} \text{Hom}(C'', M) \leftarrow 0$ est une suite exacte de modules.

Si f est injective et si C'' est un module libre, alors ${}^t f$ est surjectif

Remarque. On résume cette proposition en disant que le foncteur $\text{Hom}(\cdot, M)$ est exact à droite. Remarque que par exemple, avec $A = M = \mathbb{Z}$, la suite $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0$ est exacte, mais que le morphisme $\text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ avec $f \mapsto \{x \mapsto f(2x)\}$ n'est pas surjective.

Démonstration. Si c'' est dans $\ker {}^t g$, alors $c''(g(x')) = 0$ pour tout x' dans C' . Donc si g est surjective, alors ${}^t g$ est injective.

Si $g \circ f = 0$, alors ${}^t g \circ {}^t f = 0$, donc $\text{im } {}^t g$ est contenu dans $\ker {}^t f$. Réciproquement, si c' est dans $\ker {}^t f$, alors $c'(f(x)) = 0$ pour tout x dans C . Donc, si $\ker g$ est contenu dans $\text{im } f$, alors c' est nulle sur $\ker g$. On définit le morphisme de modules $c'' : C'' \rightarrow M$ par $c''(x) = c'(y)$ si $g(y) = x$ (ce qui est possible car g est surjective et ne dépend pas des choix car c' s'annule sur $\ker g$). Alors ${}^t g(c'') = c'$, ce qui montre que $\ker {}^t f$ est contenu dans $\text{im } {}^t g$.

Si C'' est libre, en considérant une base de C'' , on construit un morphisme de modules $h : C'' \rightarrow C'$ tel que $g \circ h = \text{id}$. On montre alors facilement par exactitude que C' est la somme directe de $h(C'')$ et de $f(C)$. Si f est injective, pour tout c dans

$\text{Hom}(C, M)$, on définit $c' : C' \rightarrow M$ par $c'(f(x)) = c(x)$ pour tout x dans C et c' s'annule sur $h(C'')$. Alors ${}^t f(c') = c$, donc ${}^t f$ est surjective. \square

Soit $C = (C_p, \partial_p)_{p \in \mathbb{N}}$ un complexe de chaînes. On note $\text{Hom}(C, M)$ (ou $\text{Hom}_{\mathbb{A}}(C, M)$ quand on veut préciser l'anneau de base) le complexe de cochaînes $(C^p, \partial^p)_{p \in \mathbb{N}}$, avec $C^p = \text{Hom}(C_p, M)$ et $\partial^p = {}^t \partial_{p+1}$. La vérification que $\partial^{p+1} \circ \partial^p = 0$ pour tout p dans \mathbb{N} est immédiate. Si $(f_p : C_p \rightarrow D_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est un morphisme de complexes de chaînes, alors $(f^p = {}^t f_p : \text{Hom}(D_p, M) \rightarrow \text{Hom}(C_p, M))_{p \in \mathbb{N}}$ est un morphisme de complexes de cochaînes. On a donc défini un foncteur (contravariant) de la catégorie des complexes de chaînes dans la catégorie des complexes de chaînes, encore noté $\text{Hom}(\cdot, M)$.

La cohomologie du complexe de cochaînes $\text{Hom}(C, M)$ est notée

$$H^*(C, M).$$

Exemples. (1) Si (X, Y) est une paire d'espaces topologiques, et $C_*(X, Y; \mathbb{A})$ est le complexe de chaînes singulières relatives à coefficients dans \mathbb{A} , alors le complexe de cochaînes $C^*(X, Y) = C^*(X, Y; M) = \text{Hom}(C_*(X, Y; \mathbb{A}), M)$ est appelé le *complexe de cochaînes singulières relatives à coefficients dans \mathbb{A}* . L'opérateur bord $\partial : C^n(X) \rightarrow C^{n+1}(X)$ est donné par

$$\partial c(\sigma) = c(\partial \sigma) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i c(\partial_i \sigma) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i c(\sigma|_{((e_0, \dots, \widehat{e}_i, \dots, e_{n+1}))})$$

pour toute cochaîne singulière c dans $C^n(X)$ et tout $(n+1)$ -simplexe singulier $\sigma : \Delta_{n+1} \rightarrow X$ (avec les notations de la proposition 5.7).

Le module n -ème groupe de cohomologie de $C^*(X, Y)$ est noté

$$H^n(X, Y) = H^n(X, Y; M),$$

et appelé le *n -ème groupe de cohomologie singulière relative de (X, Y) à coefficients dans M* . Pour $Y = \emptyset$, ce module est noté $H^n(X) = H^n(X, M)$, et appelé le *n -ème groupe de cohomologie singulière de X à coefficients dans M* .

(2) Soit X un CW-complexe, et $D_*(X, \mathbb{A})$ le complexe de chaînes cellulaires de X à coefficients dans \mathbb{A} (voir la partie 6.1). Le module n -ème groupe de cohomologie du complexe de cochaînes $\text{Hom}(D_*(X, \mathbb{A}), M)$ est appelé le *n -ème groupe de cohomologie cellulaire de X à coefficients dans M* . On le note $D^*(X) = D^*(X, M)$.

Proposition 7.2 *Si C est un complexe de chaînes, alors*

$$\begin{array}{ccc} H^n(C, M) \times H_n(C, \mathbb{A}) & \longrightarrow & M \\ ([c], [z]) & \longmapsto & c(z) \end{array}$$

est une application bilinéaire (appelée produit de Kronecker).

Démonstration. Pour toutes cochaînes c, c' et toutes chaînes σ, σ' , on a, en utilisant le fait que le bord et le cobord sont duaux,

$$(c + \partial c')(\sigma + \partial \sigma') = c(z) + c'(\partial \sigma) + \partial c(\sigma') + c'(\partial \circ \partial \sigma').$$

En particulier, si c est un cocycle, et σ un cycle, alors $(c + \partial c')(\sigma + \partial \sigma') = c(z)$. Donc le produit de Kronecker est bien défini. Il est immédiat qu'il est bilinéaire. \square

Exercice E.73 *Si $\mathbb{A} = M = \mathbb{Z}$, montrer que le produit de Kronecker induit une application*

$$\theta : H^n(C, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}(H_n(C, \mathbb{Z}), \mathbb{Z})$$

qui est surjective.

Proposition 7.3 *On suppose que $\mathbb{A} = M = k$ est un corps. On note $E' = \text{Hom}(E, k)$ l'espace vectoriel dual d'un espace vectoriel E sur k .*

Si C est un complexe de chaînes d'espaces vectoriels de dimension finie, alors l'application $\theta : H^n(C, k) \rightarrow H_n(C, k)'$ induite par le produit de Kronecker est un isomorphisme. En particulier, $H^n(C, k)$ et $H_n(C, k)$ sont isomorphes.

Démonstration. On rappelle que $(E/F)' = \{f \in E' : f|_F = 0\}$ si F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E .

Si C^n est une n -cochaîne et σ_{n+1} une $(n+1)$ -chaîne, alors $\partial^n c^n(\sigma_{n+1}) = c^n(\partial_{n+1} \sigma_{n+1})$. Donc l'espace vectoriel des cocycles Z^n est le sous-espace vectoriel de $C^n = C'_n$ des formes linéaires s'annulant sur l'espace vectoriel des bords B_n . D'après le rappel, $Z^* = (C_*/B_*)'$. Comme les espaces sont de dimension finie, on a donc $(Z^*)' = C_*/B_*$. Donc

$$(H^*)' = (Z^*/B^*)' = \{f \in (Z^*)' : f \circ \partial^* = 0\} = \{x \in C_*/B_* : \partial_* x = 0\} = Z_*/B_* = H_*.$$

Comme un espace vectoriel de dimension finie et son dual sont isomorphes, le résultat en découle. \square

Corollaire 7.4 *Si X est un CW-complexe fini, et k un corps, alors on a un isomorphisme naturel entre le n -ème groupe de cohomologie cellulaire et le dual du n -ème groupe d'homologie cellulaire de X à coefficients dans k :*

$$H^n(D_*(X), k) \simeq H_n(D_*(X), k)' \simeq H_n(D_*(X), k). \quad \square$$

7.2 Propriétés de la cohomologie

Les propriétés suivantes de la cohomologie singulière et cellulaire sont analogues à celles de l'homologie singulière et cellulaire. Elles se démontrent en appliquant le foncteur $\text{Hom}(\cdot, M)$ aux divers complexes de chaînes singulières et cellulaires (qui sont des modules libres), et en utilisant la proposition 7.1. Le détail des preuves est laissé en exercice (c'est un excellent exercice de révision!), voir aussi [Hat].

Fonctorialité de la cohomologie

Un morphisme de paires d'espaces topologiques $f : (X, Y) \rightarrow (X', Y')$ induit un morphisme de complexes de chaînes $f_* : C_*(X, Y) \rightarrow C_*(X', Y')$. Le morphisme de complexes de cochaînes $f^* : C^*(X', Y') \rightarrow C^*(X, Y)$ induit en cohomologie un morphisme de modules $f^* : H^*(X', Y') \rightarrow H^*(X, Y)$. On a clairement $id^* = id$ et $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$. Donc $H^*(\cdot, \cdot; M)$ est un foncteur contravariant de la catégorie des paires d'espaces topologiques dans la catégorie des modules.

De même, $H^*(\cdot, M)$ est un foncteur contravariant de la catégorie des espaces topologiques dans la catégorie des modules, ainsi que $H^*(D^*(\cdot), M)$.

Cohomologie du point et en degré 0

La cohomologie de l'espace réduit à un point se calcule facilement :

$$H^n(\{x\}, M) = \begin{cases} M & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Si $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ est la famille des composantes connexes par arcs d'un espace topologique X , alors

$$H^n(X) = \prod_{\alpha \in A} H^n(X_\alpha) .$$

Ceci découle d'une propriété du foncteur Hom rappelé au début de cette partie 7.1.

Si X est un espace topologique connexe par arcs, alors

$$H^0(X, M) = \text{Hom}(H_0(X, M), M) = M .$$

Invariance homotopique

Si $f, g : X \rightarrow Y$ sont deux applications continues entre deux espaces topologiques, qui sont homotopes, alors $f_* = g_* : H^n(Y) \rightarrow H^n(X)$ pour tout n . Donc deux espaces topologiques ayant même type d'homotopie ont leurs groupes de cohomologie singulière isomorphes. En particulier, si X est un espace contractile, alors

$$H^n(X, M) = \begin{cases} M & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Suite exacte longue relative de cohomologie

Soit (X, Y) une paire d'espaces topologiques. Si $i : Y \rightarrow X$ et $j : (X, \emptyset) \rightarrow (X, Y)$ sont les inclusions, alors

$$0 \leftarrow C^*(Y) \xleftarrow{i^*} C^*(X) \xleftarrow{j^*} C^*(X, Y) \leftarrow 0$$

est, par la proposition 7.1 appliquée à la suite exacte courte analogue en homologie, une suite exacte courte de complexes de cochaînes.

Donc, pour toute paire d'espaces topologiques (X, Y) , il existe pour tout n dans \mathbb{N} un morphisme de modules

$$\delta : H^n(X, Y) \rightarrow H^{n+1}(Y)$$

tels que

1. pour tout morphisme de paires $f : (X, Y) \rightarrow (X', Y')$, on a

$$\delta \circ f_* = f_* \circ \delta ,$$

2. si $i : Y \rightarrow X$ et $j : X = (X, \emptyset) \rightarrow (X, Y)$ sont les inclusions, alors la suite de modules et de morphismes de modules

$$\dots \leftarrow H^{n+1}(X, Y) \xleftarrow{\delta} H^n(Y) \xleftarrow{i^*} H^n(X) \xleftarrow{j^*} H^n(X, Y) \xleftarrow{\delta} H^{n-1}(Y) \leftarrow \dots$$

est exacte.

Excision

Soit X un espace topologique, A un sous-espace de X , et $U \subset A$ avec $\overline{U} \subset \overset{\circ}{A}$. L'inclusion des paires d'espaces topologiques $(X - U, A - U) \rightarrow (X, A)$ induit un isomorphisme (dit *d'excision*) en cohomologie : pour tout n dans \mathbb{N} ,

$$H^n(X, A) \simeq H^n(X - U, A - U) .$$

Suite exacte de Mayer-Vietoris

Soit X un espace topologique, U, V deux ouverts de X recouvrant X , et

$$\begin{array}{ccc} U \cap V & \xrightarrow{i_1} & U \\ i_2 \downarrow & & \downarrow j_1 \\ V & \xrightarrow{j_2} & X \end{array}$$

le diagramme commutatif des inclusions. Il existe une suite exacte longue de modules, dite suite exacte de Mayer-Vietoris de X ,

$$\dots \rightarrow H^{n+1}(X) \xleftarrow{\delta} H^n(U \cap V) \xrightarrow{((i_1)_* - (i_2)_*)} H^n(U) \times H^n(V) \xrightarrow{(j_1)_* + (j_2)_*} H^n(X)$$

$$\xleftarrow{\delta} H^{n-1}(U \cap V) \rightarrow \dots$$

qui est naturel pour les applications continues, au sens que pour tout espace topologique X' , muni d'un recouvrement ouvert $\{U', V'\}$, pour toute application continue $f : X \rightarrow X'$ telle que $f(U) \subset U', f(V) \subset V'$, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & H^n(U \cap V) & \xrightarrow{((i_1)_* - (i_2)_*)} & H^n(U) \times H^n(V) & \xrightarrow{(j_1)_* + (j_2)_*} & H^n(X) & \xleftarrow{\delta} & H^{n-1}(U \cap V) \dots \\ & \downarrow (f_{U \cap V})_* & & \downarrow (f_U)_* \times (f_V)_* & & \downarrow f_* & & \downarrow (f_{U \cap V})_* \\ \dots & H^n(U' \cap V') & \xrightarrow{((i'_1)_* - (i'_2)_*)} & H^n(U') \times H^n(V') & \xrightarrow{(j'_1)_* + (j'_2)_*} & H^n(X') & \xleftarrow{\delta} & H^{n-1}(U' \cap V') \dots \end{array}$$

Théorème de Hurewicz

Si X est un espace topologique connexe par arcs et x un point base de X , si $\mathbb{A} = M = \mathbb{Z}$, alors l'application

$$\begin{array}{ccc} H^1(X, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & \text{Hom}(\pi_1(X, x), \mathbb{Z}) \\ [c] & \longmapsto & \{ [\alpha] \mapsto c(\widehat{\alpha}) \} \end{array} ,$$

avec $\widehat{\alpha}$ le 1-cycle singulier identifié au lacet α , avec $[\alpha]$ la classe d'homotopie du lacet α , et avec $[c]$ la classe de cohomologie du 1-cocycle c . Par le théorème de Hurewicz en homologie, on a donc

$$H^1(X, \mathbb{Z}) \simeq \text{Hom}(H_1(X, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \simeq \text{Hom}(\pi_1(X, x), \mathbb{Z}) .$$

7.3 Autres exercices

Exercice E.74 Soit X une variété topologique séparée de dimension d , et x_1, \dots, x_k des points deux à deux distincts de X . Calculer $H^n(X, X - \{x_1, \dots, x_k\}; \mathbb{Z})$ pour tout n dans \mathbb{N} .

7.4 Indications pour la résolution des exercices

Exercice E.74 Dans ce qui suit, le module des coefficients est \mathbb{Z} . Comme X est une variété topologique séparée de dimension d , il existe U_1, \dots, U_k des voisinages ouverts deux à deux disjoints de x_1, \dots, x_k , qui sont homéomorphes à la boule ouverte de dimension d . On pose $A = X - \{x_1, \dots, x_k\}$ et $U = X - \bigcup_{i=1}^k U_i$. Alors U est fermé, A ouvert, et $U \subset A$. Pour tout n dans \mathbb{N} , par le théorème d'excision, $H^n(X, A) \simeq H^n(X - U, A - U) = H^n(\bigcup_{i=1}^k U_i, \bigcup_{i=1}^k U_i - \{x_i\}) = \bigoplus_{i=1}^k H^n(U_i, U_i - \{x_i\})$. Par invariance homotopique de la cohomologie relative,

$$H^n(U_i, U_i - \{x_i\}) \simeq H^n(\overline{U}_i, \overline{U}_i - \{x_i\}) \simeq H^n(\mathbb{B}_d, \mathbb{B}_d - \{0\}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = d \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} ,$$

par un résultat du cours. Donc

$$H^n(X, X - \{x_1, \dots, x_k\}) = \begin{cases} \mathbb{Z}^k & \text{si } n = d \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

A Annexe : rappels de topologie générale

Les références pour cet appendice sont [Bou, Dug, Dix, Pau2]. On suppose connues, essentiellement pour des exemples, les notions d'espaces vectoriels normés et d'espaces métriques. Les preuves qui ne sont pas données ci-dessous sont les mêmes que dans le cas particulier des espaces métriques, ou sont laissées en exercice.

A.1 Généralités

Une *espace topologique* est un ensemble X muni d'un ensemble \mathcal{O} de parties de X tel que

1. toute intersection finie d'éléments de \mathcal{O} appartient à \mathcal{O} ,
2. toute union d'éléments de \mathcal{O} appartient à \mathcal{O} .

Par abus, on note souvent X le couple (X, \mathcal{O}) . Par convention, une intersection vide de parties d'un ensemble E est égal à E , et une union vide de parties de E est égale à la partie vide. Donc \emptyset et X appartiennent à \mathcal{O} . Les éléments de \mathcal{O} sont appelés les *ouverts* de X , et \mathcal{O} une *topologie* sur l'ensemble X . Les complémentaires des ouverts s'appellent les *fermés*. Toute union finie de fermés est fermée, toute intersection de fermés est fermée, \emptyset et X sont fermés. Étant donné un ensemble de parties d'un ensemble E , stable par intersections et par unions finies, l'ensemble des complémentaires de ces parties est une topologie sur E .

Une bijection $f : X \rightarrow Y$ entre deux espaces topologiques est un *homéomorphisme* si l'image réciproque par f de la topologie de Y est la topologie de X . Deux espaces topologiques X, Y sont *homéomorphes* s'il existe un homéomorphisme de X dans Y . « Être homéomorphe à » est une relation d'équivalence sur tout ensemble d'espaces topologiques. Une propriété P sur les espaces topologiques est dite *invariante par homéomorphismes* si tout espace topologique homéomorphe à un espace topologique ayant la propriété P admet aussi la propriété P .

Exemple 1 : Si X est un ensemble, alors $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$ est une topologie sur X , dite *topologie grossière*. L'espace (X, \mathcal{O}) est alors dit *grossier*. L'ensemble $\mathcal{P}(X)$ de toutes les parties de X est une topologie sur X , appelée *topologie discrète*. L'espace topologique $(X, \mathcal{P}(X))$ est alors dit *discret*. « Être grossier » et « être discret » sont des propriétés invariantes par homéomorphismes.

Exemple 2 : Si (X, d) est un espace métrique, en notant $B(x, r)$ la boule ouverte de centre $x \in X$ et de rayon $r > 0$, alors l'ensemble des parties U de X telles que

$$\forall x \in U, \exists r > 0, \quad B(x, r) \subset U$$

est une topologie sur X , appelée *topologie induite par la distance*. Sauf mention contraire, tout espace métrique sera muni de la topologie induite par sa distance.

Exemple 3 : Soit k un corps commutatif, et $\mathbb{A}_n(k) = k^n$. Un *fermé de Zariski* de $\mathbb{A}_n(k)$ est une partie de la forme

$$F = \{x \in k^n : \forall i \in I, P_i(x) = 0\},$$

où $(P_i)_{i \in I}$ est une famille de polynômes sur k^n . L'ensemble des fermés de Zariski est l'ensemble des fermés d'une unique topologie sur $\mathbb{A}_n(k)$, appelée la *topologie de Zariski*.

Démonstration. L'ensemble vide est un fermé de Zariski, car c'est l'ensemble des zéros du polynôme constant 1. Si F, F' sont des fermés de Zariski, ensembles des zéros communs des familles de polynômes $(P_i)_{i \in I}, (Q_j)_{j \in J}$ respectivement, alors $F \cup F'$ est l'ensemble des zéros communs de la famille de polynômes $(P_i Q_j)_{(i,j) \in I \times J}$, donc est un fermé de Zariski. Si F_j , pour $j \in J$, est un fermé de Zariski, ensemble des zéros communs de la famille de polynômes $(P_{i,j})_{i \in I_j}$, alors $\bigcap_{j \in J} F_j$ est l'ensemble des zéros communs de la famille des polynômes $P_{i,j}$ pour $j \in J$ et $i \in I_j$, donc est un fermé de Zariski. \square

Remarque. En fait, par le théorème du Nullstellensatz de Hilbert (voir par exemple [Per]), tout fermé de Zariski de $\mathbb{A}_n(k)$ est l'ensemble des zéros communs d'une famille *finie* de polynômes.

Topologie engendrée, prébase et base d'ouverts

Soit X un ensemble. Pour toute partie Σ de $\mathcal{P}(X)$, il existe une unique topologie la plus petite (pour l'inclusion) contenant Σ . C'est l'ensemble \mathcal{O} des unions d'intersections finies d'éléments de Σ . C'est l'intersection de toutes les topologies contenant Σ . On dit que \mathcal{O} est la *topologie engendrée* par Σ , et que Σ est une *prébase* de \mathcal{O} .

Démonstration. Il est clair que toute topologie contenant Σ contient \mathcal{O} . Il suffit donc de montrer que \mathcal{O} est une topologie. Ceci découle de la distributivité

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \cap \left(\bigcup_{j \in J} B_j \right) = \bigcup_{i \in I, j \in J} (A_i \cap B_j). \quad \square$$

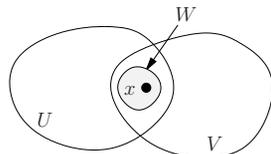
Une *base d'ouverts* d'un espace topologique (X, \mathcal{O}) est une partie \mathcal{B} de \mathcal{O} telle que tout ouvert de X est union d'éléments de \mathcal{B} . Par exemple, l'ensemble des intersections finies d'éléments d'une prébase est une base d'ouverts. Si (X, d) est un espace métrique, alors $\{B(x, \frac{1}{n+1}) : x \in X, n \in \mathbb{N}\}$ est une base d'ouverts.

Proposition A.1 (Critère pour qu'une prébase soit une base) Soit X un ensemble. Soit \mathcal{B} une partie de $\mathcal{P}(X)$ telle que $\bigcup \mathcal{B} = X$ et

$$(*) \quad \forall U, V \in \mathcal{B}, \forall x \in U \cap V, \exists W \in \mathcal{B}, \quad x \in W \subset U \cap V.$$

Alors l'ensemble \mathcal{O} des unions d'éléments de \mathcal{B} est la topologie engendrée par \mathcal{B} . En particulier, \mathcal{B} est une base d'ouverts de sa topologie engendrée.

Démonstration. Il suffit de montrer que \mathcal{O} est une topologie. Comme $X \in \mathcal{O}$ et par la formule de distributivité ci-dessus, il suffit de montrer que l'intersection de deux éléments de \mathcal{B} est union d'éléments de \mathcal{B} . Ceci découle de la condition (*). \square



Si $f : X \rightarrow Y$ est un homéomorphisme, si \mathcal{B} est une prébase, respectivement une base d'ouverts dans X , alors $f(\mathcal{B})$ est une prébase, respectivement une base d'ouverts dans Y .

Exemple. Soient $+\infty, -\infty$ deux ensembles distincts n'appartenant pas à \mathbb{R} . L'ensemble des parties de $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ de la forme $]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[$ ou $\{-\infty\} \cup]-\infty, -n[$ ou $]n, +\infty[\cup \{+\infty\}$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ est une base d'ouverts pour une topologie sur $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Cet ensemble muni de cette topologie est noté $\overline{\mathbb{R}}$. L'inclusion $\mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est un homéomorphisme sur son image (celle-ci étant munie de la topologie induite, voir section A.2), et \mathbb{R} est dense dans $\overline{\mathbb{R}}$ (voir ci-dessous la définition de partie dense).

Voisinsages, systèmes fondamentaux de voisinsages

Soit X un espace topologique. Un *voisinage* d'une partie A de X est une partie de X contenant un ouvert contenant A . On appelle *voisinage* d'un point x de X un voisinage de $\{x\}$.

Une partie A de X est ouverte si et seulement si elle est voisinage de chacun de ses points, car elle est alors égale à la réunion des ouverts qu'elle contient.

- Si $\mathcal{V}(x)$ est l'ensemble des voisinages de x , alors
- toute partie de X contenant un élément de $\mathcal{V}(x)$ appartient à $\mathcal{V}(x)$;
 - toute intersection finie d'éléments de $\mathcal{V}(x)$ appartient à $\mathcal{V}(x)$.

Un *système fondamental de voisinsages* d'un point x d'un espace topologique X est une partie \mathcal{P} de $\mathcal{V}(x)$ telle que tout voisinage de x contienne un élément de \mathcal{P} . Pour toute suite de réels strictement positifs $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendant vers 0, si (X, d) est un espace métrique, alors $\{B(x, r_n) : n \in \mathbb{N}\}$ est un système fondamental de voisinsages de $x \in X$.

Si $f : X \rightarrow Y$ est un homéomorphisme et $x \in X$, alors $f(\mathcal{V}(x)) = \mathcal{V}(f(x))$, et l'image par f d'un système fondamental de voisinsages de x est un système fondamental de voisinsages de $f(x)$.

Intérieur, adhérence, frontière

Soit X un espace topologique et A une partie de X . L'*intérieur* de A est l'ensemble, noté $\overset{\circ}{A}$, des points de A dont A est un voisinage. L'*adhérence* de A est l'ensemble, noté \overline{A} , des points de X dont tout voisinage rencontre A . La *frontière* de A est l'ensemble, noté ∂A , des points de X adhérents à A et à son complémentaire. Une partie de X est *dense* dans X si son adhérence est X , et *nulle part dense* si l'intérieur de son adhérence est vide.

- Si A, B sont des parties de X , alors
- A est ouvert si et seulement si $A = \overset{\circ}{A}$.
 - A est fermé si et seulement si $A = \overline{A}$.
 - $\overset{\circ}{A \cap B} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}, \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
 - $\overset{\circ}{A \cup B} \subset \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}, \quad \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

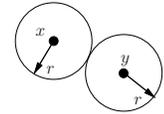
- $X - \overset{\circ}{A} = \overline{X - A}$, $X - \overline{A} = \overset{\circ}{X - A}$.
- L'intérieur de A est la réunion des ouverts contenus dans A , c'est le plus grand ouvert contenu dans A .
- L'adhérence de A est l'intersection des fermés contenant A , c'est le plus petit fermé contenant A .
- si $f : X \rightarrow Y$ est un homéomorphisme, alors $f(\overset{\circ}{A}) = \overset{\circ}{f(A)}$, $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$, $f(\partial A) = \partial(f(A))$.

Séparation

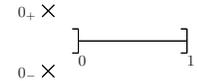
Un espace topologique est *séparé* si deux points distincts de X admettent des voisinages disjoints. "Être séparé" est invariant par homéomorphisme. Dans un espace séparé, les singletons sont fermés. Un espace discret est séparé. Un espace grossier est séparé si et seulement s'il ne contient qu'au plus un point.

Un espace topologique est *métrisable* si sa topologie est induite par une distance. "Être métrisable" est invariant par homéomorphisme. Tout espace topologique métrisable est séparé.

Démonstration. Soit d une distance sur un ensemble X , et x, y deux points de X . Si $x \neq y$, alors $r = \frac{1}{2}d(x, y) > 0$. Si $B(x, r) \cap B(y, r)$ est non vide, soit z un de ses points. Alors $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < d(x, y)$, impossible. \square



Exercice E.A.75 Soient $0_-, 0_+$ deux ensembles distincts, n'appartenant pas à $[0, 1]$. On note X l'ensemble $\{0_+ \} \cup \{0_- \} \cup]0, 1]$. On note $\mathcal{B}(x) = \{]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \cap]0, 1] : n \in \mathbb{N} - \{0\}\}$ pour $x \neq 0_{\pm}$ et $\mathcal{B}(0_{\pm}) = \{\{0_{\pm}\} \cup]0, \frac{1}{n}[: n \in \mathbb{N} - \{0\}\}$. Montrer que $\mathcal{B} = \bigcup_{u \in X} \mathcal{B}(u)$ est une base d'ouverts d'une topologie non séparée sur X .



Exercice E.A.76 Montrer que la topologie de Zariski sur $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ n'est pas séparée pour $n > 0$. Montrer que tout ouvert de Zariski non vide de $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ est un ouvert dense de \mathbb{R}^n pour la topologie usuelle de \mathbb{R}^n .

Continuité

Soient X, Y deux espaces topologiques et $f : X \rightarrow Y$ une application. Si $x_0 \in X$, on dit que f est *continue en x_0* si, pour tout voisinage V de $f(x_0)$ dans Y , il existe un voisinage U de x_0 dans X tel que $f(U) \subset V$.

Soit \mathcal{U} un système fondamental de voisinages de x_0 , et \mathcal{V} un système fondamental de voisinages de $f(x_0)$. Alors f est continue en x_0 si et seulement si pour tout $V \in \mathcal{V}$, il existe $U \in \mathcal{U}$ tel que $f(U) \subset V$.

En particulier, si la topologie de X est induite par une distance d et si celle de Y est induite par une distance d' , alors f est continue en $x_0 \in X$ si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \quad d(x, x_0) < \eta \Rightarrow d'(f(x), f(x_0)) < \epsilon.$$

Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. pour tout ouvert O de Y , $f^{-1}(O)$ est un ouvert de X ;
2. pour tout fermé F de Y , $f^{-1}(F)$ est un fermé de X ;
3. pour tout $x \in X$, f est continue en x ;
4. pour tout $A \subset X$, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

On dit que f est *continue* si elle vérifie l'une de ses conditions. Si X est discret, alors f est continue. Si Y est grossier, alors f est continue. Si $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ sont deux applications continues, alors $g \circ f : X \rightarrow Z$ est continue. Une bijection $f : X \rightarrow Y$ est un homéomorphisme si et seulement si f et f^{-1} sont continues.

Soient X, Y deux espaces topologiques et $f : X \rightarrow Y$ une application. On dit que f est *ouverte* si l'image par f de tout ouvert de X est un ouvert de Y . On dit que f est *fermée* si l'image par f de tout fermé de X est un fermé de Y .

Connexité

Un espace topologique X est *connexe* si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :

1. Les seules parties ouvertes et fermées de X sont \emptyset, X .
2. Il n'existe pas de partition de X en deux ouverts non vides.
3. Il n'existe pas de partition de X en deux fermés non vides.
4. Toute application continue de X à valeurs dans un espace discret est constante.
5. Toute application continue de X à valeurs dans l'espace discret $\{0, 1\}$ est constante.

Par exemple, les convexes de \mathbb{R}^n sont connexes. Une *composante connexe* d'un espace topologique X est un sous-espace connexe maximal (pour l'inclusion) de X . Un espace topologique X est *localement connexe* si tout point de X a un système fondamental de voisinages connexes.

L'image d'un espace connexe par une application continue est connexe. Pour toute partie connexe C d'un espace topologique X , si $C \subset D \subset \bar{C}$, alors D est connexe. Si A est une partie connexe non vide de X , la réunion de tous les sous-espaces de X connexes contenant A est la composante connexe de X contenant A . Une composante connexe est fermée, et deux composantes connexes sont disjointes. Dans un espace localement connexe, les composantes connexes sont ouvertes et fermées.

Un espace topologique X est *connexe par arcs* si pour tous x, y dans X , il existe une application continue $f : [0, 1] \rightarrow X$ telle que $f(0) = x, f(1) = y$. Par exemple, les convexes de \mathbb{R}^n sont connexes par arcs. Une *composante connexe par arcs* d'un espace topologique X est un sous-espace connexe par arcs maximal de X . Un espace topologique X est *localement connexe par arcs* si tout point de X a un système fondamental de voisinages connexes par arcs.

Un espace connexe par arcs est connexe. L'image d'un espace connexe par arcs par une application continue est connexe par arcs. Si un espace topologique X est réunion d'une famille $(A_i)_{i \in I}$ de sous-espaces connexes par arcs dont l'intersection $\bigcap_{i \in I} A_i$ est non vide, alors X est connexe par arcs. Dans un espace localement connexe par arcs, les composantes connexes par arcs sont ouvertes. Un espace connexe et localement connexe par arcs est connexe par arcs. Dans un espace localement connexe par arcs, les composantes connexes et les composantes connexes par arcs coïncident.

Par exemple, l'adhérence dans \mathbb{R}^2 du graphe de la fonction $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$, définie sur $]0, +\infty[$, est connexe, mais ni connexe par arcs, ni localement connexe (voir dessin juste avant la section A.4).

A.2 Constructions de topologies

Comparaison de topologies

Soit X un ensemble. Une topologie \mathcal{O}_1 sur X est *moins fine* qu'une topologie \mathcal{O}_2 sur X si \mathcal{O}_1 est contenue dans \mathcal{O}_2 , et *plus fine* si \mathcal{O}_1 contient \mathcal{O}_2 .

La topologie grossière est la topologie la moins fine sur X , et la topologie discrète est la topologie la plus fine sur X . La topologie usuelle sur \mathbb{R}^n (i.e. celle induite par la distance euclidienne) est plus fine que la topologie de Zariski sur $A_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n$. En effet, un fermé de Zariski de \mathbb{R}^n est l'intersection des ensembles des zéros d'une famille d'applications polynomiales, donc continues.

Exercice E.A.77 Soit X un ensemble, et $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ deux topologies sur X . Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- \mathcal{T}_1 est plus fine que \mathcal{T}_2 ;
- tout fermé pour \mathcal{T}_2 est fermé pour \mathcal{T}_1 ;
- l'application identique $(X, \mathcal{T}_1) \rightarrow (X, \mathcal{T}_2)$ est continue ;
- pour tout x de X , tout voisinage de x pour \mathcal{T}_2 est voisinage de x pour \mathcal{T}_1 .

Topologie initiale

Soient X un ensemble et $(Y_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques. Pour tout $i \in I$, soit $f_i : X \rightarrow Y_i$ une application. La *topologie initiale* sur X définie par $(f_i)_{i \in I}$ est la topologie engendrée par $\{f_i^{-1}(U_i) : i \in I, U_i \text{ ouvert de } Y_i\}$. C'est la topologie sur X la moins fine rendant continue les applications f_i pour $i \in I$. Si Z est un espace topologique et $g : Z \rightarrow X$ est une application, alors g est continue si et seulement si chacune des $f_i \circ g$ est continue. Si \mathcal{B}_i est une base d'ouverts de Y_i pour tout $i \in I$, alors l'ensemble des intersections finies d'éléments de $\{f_i^{-1}(U_i) : i \in I, U_i \in \mathcal{B}_i\}$ est une base d'ouverts de X . Si $x \in X$ et \mathcal{V}_i est un système fondamental de voisinages de $f_i(x)$ dans Y_i pour tout $i \in I$, alors l'ensemble des intersections finies d'éléments de $\{f_i^{-1}(V_i) : i \in I, V_i \in \mathcal{V}_i\}$ est un système fondamental de voisinages de x dans X .

Exemple : Topologie faible. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel réel normé. La topologie sur E induite par la distance induite par la norme est appelée la *topologie forte*, et une application continue de E , muni de la topologie forte, dans un espace topologique est dite *fortement continue*. Le *dual topologique* E^* de E est l'espace vectoriel des formes linéaires fortement continues sur E . La topologie initiale sur E définie par la famille $(\ell)_{\ell \in E^*}$ est appelée la *topologie faible* sur E .

Exercice E.A.78 a) Pour $(E, \|\cdot\|)$ comme ci-dessus, montrer les assertions suivantes :

- Si $x_0 \in E$, alors l'ensemble des parties de la forme

$$V_{\epsilon, \ell_1, \dots, \ell_n}(x_0) = \{x \in E : \forall i = 1 \dots n, |\ell_i(x) - \ell_i(x_0)| < \epsilon\}$$

- lorsque $\epsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ et $\ell_1, \dots, \ell_n \in E^*$, est un système fondamental de voisinages de x_0 dans E pour la topologie faible ;
- les ouverts pour la topologie faible sont les unions d'intersections finies de parties de la forme $\ell^{-1}(\mathcal{O})$ avec \mathcal{O} intervalle ouvert de \mathbb{R} et $\ell \in E^*$;
 - la topologie faible sur E est la topologie la moins fine rendant continue les formes linéaires fortement continues ;
 - la topologie forte sur E est plus fine que la topologie faible ;
 - si E est de dimension finie, alors la topologie forte et la topologie faible coïncident.

b) On considère l'espace de Hilbert

$$\ell^2(\mathbb{R}) = \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \|x\|_2 = \left(\sum_n x_n^2\right)^{1/2} < +\infty\}$$

muni du produit scalaire $\langle x, y \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n y_n$. Montrer que la topologie forte est strictement plus fine que la topologie vague.

Sous-espace topologique

Soient X un espace topologique, A une partie de X et $i : A \hookrightarrow X$ l'inclusion. La topologie initiale sur A définie par i est appelée la *topologie induite* sur A . L'ensemble A muni de cette topologie est appelé un *sous-espace topologique* de X (ou sous-espace par abus). Sauf mention contraire, toute partie d'un espace topologique sera munie de la topologie induite.

Les propriétés suivantes découlent de celles des topologies initiales, ou sont laissées en exercice.

- Une partie U de A est ouverte dans A si et seulement s'il existe un ouvert U' de X tel que $U = U' \cap A$.
- Une partie F de A est fermée dans A si et seulement s'il existe un fermé F' de X tel que $F = F' \cap A$.
- L'inclusion i est continue, et la topologie induite sur A est la moins fine rendant continue i .
- Les voisinages d'un point x de A sont les traces dans A des voisinages de x dans X .
- Tout ouvert de A est un ouvert de X si et seulement si A est ouvert dans X .
- Tout fermé de A est un fermé de X si et seulement si A est fermé dans X .
- Si $A \subset B \subset X$, alors l'adhérence de A dans B est la trace dans B de l'adhérence de A dans X .

Tout sous-espace d'un espace topologique séparé est séparé.

Exercice E.A.79 Soient X un espace topologique et $A \subset X$. On dit que $x \in A$ est un point isolé de A s'il existe un voisinage V de x dans X tel que $V \cap A = \{x\}$.

Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- le sous-espace A est discret ;
- tout point de A est isolé.

Exercice E.A.80 Soient X un espace topologique et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de X . On suppose vérifiée au moins l'une des deux conditions suivantes :

- $(\overset{\circ}{A}_i)_{i \in I}$ est un recouvrement (voir définition en section A.4) de X ;
- $(A_i)_{i \in I}$ est un recouvrement fermé de X localement fini (i.e. pour tout x dans X , il existe un voisinage V de x tel que $\{i \in I : V \cap A_i \neq \emptyset\}$ est fini).

Montrer qu'une partie B de X est fermée (resp. ouverte) si et seulement si $A_i \cap B$ est fermé (resp. ouvert) dans A_i .

Topologie produit

Soient $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques et

$$X = \prod_{i \in I} X_i = \{(x_i)_{i \in I} \in \left(\bigcup_{i \in I} X_i\right)^I : \forall i \in I, x_i \in X_i\}$$

l'ensemble produit, muni de ses projections canoniques $pr_i : X \rightarrow X_i$ avec $pr_i(x) = x_i$ si $x = (x_j)_{j \in I}$. La topologie initiale sur X définie par $(pr_i)_{i \in I}$ est appelée la *topologie produit* sur X . Sauf mention contraire, l'ensemble produit d'une famille d'espaces topologiques sera muni de la topologie produit.

Un *ouvert élémentaire* de X est une partie de X de la forme

$$V_{J, (U_j)_{j \in J}} = \{(x_i)_{i \in I} \in X : \forall j \in J, x_j \in U_j\} = \bigcap_{j \in J} pr_j^{-1}(U_j)$$

pour J une partie finie de I et U_j un ouvert de X_j pour tout j dans J . Par exemple, si $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ et $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$, alors un ouvert élémentaire de X est une partie de la forme $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$ avec U_i un ouvert de X_i .

Les propriétés suivantes découlent des propriétés des topologies initiales, ou sont laissées en exercice :

- Les projections pr_i sont continues, et la topologie produit est la topologie la moins fine rendant continue les projections pr_i .
- L'ensemble des ouverts élémentaires de X est une base de la topologie produit de X .
- Si $a = (a_i)_{i \in I} \in X$, si \mathcal{V}_i est un système fondamental de voisinages de a_i dans X_i pour tout i dans I , alors l'ensemble des parties de X de la forme

$$\{(x_i)_{i \in I} \in X : \forall j \in J, x_j \in V_j\} = \bigcap_{j \in J} pr_j^{-1}(V_j)$$

lorsque J est une partie finie de I et $V_j \in \mathcal{V}_j$ pour $j \in J$, est un système fondamental de voisinages de a dans X pour la topologie produit.

- Soit Y un espace topologique et $f : Y \rightarrow X$ une application. On note $f_i = pr_i \circ f$ la i -ème composante de f , de sorte que $f(x) = (f_i(x))_{i \in I}$. Alors f est continue en x si et seulement si $f_i : Y \rightarrow X_i$ est continue en x pour tout i dans I . De même, f est continue si et seulement si $f_i : Y \rightarrow X_i$ est continue pour tout i dans I .
- (Associativité de la topologie produit) Si $I = \bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha$ est une partition de I , et si $Y_\alpha = \prod_{i \in I_\alpha} X_i$, alors l'application canonique

$$\prod_{\alpha \in A} Y_\alpha \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$$

définie par $(y_\alpha)_{\alpha \in A} \mapsto (x_i)_{i \in I}$ si $y_\alpha = (x_i)_{i \in I_\alpha}$, est un homéomorphisme.

- (Commutativité de la topologie produit) Si $\sigma : I \rightarrow I$ est une bijection, alors l'application $\prod_{i \in I} X_i \rightarrow \prod_{i \in I} X_{\sigma(i)}$, définie par $(x_i)_{i \in I} \mapsto (x_{\sigma(i)})_{i \in I}$, est un homéomorphisme.
- Si A_i est une partie de X_i , alors

$$\overline{\prod_{i \in I} A_i} = \prod_{i \in I} \overline{A_i}.$$

- Si A_i est une partie de X_i , alors $\prod_{i \in I} A_i$ est fermé dans X si et seulement si A_i est fermé dans X_i pour tout i dans I .

Remarque. En particulier, si X, Y, Z sont des espaces topologiques, alors les applications $(X \times Y) \times Z \rightarrow X \times (Y \times Z)$ avec $((x, y), z) \mapsto (x, (y, z))$, et $X \times Y \rightarrow Y \times X$ avec $(x, y) \mapsto (y, x)$, sont des homéomorphismes. Attention il existe des ouverts dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ qui ne sont pas des ouverts élémentaires (i.e. pas produits de deux ouverts). La dernière propriété est fautive pour les ouverts : $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ n'est pas ouvert dans $[0, 1]^{\mathbb{N}}$.

Proposition A.2 *Un produit d'espaces topologiques séparés est séparé. Si un produit d'espaces topologiques non vides est séparé, alors chacun des facteurs est séparé.*

Démonstration. Soit $X = \prod_{i \in I} X_i$ un espace topologique produit. Si $x = (x_i)_{i \in I} \neq y = (y_i)_{i \in I}$, alors il existe au moins un j dans I tel que $x_j \neq y_j$. Si les X_i sont séparés, il existe deux ouverts disjoints U, V dans X_j avec $x_j \in U$ et $y_j \in V$. Alors $pr_j^{-1}(U), pr_j^{-1}(V)$ sont deux ouverts (élémentaires) de X , disjoints, et contenant respectivement x, y . Donc X est séparé.

Réciproquement, si X est séparé et si les X_i sont non vides, on choisit a_i dans X_i pour tout i dans I . Soit j dans I . L'application $\phi : X_j \rightarrow X$ avec $x \mapsto (x_i)_{i \in I}$ où $x_j = x$ et $x_i = a_i$ pour tout $i \neq j$, est un homéomorphisme sur son image. En effet, elle est injective, et continue car $pr_i \circ \phi$ est continue pour tout i . Sa réciproque est la restriction à l'image de ϕ de la j -ème projection, donc est continue. \square

Exercice E.A.81 *On définit par récurrence une suite de fermés C_n de $[0, 1]$, en posant $C_0 = [0, 1]$, en supposant que C_n est la réunion disjointe de 2^n intervalles de longueur $\frac{1}{3^n}$, et en construisant C_{n+1} en divisant chaque composante de C_n en*

trois intervalles de longueurs égales, et en enlevant l'intérieur de celui du milieu. L'ensemble triadique de Cantor C est défini par $C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$. On munit l'ensemble $\{0, 1\}$ de la topologie discrète et $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ de la topologie produit. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \phi : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} &\rightarrow C \\ (x_i)_{i \in \mathbb{N}} &\mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2x_i}{3^{i+1}} \end{aligned}$$

est un homéomorphisme. Montrer que $C^{\mathbb{N}}$ et C sont homéomorphes.

Exercice E.A.82 *Montrer que le produit d'une famille d'espaces topologiques connexes (resp. connexes et localement connexes, connexes par arcs, connexes et localement connexes par arcs) est connexe (resp. localement connexe, connexe par arcs, localement connexe par arcs). Montrer que le produit d'une famille finie d'espaces topologiques localement connexes (resp. localement connexes par arcs) est localement connexe (resp. localement connexe par arcs).*

Topologie finale

Soit X un ensemble, $(Y_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques et pour tout $i \in I$, soit $f_i : Y_i \rightarrow X$ une application. La *topologie finale* sur X définie par $(f_i)_{i \in I}$ est la topologie dont les ouverts sont les parties O de X telles que pour tout i dans I , le sous-ensemble $f_i^{-1}(O)$ soit un ouvert de Y_i . C'est la topologie sur X la plus fine rendant continue toutes les applications f_i . Si Z est un espace topologique et $g : X \rightarrow Z$ est une application, alors g est continue si et seulement si chacune des $g \circ f_i$ est continue.

Exemple : Topologie somme disjointe. Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques. On rappelle qu'un ensemble X muni d'applications $f_i : X_i \rightarrow X$ est une *somme disjointe* des X_i si pour tout ensemble Y muni d'applications $g_i : X_i \rightarrow Y$, il existe une unique application $\phi : X \rightarrow Y$ telle que le diagramme suivant commute pour tout i :

$$\begin{array}{ccc} X_i & \xrightarrow{f_i} & X \\ & g_i \searrow & \downarrow \phi \\ & & Y \end{array}$$

L'ensemble $\{(x, i) \in (\bigcup_{i \in I} X_i) \times I : x \in X_i\}$, muni de $f_i : X_i \rightarrow X$ avec $f_i(x) = (x, i)$, convient. Il est unique modulo bijection faisant commuter les diagrammes ci-dessus. On identifie $x \in X_i$ avec son image par f_i . On note $X = \coprod_{i \in I} X_i$, muni des inclusions $X_i \hookrightarrow X$.

La topologie finale sur X définie par $(f_i)_{i \in I}$ est appelée la *topologie somme disjointe*. Sauf mention contraire, un ensemble somme disjointe sera muni de la topologie somme disjointe.

Exemple : Topologie faible. Soit X un ensemble et $(X_i)_{i \in I}$ une famille de parties de X . On suppose chaque X_i munie d'une topologie, et on note $f_i : X_i \rightarrow X$

l'inclusion. La topologie finale sur X définie par $(f_i)_{i \in I}$ est appelée la *topologie faible* définie par $(X_i)_{i \in I}$. Les propriétés suivantes découlent de celles des topologies finales : une partie F de X est fermée si et seulement si $F \cap X_i$ est fermée dans X_i pour tout i dans I ; une partie O de X est ouverte si et seulement si $O \cap X_i$ est ouverte dans X_i pour tout i dans I ; pour tout espace topologique Y , une application $f : X \rightarrow Y$ est continue si et seulement si sa restriction $f|_{X_i} : X_i \rightarrow Y$ à X_i est continue pour tout i dans I .

Par exemple, si $X = \mathbb{R}^2$, et $(X_i)_{i \in I}$ est la famille des droites vectorielles de \mathbb{R}^2 , munies de leur topologie usuelle, alors la topologie faible définie par $(X_i)_{i \in I}$ est plus fine que la topologie usuelle sur \mathbb{R}^2 .

Exercice E.A.83 Soit X un espace topologique. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- X est discret ;
- la topologie de X est la topologie faible définie par la famille des singletons (un singleton possède une et une seule topologie) ;
- la bijection canonique $\coprod_{x \in X} \{x\} \rightarrow X$ est un homéomorphisme.

Exercice E.A.84 Soit X un ensemble, muni de la topologie faible définie par une famille $(X_i)_{i \in I}$ de parties de X munies chacune d'une topologie. Montrer que si, pour tous i, j dans I , les topologies induites sur $X_i \cap X_j$ par celles de X_i et de X_j coïncident, et si $X_i \cap X_j$ est fermé dans X_i et dans X_j , alors

- la topologie de X_i coïncide avec la topologie induite sur X_i par la topologie de X ;
- X_i est fermé dans X .

Topologie quotient

Soit X un ensemble et $\mathcal{R} \subset X \times X$ une relation d'équivalence sur X . On note $Y = X/\mathcal{R}$ l'ensemble des classes d'équivalences de \mathcal{R} et

$$\pi : X \rightarrow X/\mathcal{R} = Y$$

la projection canonique, qui à $x \in X$ associe sa classe d'équivalence $\mathcal{R}(x)$, que l'on notera souvent $[x]$ s'il n'y a pas d'ambiguïté. On rappelle la propriété universelle des quotients : pour tout ensemble Z et pour toute application $f : X \rightarrow Z$ constante sur chaque classe d'équivalence de \mathcal{R} , il existe une et une seule application $f' : X/\mathcal{R} \rightarrow Z$ telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Z \\ \pi \downarrow & \nearrow f' & \\ X/\mathcal{R} & & \end{array}$$

commute.

Si X est un espace topologique, la topologie finale sur Y définie par π est appelée la *topologie quotient*. Sauf mention contraire, tout ensemble quotient sera muni de la topologie quotient.

Les propriétés suivantes découlent de celles des topologies finales :

- une partie U de Y est ouverte si et seulement si $\pi^{-1}(U)$ est ouvert dans X ;
- une partie F de Y est fermée si et seulement si $\pi^{-1}(F)$ est fermé dans X ;
- la projection canonique π est continue, et la topologie quotient est la topologie la plus fine sur Y rendant continue π ;
- pour tout espace topologique Z , une application $f : Y \rightarrow Z$ est continue si et seulement si $f \circ \pi : X \rightarrow Z$ est continue.

Si A est une partie de X , le *saturé* de A par \mathcal{R} est $\mathcal{R}A = \bigcup_{a \in A} \mathcal{R}(a) = \pi^{-1}(\pi(A))$; la partie A est *saturée* si $A = \mathcal{R}A$.

Remarque. (1) Si A est ouvert (resp. fermé) et saturé dans X , alors $\pi(A)$ l'est dans Y . En général, l'hypothèse "saturée" ne peut être omise.

(2) L'image réciproque par la projection canonique est une bijection entre les parties de X/\mathcal{R} et les parties saturées de X , qui préserve les opérations booléennes usuelles.

Proposition A.3 L'espace topologique quotient Y est séparé si et seulement si pour tous x, y dans X n'appartenant pas à la même classe d'équivalence, il existe deux ouverts U, V saturés disjoints contenant x, y respectivement.

Démonstration. On suppose la condition vérifiée. Soient x', y' dans Y avec $x' \neq y'$. Soient x, y dans X avec $\pi(x) = x', \pi(y) = y'$. Soient U, V comme ci-dessus. Alors $\pi(U), \pi(V)$ sont des ouverts (car leurs préimages par π sont U, V , qui sont ouverts), disjoints et contenant x', y' respectivement. Donc Y est séparé.

Réciproquement, si Y est séparé, si $x, y \in X$ ne sont pas équivalents, alors $x' = \pi(x) \neq \pi(y) = y'$. Soient U', V' deux ouverts disjoints de Y contenant x', y' respectivement. Alors $U = \pi^{-1}(U')$ et $V = \pi^{-1}(V')$ conviennent. \square

Le quotient d'un espace séparé n'est pas toujours séparé. Regarder si un quotient est séparé ou non doit devenir un **réflexe**.

Exemple. Soient $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ et \mathcal{R} la relation d'équivalence sur \mathbb{R}^n définie par

$$x \mathcal{R} y \iff x - y \in \mathbb{Z}^n.$$

On note \mathbb{T}^n ou $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ l'espace quotient \mathbb{R}^n/\mathcal{R} , que l'on appelle *tore de dimension n* . Soit $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ la projection canonique. On identifie \mathbb{R}^2 avec \mathbb{C} par $(x, y) \mapsto x + iy$. L'application

$$\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow (\mathbb{S}_1)^n \\ (t_1, \dots, t_n) \mapsto (e^{2\pi i t_1}, \dots, e^{2\pi i t_n})$$

est continue, surjective, et induit par passage au quotient une bijection

$$\bar{\phi} : \mathbb{T}^n \longrightarrow (\mathbb{S}_1)^n \\ [(t_1, \dots, t_n)] \mapsto (e^{2\pi i t_1}, \dots, e^{2\pi i t_n}).$$

Cette bijection est continue, car $\bar{\phi} \circ \pi = \phi$ l'est. L'espace quotient \mathbb{T}^n est séparé par l'exercice E.A.85. Il découle de la remarque suivant le théorème A.21 que $\bar{\phi}$ est un homéomorphisme.

Exercice E.A.85 Soient X un espace topologique et \mathcal{R} une relation d'équivalence sur X .

- Montrer que si X/\mathcal{R} est séparé, alors $\mathcal{R} \subset X \times X$ est fermé.
- Montrer que si X' est un espace topologique séparé, si $f : X \rightarrow X'$ est une application continue et si $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$, alors X/\mathcal{R} est séparé.

Exercice E.A.86 Soient X un espace topologique et \mathcal{R} une relation d'équivalence sur X . Montrer que si l'une des classes d'équivalence de \mathcal{R} est dense, et si $\text{Card}(X/\mathcal{R}) \geq 2$, alors la topologie quotient sur X/\mathcal{R} n'est pas séparée. Montrer que si toutes les classes d'équivalence sont denses, alors la topologie quotient sur X/\mathcal{R} est la topologie grossière.

Exercice E.A.87 Soient X un espace topologique et \mathcal{R} une relation d'équivalence sur X . On note $\pi : X \rightarrow X/\mathcal{R}$ la projection canonique. Soit A une partie de X et $\mathcal{R}_A = \mathcal{R} \cap (A \times A)$ la relation d'équivalence induite sur A . On a une inclusion continue évidente $A/\mathcal{R}_A \hookrightarrow X/\mathcal{R}$. Montrer que sous l'une des conditions suivantes, la topologie quotient de A/\mathcal{R}_A coïncide avec la topologie induite par celle de X/\mathcal{R} :

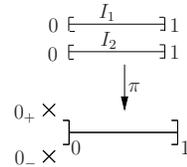
- tout ouvert saturé de A est la trace sur A d'un ouvert saturé de X ;
- A est ouvert et π est ouverte ;
- A est fermé et π est fermée ;
- $\pi|_A : A \rightarrow X/\mathcal{R}$ est fermée.

Que se passe-t-il si $X = \mathbb{R}$, $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$, et $A = [0, 1[$ ou $[0, 1]$?

Soient X un ensemble, et $\sim \subset X \times X$ une relation sur X (on note souvent $x \sim y$ au lieu de $(x, y) \in \sim$). On appelle *relation d'équivalence engendrée par \sim* l'intersection de toutes les relations d'équivalence contenant \sim . C'est la plus petite (pour l'inclusion) relation d'équivalence contenant \sim . On montre facilement que c'est la relation d'équivalence \mathcal{R} définie par $x \mathcal{R} y$ si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}$ et x_0, x_1, \dots, x_n dans X tels que $x_0 = x, x_n = y$ et pour tout $i = 1, \dots, n$

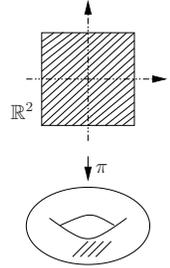
$$x_{i-1} \sim x_i \text{ ou } x_i \sim x_{i-1} \text{ ou } x_i = x_{i-1}.$$

Exemple. Soient I_1, I_2 deux copies de l'intervalle $[0, 1]$. Soit \mathcal{R} la relation d'équivalence sur la somme disjointe $I_1 \sqcup I_2$ engendrée par la relation $t \in I_1 \sim t \in I_2$ pour $t > 0$. Alors $(I_1 \sqcup I_2)/\mathcal{R}$ (muni de la topologie quotient de la topologie somme disjointe) n'est pas séparé (et est homéomorphe à l'espace de l'exercice E.A.75).



Exercice E.A.88 Soient $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ la projection canonique, et $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

1. Soit D une droite de pente α dans \mathbb{R}^2 . Montrer que si $\alpha \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$, alors $\pi(D)$ est homéomorphe à un cercle. Montrer que si $\alpha \notin \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$, alors $\pi(D)$ est dense dans \mathbb{T}^2 et $\pi|_D : D \rightarrow \pi(D)$ est une bijection continue. Est-ce que $\pi|_D$ est un homéomorphisme sur son image ?

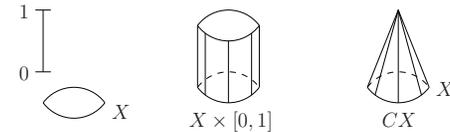


2. Soit \sim la relation sur \mathbb{T}^2 définie par $x' \sim y'$ si et seulement si il existe une droite D de pente α dans \mathbb{R}^2 et x, y dans D tels que $\pi(x) = x', \pi(y) = y'$. Montrer que \sim est une relation d'équivalence, et que l'espace quotient \mathbb{T}^2/\sim est séparé si et seulement si $\alpha \in \mathbb{Q}$. Si $\alpha \in \mathbb{Q}$, montrer que l'espace quotient \mathbb{T}^2/\sim est homéomorphe à un cercle. Si $\alpha \notin \mathbb{Q}$, montrer que la topologie de \mathbb{T}^2/\sim est la topologie grossière.

Exemple (1). Soit X un espace topologique. Le *cône sur X* est l'espace topologique quotient

$$CX = (X \times [0, 1])/\mathcal{R}$$

où \mathcal{R} est la relation d'équivalence engendrée par $(x, 1) \sim (x', 1)$ pour tous x, x' dans X .

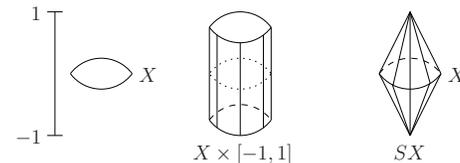


On vérifie que $x \mapsto [(x, 0)]$ est un homéomorphisme sur son image, permettant d'identifier X avec une partie de CX , et que si $f : X \rightarrow Y$ est une application continue, alors l'application $Cf : CX \rightarrow CY$ avec $[(x, t)] \mapsto [(f(x), t)]$ est continue. L'image de $X \times \{1\}$ dans CX est réduite à un point, appelé *sommet* du cône. Si $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ sont des applications continues, alors $C(g \circ f) = (Cg) \circ (Cf)$ et $C(\text{id}_X) = \text{id}_{CX}$.

Exemple (2). Soit X un espace topologique. La *suspension de X* est l'espace topologique quotient

$$SX = (X \times [-1, 1])/\mathcal{R}$$

avec \mathcal{R} la relation d'équivalence engendrée par $(x, 1) \sim (x', 1)$ et $(x, -1) \sim (x', -1)$ pour tous x, x' dans X .



On vérifie que $x \mapsto [(x, 0)]$ est un homéomorphisme sur son image, permettant d'identifier X avec une partie de SX , et que si $f : X \rightarrow Y$ est une application continue, alors l'application $Sf : SX \rightarrow SY$ avec $[(x, t)] \mapsto [(f(x), t)]$ est continue. Si $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ sont des applications continues, alors $S(g \circ f) = (Sg) \circ (Sf)$ et $S(\text{id}_X) = \text{id}_{SX}$.

Exemple (3). Soient X un espace topologique et A une partie de X . L'écrasement de A dans X , noté $X/\langle A \rangle$, est l'espace topologique quotient X/\mathcal{R} avec \mathcal{R} la relation d'équivalence engendrée par $x \sim x'$ pour tous x, x' dans A .

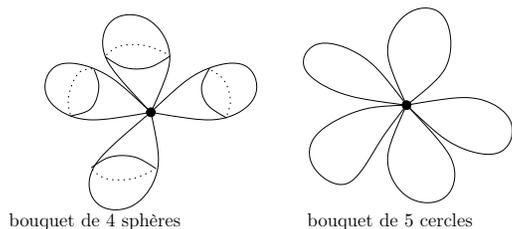


On vérifie que si A est ouvert ou fermé, alors la restriction à $X - A$ de la projection canonique $\pi : X \rightarrow X/\langle A \rangle$ est un homéomorphisme sur son image. Par exemple, $CX/\langle X \rangle$ et SX sont homéomorphes.

Exemple (4). Si $(X_i, x_i)_{i \in I}$ est une famille d'espaces topologiques pointés, la somme pointée de cette famille est l'espace topologique quotient

$$\bigvee_{i \in I} (X_i, x_i) = \left(\prod_{i \in I} X_i \right) / \mathcal{R}$$

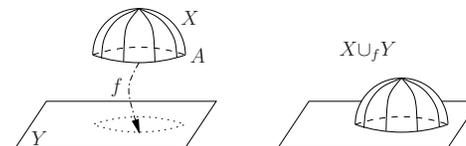
où \mathcal{R} est la relation d'équivalence engendrée par $x_i \sim x_j$ pour tous i, j dans I . L'inclusion $X_i \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$ induit un homéomorphisme sur son image, de X_i dans $\bigvee_{i \in I} (X_i, x_i)$. On identifie X_i avec son image par cet homéomorphisme. On appelle bouquet de sphères de dimension n (ou bouquet de cercles si $n = 1$) une somme pointée de copies de la sphère de dimension n (pointée en $(1, 0, \dots, 0)$).



Exemple (5). Soient X, Y deux espaces topologiques, A une partie de X et $f : A \rightarrow Y$ une application continue. Le recollement de X sur Y par f est l'espace topologique quotient

$$X \cup_f Y = (X \amalg Y) / \mathcal{R}$$

avec \mathcal{R} la relation d'équivalence engendrée par $x \sim f(x)$ pour tout x dans A .



On vérifie que si A est fermé (resp. ouvert), et $\pi : X \amalg Y \rightarrow X \cup_f Y$ est la projection canonique, alors $\pi_Y : Y \rightarrow X \cup_f Y$ est un homéomorphisme sur son image, qui est fermée (resp. ouverte). On vérifie que si A est non vide, et si X, Y sont connexes (resp. connexes par arcs), alors $X \cup_f Y$ aussi. Si $u : X \rightarrow Z$ et $v : Y \rightarrow Z$ sont deux applications continues, telles que $u(x) = v(f(x))$ pour tout x dans A , il existe une unique application continue $w : X \cup_f Y \rightarrow Z$ telle que $w \circ \pi_X = u$ et $w \circ \pi_Y = v$. Si Y est réduit à un point $*$, alors f est l'application constante de A dans Y , et l'inclusion de X dans $X \amalg \{*\}$ induit un homéomorphisme

$$X/\langle A \rangle \simeq X \cup_f \{*\}.$$

Exercice E.A.89 Vérifier les affirmations des exemples ci-dessus.

Exercice E.A.90 Pour tout $i \in \mathbb{S}_1$, soit R_i une copie de $[0, +\infty[$. Sur la somme disjointe $X = \prod_{i \in \mathbb{S}_1} R_i$, on note \mathcal{R} la relation d'équivalence engendrée par $0 \in R_i \sim 0 \in R_j$ pour tous i, j dans \mathbb{S}_1 . Montrer que l'espace topologique quotient X/\mathcal{R} est homéomorphe à l'ensemble \mathbb{R}^2 muni de la topologie faible définie par la famille des rayons vectoriels de \mathbb{R}^2 .

A.3 Limites et valeurs d'adhérence

Soient X, Y deux espaces topologiques, A une partie de X , $a \in \bar{A}$ et $f : A \rightarrow Y$ une application avec $A \subset B \subset X$.

Limites

On dit que $f(x)$ admet une limite quand x tend vers a dans A s'il existe $\ell \in Y$ tel que pour tout voisinage V de ℓ , il existe un voisinage U de a tel que

$$f(U \cap A) \subset V.$$

On note alors $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a, x \in A} \ell$ ou $\lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x) = \ell$. Lorsque A est sous-entendu, par exemple quand A vaut X ou le domaine de définition de f , on dit aussi que f admet pour limite ℓ en a , et on note $\lim_a f = \ell$.

Exemple.

$$\text{Si } X = \mathbb{R}, \text{ et } A = \begin{cases} [x_0, x_0 + \alpha[\\]x_0, x_0 + \alpha[\\ [x_0 - \alpha, x_0[\\]x_0 - \alpha, x_0[\end{cases}, \text{ on note alors } \ell = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0, x \geq x_0} f(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \text{ (limite à droite)} \\ \lim_{x \rightarrow x_0, x \leq x_0} f(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \text{ (limite à gauche)} \end{cases}$$

Exemple. Si $X = \overline{\mathbb{R}}$, si A est une partie non majorée de \mathbb{R} , et si $a = +\infty$, on note (si elle existe) $\lim_{x \rightarrow +\infty, x \in A} f(x)$ ou $\lim_{+\infty} f$ la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ dans A . De même pour $-\infty$. Bien sûr,

$$\ell = \lim_{+\infty} f \iff \forall V \in \mathcal{V}(\ell), \exists R \in \mathbb{R}, \forall x > R \quad (x \in A \Rightarrow f(x) \in V).$$

Si $X = \overline{\mathbb{R}}$, si $A = \mathbb{N}$ et si $a = +\infty$, une application $f : A \rightarrow Y$ est une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans Y , et on note $\ell = \lim_{+\infty} x_n$ ou $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ si f admet ℓ pour limite en $+\infty$. Bien sûr,

$$\ell = \lim_{+\infty} x_n \iff \forall V \in \mathcal{V}(\ell), \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \quad x_n \in V.$$

La définition suivante dit que l'on ne change pas la définition d'une limite en demandant à U et V de rester dans des systèmes fondamentaux de voisinages prescrits de a, ℓ .

Proposition A.4 Soit \mathcal{U}, \mathcal{V} un système fondamental de voisinages de a, ℓ dans X, Y respectivement. Alors

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a, x \in A} \ell \iff \forall V' \in \mathcal{V}, \exists U' \in \mathcal{U} \quad f(U' \cap A) \subset V'.$$

Démonstration. Si l'assertion de gauche est vérifiée, pour tout V' dans \mathcal{V} , il existe U dans $\mathcal{V}(a)$ tel que $f(U \cap A) \subset V'$. Soit U' dans \mathcal{U} tel que $U' \subset U$. Alors $f(U' \cap A) \subset V'$, ce qui montre l'assertion de droite.

Réciproquement, si l'assertion de droite est vérifiée, pour tout V dans $\mathcal{V}(\ell)$, soit V' dans \mathcal{V} tel que $V' \subset V$, et soit U' dans \mathcal{U} tel que $f(U' \cap A) \subset V'$. Alors $U' \in \mathcal{V}(a)$ et $f(U' \cap A) \subset V$, ce qui montre l'assertion de gauche. \square

Exemple. Si X, Y sont des espaces métriques, alors

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a, x \in A} \ell \iff \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A \quad d_X(x, a) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), \ell) < \epsilon.$$

On peut caractériser la continuité par les limites. Soient X, Y deux espaces topologiques, $f : X \rightarrow Y$ une application et $x_0 \in X$. Alors f est continue en x_0 si et seulement si $\lim_{x_0} f$ existe et vaut $f(x_0)$.

Propriétés des limites

Une limite n'est pas toujours unique. Si Y est l'espace topologique construit dans l'exercice E.A.75, alors la suite $x_n = \frac{1}{n}$ converge à la fois vers 0_+ et 0_- . Pour les espaces séparés (par exemple métrisables), ce problème n'arrive pas :

Proposition A.5 Si Y est séparé, si $f(x)$ admet une limite quand x tend vers a dans A , alors cette limite est unique.

Démonstration. Si ℓ, ℓ' sont deux limites distinctes, alors soient V, V' deux voisinages disjoints de ℓ, ℓ' respectivement. Par définition d'une limite, il existe U, U' voisinages de a tels que $f(U \cap A) \subset V$ et $f(U' \cap A) \subset V'$. Comme $U \cap U'$ est un voisinage de a et puisque a est adhérent à A , l'ensemble $U \cap U' \cap A$ est non vide. Donc $f(U \cap U' \cap A)$ est non vide. Comme $f(U \cap U' \cap A) \subset V \cap V'$, l'ensemble $V \cap V'$ est non vide, contradiction. \square

Proposition A.6 Si $f(x)$ admet pour limite ℓ quand x tend vers a dans A , alors $\ell \in \overline{f(A)}$.

Démonstration. Pour tout voisinage V de ℓ , soit U un voisinage de a tel que $f(U \cap A) \subset V$. Comme $a \in \overline{A}$, l'ensemble $U \cap A$ est non vide, donc $f(A) \cap V$, qui contient $f(U \cap A)$, est aussi non vide. \square

Proposition A.7 (Composition des limites) Soient X, Y, Z trois espaces topologiques, A une partie de X , B une partie de Y , $f : A \rightarrow Y$ et $g : B \rightarrow Z$ deux applications avec $f(A) \subset B$, et $a \in \overline{A}$. Si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a, x \in A} b$ et si $g(y) \xrightarrow{y \rightarrow b, y \in B} \ell$, alors

$$g \circ f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a, x \in A} \ell.$$

Démonstration. On remarque d'abord que, par la proposition précédente, $b \in \overline{f(A)} \subset \overline{B}$. Soit W un voisinage de ℓ . Il existe un voisinage V de b tel que $g(V \cap B) \subset W$. Il existe un voisinage U de a tel que $f(U \cap A) \subset V$. Donc

$$g \circ f(U \cap A) \subset g(V \cap f(A)) \subset g(V \cap B) \subset W.$$

\square

Corollaire A.8 Soient X, Y, Z trois espaces topologiques, $x_0 \in X, y_0 \in Y, f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ deux applications. Si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} y_0$ et si g est continue en y_0 , alors

$$g \circ f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell.$$

\square

Exercice E.A.91 Soient $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques, Y un espace topologique, A une partie de Y et $a \in \overline{A}$.

(1) Soit X un ensemble muni de la topologie initiale définie par une famille d'applications $(f_i : X \rightarrow X_i)_{i \in I}$. Soit $f : B \rightarrow X$ une application avec $A \subset B \subset X$.

Montrer que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a, x \in A} \ell$ si et seulement si $f_i \circ f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a, x \in A} f_i(\ell)$ pour tout i dans I .

(2) Soient $X = \prod_{i \in I} X_i$, muni de ses projections canoniques $pr_i : (x_i)_{i \in I} \mapsto x_i$, et $f : Y \rightarrow X$ une application, de i -ème composante f_i . En déduire que

$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a, x \in A} (\ell_i)_{i \in I}$ si et seulement si $f_i(x) \xrightarrow{x \rightarrow a, x \in A} \ell_i$ pour tout i dans I .

Valeurs d'adhérence

On dit que $\ell \in Y$ est *valeur d'adhérence* de $f(x)$ quand x tend vers a dans A (ou de f en a si A est sous-entendu) si pour tout voisinage V de ℓ , pour tout voisinage U de a , l'ensemble $f(U \cap A) \cap V$ est non vide.

Remarque. Si \mathcal{U}, \mathcal{V} sont deux systèmes fondamentaux de voisinages de a, ℓ dans X, Y respectivement, alors il est immédiat que $\ell \in Y$ est valeur d'adhérence de f en a si et seulement si pour tout $V \in \mathcal{V}$, pour tout $U \in \mathcal{U}$, l'ensemble $f(U \cap A) \cap V$ est non vide. Par exemple, si X, Y sont deux espaces métriques, alors $\ell \in Y$ est valeur d'adhérence de f en a si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in A \quad d_X(a, x) < \delta \text{ et } d_Y(f(x), \ell) < \epsilon.$$

Exemple. Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite dans X , si $x \in X$, alors x est valeur d'adhérence de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si et seulement si

$$\forall V \in \mathcal{V}(x), \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N \quad x_n \in V.$$

En particulier, toute limite d'une sous-suite est valeur d'adhérence de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Si X est un espace métrique (il suffit que tout point de X admette un système fondamental dénombrable de voisinages), alors x est valeur d'adhérence de la suite si et seulement si x est limite d'une sous-suite.

Proposition A.9 1. L'ensemble des valeurs d'adhérence de f en a est

$$\bigcap_{U \in \mathcal{V}(a)} \overline{f(U \cap A)}.$$

2. Si f admet pour limite ℓ en a , alors ℓ est une valeur d'adhérence de f en a . Si de plus Y est séparé, cette valeur d'adhérence est unique.

Démonstration. (1) Soit $\ell \in Y$. Alors

$$\ell \in \bigcap_{U \in \mathcal{V}(a)} \overline{f(U \cap A)} \iff \forall U \in \mathcal{V}(a), \ell \in \overline{f(U \cap A)} \iff$$

$\forall U \in \mathcal{V}(a), \forall V \in \mathcal{V}(\ell) \quad f(U \cap A) \cap V \neq \emptyset \iff \ell$ est valeur d'adhérence de f en a .

(2) On suppose que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a, x \in A} \ell$. Soient V un voisinage de ℓ et U un voisinage de a . Alors il existe U' voisinage de a tel que $f(U' \cap A) \subset V$. Comme $U \cap U'$ est un voisinage de $a \in \overline{A}$, l'ensemble $U \cap U' \cap A$ est non vide. Donc

$$f(U \cap A) \cap V \supset f(U \cap U' \cap A) \cap V = f(U \cap U' \cap A) \neq \emptyset.$$

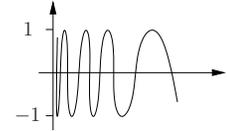
Si ℓ' est une valeur d'adhérence de f en a , distincte de ℓ , soient V, V' deux voisinages disjoints de ℓ, ℓ' respectivement. Soit U un voisinage de a tel que $f(U \cap A) \subset V$. Alors $f(U \cap A) \cap V'$ est vide, ce qui contredit le fait que ℓ' est une valeur d'adhérence de f en a . \square

Exemple. Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite dans X , alors l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est

$$\bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{\{x_n : n \geq N\}}.$$

Si X est séparé et si $\lim x_n = x$, alors x est l'unique valeur d'adhérence de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exemple. Si $X = \mathbb{R}, A =]0, +\infty[$, $a = 0 \in \overline{A}$ et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ est l'application $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$, alors l'ensemble des valeurs d'adhérence de f en 0 est $[-1, 1]$.



A.4 Compacité

Espace compact

Si X est un ensemble, une famille $(A_i)_{i \in I}$ de parties de X est un *recouvrement* de X (ou *recouvre* X) si $\bigcup_{i \in I} A_i = X$. Un *sous-recouvrement* est une sous-famille $(A_j)_{j \in J}$ (avec $J \subset I$) qui recouvre encore X . Si X est un espace topologique, un recouvrement $(A_i)_{i \in I}$ est dit *ouvert* ou *fermé* si les A_i le sont.

Définition A.10 Un espace topologique X est dit *compact* s'il est séparé et si tout recouvrement ouvert de X admet un sous-recouvrement fini.

Voir par exemple [Pau2] pour des conditions équivalentes dans le cas des espaces métrisables, dont la plus importante est : "toute suite admet une sous-suite convergente".

Exemple. Un espace discret est compact si et seulement s'il est fini, car la famille de ses singletons est un recouvrement ouvert.

Par passage au complémentaire, il est immédiat qu'un espace topologique séparé X est compact si et seulement si toute famille de fermés de X d'intersection vide admet une sous-famille finie d'intersection vide.

Soient X un espace topologique et A une partie de X . Comme les ouverts du sous-espace topologique A sont les traces sur A des ouverts de X , les assertions suivantes sont équivalentes :

- le sous-espace topologique A est compact.
- le sous-espace topologique A est séparé, et tout recouvrement de A par des ouverts de X admet un sous-recouvrement fini.

On dit alors que A est une *partie compacte* de X .

Proposition A.11 (1) Si X est un espace topologique séparé, si A est une partie compacte de X , alors A est fermée dans X .

(2) Un sous-espace fermé d'un espace compact est compact.

Démonstration. (1) On montre que $X - A$ est ouvert. Soit $x \in X - A$. Comme X est séparé, pour tout y dans A , il existe U_y, V_y deux ouverts disjoints avec $x \in U_y$ et $y \in V_y$. En particulier, $(V_y)_{y \in A}$ est un recouvrement de A par des ouverts de X . Par compacité de A , il existe y_1, \dots, y_n dans A tels que $A \subset V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n}$. Alors $U = \bigcap_{i=1}^n U_{y_i}$ est un ouvert de X , tel que $U \cap A = \emptyset$ et $x \in U$. Donc $X - A$ est ouvert.

(2) On a déjà démontré qu'un sous-espace d'un espace séparé est séparé. Soit A un fermé d'un espace compact X . Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de fermés de A , d'intersection vide. Puisque A est fermé, F_i est aussi fermé dans X , donc par compacité de X , il existe une sous-famille finie d'intersection vide. \square

Exercice E.A.92 Soit X un espace topologique séparé. Montrer que deux compacts disjoints de X ont des voisinages disjoints.

Compacité et valeurs d'adhérence

Soient X, Y deux espaces topologiques, A une partie de X , $a \in \bar{A}$ et $f : B \rightarrow Y$ une application avec $A \subset B \subset X$.

Proposition A.12 Si Y est compact, alors f admet au moins une valeur d'adhérence en a . De plus, si f admet une unique valeur d'adhérence ℓ en a , alors f admet ℓ pour limite en a .

Démonstration. Par la proposition A.9, l'ensemble des valeurs d'adhérence est $\bigcap_{U \in \mathcal{V}(a)} \overline{f(U \cap A)}$. Si cet ensemble est vide, par compacité de X , comme les $\overline{f(U \cap A)}$ sont fermés, il existe des voisinages U_1, \dots, U_n de a tels que $\overline{f(U_1 \cap A)} \cap \dots \cap \overline{f(U_n \cap A)} = \emptyset$. Comme

$$f(U_1 \cap \dots \cap U_n \cap A) \subset f(U_1 \cap A) \cap \dots \cap f(U_n \cap A) \subset \overline{f(U_1 \cap A)} \cap \dots \cap \overline{f(U_n \cap A)},$$

on a donc $U_1 \cap \dots \cap U_n \cap A = \emptyset$. Comme $U_1 \cap \dots \cap U_n$ est un voisinage de a , ceci contredit le fait que $a \in \bar{A}$.

Si ℓ est l'unique valeur d'adhérence, soit V un voisinage ouvert de ℓ . Alors $(Y - V) \cap \bigcap_{U \in \mathcal{V}(a)} \overline{f(U \cap A)}$ est vide, et les $Y - V, \overline{f(U \cap A)}$ sont fermés. Par compacité, il existe donc des voisinages U_1, \dots, U_n de a tels que $(Y - V) \cap \overline{f(U_1 \cap A)} \cap \dots \cap \overline{f(U_n \cap A)} = \emptyset$. Si $U = U_1 \cap \dots \cap U_n$, qui est un voisinage de a , alors $f(U \cap A) \subset \overline{f(U_1 \cap A)} \cap \dots \cap \overline{f(U_n \cap A)} \subset V$. Donc f admet ℓ pour limite en a . \square

Corollaire A.13 Dans un espace topologique compact, toute suite admet au moins une valeur d'adhérence. Si elle est unique, alors la suite converge vers elle. \square

Compacité et produits

Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre (partielle) \prec . Un élément x de E est dit *maximal* si

$$\forall y \in E \quad x \prec y \Rightarrow y = x.$$

Si $F \subset E$, un élément x de E est un *majorant* de F si

$$\forall y \in F \quad y \prec x.$$

Une partie F de E est *totalelement ordonnée* si

$$\forall x, y \in F \quad x \prec y \text{ ou } y \prec x.$$

L'ensemble E muni de \prec est dit *inductif* si toute partie totalelement ordonnée admet un majorant.

Théorème A.14 (Théorème de Zorn) Tout ensemble ordonné inductif non vide possède un élément maximal. \square

Ce théorème est admis (voir par exemple [Kri]), il est équivalent à l'axiome du choix.

Lemme A.15 Soit X un espace topologique. Un mauvais recouvrement de X est un recouvrement n'admettant pas de sous-recouvrement fini. Soit \mathcal{A} une prébase d'ouverts de X . Si X admet un mauvais recouvrement ouvert, alors il admet un mauvais recouvrement par des éléments de \mathcal{A} .

Démonstration. Soit \mathcal{M} l'ensemble supposé non vide des mauvais recouvrements ouverts de X , partiellement ordonné par l'inclusion. Montrons qu'il est inductif. Soit $(\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille totalelement ordonnée d'éléments de \mathcal{M} . Soit $\mathcal{U} = \bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{U}_\alpha$. Alors \mathcal{U} est un majorant des \mathcal{U}_α . C'est un mauvais recouvrement ouvert de X , sinon il contiendrait un sous-recouvrement fini $\{V_1, \dots, V_n\}$; si $V_i \in \mathcal{U}_{\alpha_i}$ et si $\beta \in A$ vérifie $\mathcal{U}_{\alpha_i} \subset \mathcal{U}_\beta$ pour tout i , alors \mathcal{U}_β aurait un sous-recouvrement ouvert fini, contradiction.

Par le théorème de Zorn, soit \mathcal{U}^* un élément maximal de \mathcal{M} . En particulier, pour tout ouvert $V \notin \mathcal{U}^*$, le recouvrement $\mathcal{U}^* \cup \{V\}$ n'est pas mauvais, donc il existe U_1, \dots, U_n dans \mathcal{U}^* tels que $\{V, U_1, \dots, U_n\}$ recouvre X .

Lemme A.16 Pour tous ouverts V, V' de X , si $V \notin \mathcal{U}^*$ et $V' \notin \mathcal{U}^*$, alors $V \cap V' \notin \mathcal{U}^*$.

Démonstration. Soient $U_1, \dots, U_n, U'_1, \dots, U'_{n'}$ dans \mathcal{U}^* tels que $\{V, U_1, \dots, U_n\}$ et $\{V', U'_1, \dots, U'_{n'}\}$ recouvrent X . Alors $\{V \cap V', U_1, \dots, U_n, U'_1, \dots, U'_{n'}\}$ recouvre X , et comme \mathcal{U}^* est mauvais, $V \cap V' \notin \mathcal{U}^*$. \square

Lemme A.17 Pour tous ouverts V, V' de X , si $V \notin \mathcal{U}^*$ et $V \subset V'$, alors $V' \notin \mathcal{U}^*$.

Démonstration. Si $\{V, U_1, \dots, U_n\}$ recouvre X , alors $\{V', U_1, \dots, U_n\}$ recouvre X aussi. \square

Montrons maintenant que $\mathcal{A} \cap \mathcal{U}^*$ recouvre X . Soit x_0 dans X . Comme \mathcal{U}^* recouvre X , il existe $U \in \mathcal{U}^*$ tel que $x_0 \in U$. Comme \mathcal{A} est une prébase, il existe V_1, \dots, V_n dans \mathcal{A} tels que $x_0 \in V_1 \cap \dots \cap V_n \subset U$. Par les lemmes précédents, il existe i tel que $V_i \in \mathcal{U}^*$. Donc $x_0 \in V_i \in \mathcal{A} \cap \mathcal{U}^*$. Enfin, comme \mathcal{U}^* est mauvais, $\mathcal{A} \cap \mathcal{U}^*$ l'est aussi. \square

Théorème A.18 (Théorème de Tychonov) Tout produit d'espaces compacts est compact.

Démonstration. On a déjà vu qu'un produit d'espaces séparés est séparé (proposition A.2). Soit $X = \prod_{i \in I} X_i$ un produit d'espaces compacts. Par les propriétés de la topologie produit, $\mathcal{A} = \{pr_j^{-1}(V) : j \in I, V \text{ ouvert de } X_j\}$ est une prébase d'ouverts de X . Si X n'est pas compact, par le lemme technique A.15, il existe un mauvais recouvrement \mathcal{U} de X par des éléments de \mathcal{A} . Pour $j \in I$, soit \mathcal{A}_j l'ensemble des ouverts V de X_j tels que $pr_j^{-1}(V) \in \mathcal{U}$. Si \mathcal{A}_j recouvre X_j , par compacité de X_j , il existe V_1, \dots, V_n dans \mathcal{A}_j recouvrant X_j . Mais alors $pr_j^{-1}(V_1) \cup \dots \cup pr_j^{-1}(V_n) = pr_j^{-1}(X_j) = X$, ce qui contredit le fait que \mathcal{U} est mauvais. Soit donc x_j dans X_j tel que $x_j \notin \bigcup \mathcal{A}_j$. On pose $x = (x_j)_{j \in I}$. Comme \mathcal{U} recouvre X , il existe $j \in I$ et V ouvert de X_j tel que $x \in pr_j^{-1}(V) \in \mathcal{U}$. Ceci contredit le fait que $x_j \notin \bigcup \mathcal{A}_j$. \square

Espaces localement compacts

Un espace topologique est *localement compact* s'il est séparé et si tout point admet un voisinage compact.

Exemples.

1. Tout espace discret est localement compact.
2. Tout espace compact est localement compact.
3. (Théorème de Riesz) Un espace vectoriel normé est localement compact si et seulement s'il est de dimension finie. En particulier, \mathbb{R} est localement compact (mais pas compact).
4. Un sous-espace fermé d'un espace localement compact est localement compact.
5. Un produit fini d'espaces localement compacts est localement compact.

6. L'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ n'est pas localement compact, car si V est un voisinage compact de $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, alors V contient un voisinage élémentaire $]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[\times \dots \times]x_n - \epsilon, x_n + \epsilon[\times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots$. Alors $pr_{n+1}(V) = \mathbb{R}$ qui est non compact, ce qui contredit la continuité de pr_{n+1} .

Proposition A.19 Dans un espace localement compact X , tout point admet un système fondamental de voisinages compacts.

Démonstration. Soient $x \in X$ et F un voisinage compact de x . Pour tout ouvert U avec $x \in U \subset F$, il suffit de montrer qu'il existe un voisinage W de x fermé, contenu dans U , donc compact.

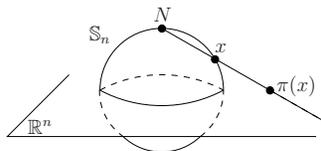
Comme X est séparé, si $y \neq x$, soient V et V' des voisinages de x et y respectivement tels que $V \cap V' = \emptyset$. Alors $y \notin \overline{V}$, donc $\bigcap_{V \in \mathcal{V}(x)} \overline{V} = \{x\}$. Par conséquent, $(X - U) \cap \bigcap_{V \in \mathcal{V}(x)} \overline{V} = \emptyset$. Par compacité de F , il existe des voisinages V_1, \dots, V_n de x tels que $(X - U) \cap \overline{V}_1 \cap \dots \cap \overline{V}_n \cap F = \emptyset$. Alors $W = \overline{V}_1 \cap \dots \cap \overline{V}_n \cap F$ est un voisinage fermé de x contenu dans U . \square

Corollaire A.20 Tout ouvert d'un espace localement compact est localement compact. En particulier, si X est localement compact et $x \in X$, alors $X - \{x\}$ est un espace localement compact. \square

Exercice E.A.93 (Compactifié d'Alexandrov) Soit X un espace localement compact, ∞ un ensemble n'appartenant pas à X et $\widehat{X} = X \cup \{\infty\}$.

1. Montrer que l'ensemble des parties de \widehat{X} de la forme U , avec U ouvert de X , ou $(X - K) \cup \{\infty\}$, avec K compact de X , est une topologie sur \widehat{X} . (L'espace \widehat{X} , muni de cette topologie, est appelé le compactifié d'Alexandrov de X et on son point à l'infini.)
2. Montrer que la topologie induite sur X par celle de \widehat{X} est la topologie usuelle de X .
3. Montrer que \widehat{X} est compact.
4. (Unicité) Si Y est un espace topologique compact et si $\phi : X \rightarrow Y$ est un homéomorphisme sur son image, tel que $\phi(X) = Y - \{y\}$, montrer que $\widehat{\phi} : \widehat{X} \rightarrow Y$ définie par $x \mapsto \phi(x)$ si $x \in X$ et $\infty \mapsto y$, est un homéomorphisme.
5. (Fonctorialité) Montrer que si Y est un espace localement compact, et si $f : X \rightarrow Y$ est un homéomorphisme, alors l'application $\widehat{f} : \widehat{X} \rightarrow \widehat{Y}$ définie par $\widehat{f}|_X = f$ et $\widehat{f}(\infty) = \infty$ est un homéomorphisme.
6. (Extension) Montrer que si Y est un espace localement compact, et si $f : X \rightarrow Y$ est une application continue propre (voir ci-dessous), alors l'application $\widehat{f} : \widehat{X} \rightarrow \widehat{Y}$ définie par $\widehat{f}|_X = f$ et $\widehat{f}(\infty) = \infty$ est continue.
7. Montrer que si X est compact, alors \widehat{X} est homéomorphe à $X \sqcup \{\infty\}$, muni de la topologie somme disjointe.

8. Montrer que le compactifié d'Alexandrov de \mathbb{R}^n est homéomorphe à \mathbb{S}_n . (On regarde \mathbb{R}^n contenu dans \mathbb{R}^{n+1} comme l'hyperplan des n premières coordonnées. Si N est le pôle nord de \mathbb{S}_n , on utilisera la propriété 4 d'unicité, en montrant que la projection stéréographique $\pi : \mathbb{S}_n - \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n$, qui à x associe le point d'intersection avec \mathbb{R}^n de la droite passant par N et x , est un homéomorphisme.)



Compacité et continuité

Théorème A.21 Soient X un espace compact, Y un espace séparé et $f : X \rightarrow Y$ une application continue. Alors

- (1) l'espace $f(X)$ est compact ;
- (2) si f est bijective, alors f est un homéomorphisme.

Démonstration. (1) D'abord, $f(X)$ est séparé car Y l'est. Pour tout recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$ de $f(X)$, la famille $(f^{-1}(U_i))_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de X , donc admet un sous-recouvrement fini $(f^{-1}(U_j))_{j \in J}$. D'où $f(X) \subset \bigcup_{j \in J} U_j$. Par conséquent, $f(X)$ est compact.

(2) Il suffit de montrer que f^{-1} est continue, c'est-à-dire que f est fermée. Si F est un fermé de X , alors F est compact dans X , donc $f(F)$ est compact dans Y par (1), donc fermé dans Y car Y est séparé. \square

Du résultat précédent, il découle que l'application $\bar{\phi} : \mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \rightarrow (\mathbb{S}_1)^n$, avec $[(t_1, \dots, t_n)] \mapsto (e^{2\pi i t_1}, \dots, e^{2\pi i t_n})$, qui est continue, bijective, de but séparé, de source compacte (car séparée par l'exercice E.A.85 et image du compact $[0, 1]^n$ par la projection canonique $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ qui est continue), est un homéomorphisme.

Soient X, Y deux espaces topologiques séparés, et $f : X \rightarrow Y$ une application. On dit que f est *propre* si f est fermée et si l'image réciproque par f de tout point de Y est un compact de X . La condition que f est fermée est, dans la pratique, difficile à vérifier. Lorsque les espaces sont localement compacts, on utilisera presque exclusivement la caractérisation suivante : une application continue entre espaces topologiques localement compacts est propre si et seulement si l'image réciproque de tout compact est compact.

Proposition A.22 Si f est propre, alors l'image réciproque par f de tout compact de Y est un compact de X . Si Y est localement compact, et si l'image réciproque par f de tout compact de Y est un compact de X , alors f est propre.

Démonstration. Si f est propre, soit K un compact de Y et $(F_i)_{i \in I}$ une famille de fermés de $f^{-1}(K)$, d'intersection vide. On suppose par l'absurde que $C_J = \bigcap_{j \in J} F_j \neq \emptyset$ pour toute partie finie J de I . Alors $f(C_J)$ est un fermé de Y , donc de K . Pour toute famille finie (J_α) de parties finies de I , on a

$$\bigcap_{\alpha} f(C_{J_\alpha}) \supset f\left(\bigcap_{j \in \bigcup J_\alpha} F_j\right) \neq \emptyset.$$

Comme K est compact, il existe au moins un point y dans l'intersection des ensembles $f(C_J)$ pour toutes les parties finies J dans I . Pour toute partie finie J dans I , on a donc

$$f^{-1}(y) \cap \bigcap_{j \in J} F_j = f^{-1}(y) \cap C_J \neq \emptyset.$$

Puisque $f^{-1}(y)$ est compact, on a donc $f^{-1}(y) \cap \bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$, ce qui contredit le fait que la famille $(F_i)_{i \in I}$ est d'intersection vide.

Réciproquement, on suppose que Y est localement compact, et que l'image réciproque par f de tout compact de Y est un compact de X . Alors le singleton $\{y\}$ est compact dans Y , donc $f^{-1}(y)$ est compact. Soit F un fermé de X et $y \in f(F)$. Soit W un voisinage compact de y . Soit $(V_i)_{i \in I}$ un système fondamental de voisinages compacts de y contenus dans W . Le fermé $F_i = f^{-1}(V_i) \cap F$ de X est contenu dans le compact $f^{-1}(W) \cap F$. L'intersection $\bigcap_{j \in J} F_j$ est non vide pour toute partie finie J de I , car $\bigcap_{j \in J} V_j$ est un voisinage de y . Par compacité de $f^{-1}(W) \cap F$, il existe donc un point x dans $\bigcap_{i \in I} F_i$. Donc $f(x) \in \bigcap_{i \in I} V_i = \{y\}$. D'où $f(x) = y$ et f est fermée. \square

Exemple. Soient E, F deux espaces vectoriels normés de dimension finie, et $f : E \rightarrow F$ une application continue. Alors f est propre si et seulement si pour toute suite $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ dans E telle que $\|x_i\| \xrightarrow{i \rightarrow \infty} +\infty$, on a $\|f(x_i)\| \xrightarrow{i \rightarrow \infty} +\infty$. Ceci découle du fait que les compacts de E, F sont leurs fermés bornés.

Proposition A.23 Soient X, Y deux espaces séparés, et $f : X \rightarrow Y$ une application continue. Si f est bijective et propre, alors f est un homéomorphisme.

Démonstration. Si f est propre, elle est fermée, donc f^{-1} est continue. (Voici aussi, lorsque X, Y sont localement compacts, ce qui est le cas dans la plupart des applications, une preuve utilisant la caractérisation des applications propres entre espaces topologiques localement compacts. Il suffit de montrer que f^{-1} est continue en tout point y de Y . Soit V un voisinage compact de y . Alors $U = f^{-1}(V)$ est un voisinage de $f^{-1}(y)$ car f est continue, qui est compact car f est propre. Donc $f|_U : U \rightarrow V$ est une bijection continue entre espaces compacts, donc un homéomorphisme. Comme U, V sont des voisinages de x, y respectivement, ceci implique que f^{-1} est continue en y .) \square

Topologie compacte-ouverte

Soient X, Y deux espaces topologiques, avec X localement compact. On note $\mathcal{C}(X, Y)$ l'ensemble des applications continues de X dans Y . On appelle *topologie compacte-ouverte* sur $\mathcal{C}(X, Y)$ la topologie engendrée par les parties de la forme

$$O(K, U) = \{f \in \mathcal{C}(X, Y) : f(K) \subset U\}$$

pour K compact de X et U ouvert de Y . Sauf mention contraire, l'ensemble $\mathcal{C}(X, Y)$ sera muni de cette topologie. (Il n'y a pas besoin que X soit localement compact pour définir cette topologie, mais l'hypothèse de locale compacité sur X implique qu'il y a suffisamment de compacts dans X pour que cette topologie soit intéressante.)

Exercice E.A.94 Soient X, Y deux espaces topologiques, avec X localement compact.

1. Montrer que l'application d'évaluation $\mathcal{C}(X, Y) \times X \rightarrow Y$ avec $(f, x) \mapsto f(x)$ est continue.
2. Si Z est un espace topologique, montrer que l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(Z \times X, Y) &\longrightarrow \mathcal{C}(Z, \mathcal{C}(X, Y)) \\ f &\longmapsto \{z \mapsto f_z : x \mapsto f(z, x)\} \end{aligned}$$

est une bijection.

3. Montrer que la topologie compacte-ouverte sur $\mathcal{C}(X, Y)$ est la seule topologie sur cet ensemble telle que pour tout espace topologique Z , l'application $\mathcal{C}(Z \times X, Y) \rightarrow \mathcal{C}(Z, \mathcal{C}(X, Y))$ ci-dessus soit une bijection.
4. Montrer que si Y est séparé, alors $\mathcal{C}(X, Y)$ l'est aussi.

A.5 Exercices récapitulatifs

Exercice E.A.95 • Montrer qu'un espace topologique X est séparé si et seulement si la diagonale $\Delta = \{(x, y) \in X \times X : x = y\}$ de $X \times X$ est fermée.

- Montrer que si $f, g : X \rightarrow Y$ sont deux applications continues et si Y est séparé, alors $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ est fermé dans X .
- Montrer que si $f, g : X \rightarrow Y$ sont deux applications continues et si Y est séparé, et si f et g coïncident sur une partie dense de X , alors $f = g$.

Exercice E.A.96 Un espace topologique X est dit *normal* s'il est séparé et si pour tous les fermés disjoints F et F' de X , il existe des ouverts disjoints U et U' de X tels que $F \subset U$ et $F' \subset U'$.

- Montrer qu'un espace topologique compact est normal.
- Montrer que si F est un fermé de X et U un ouvert de X contenant F , alors il existe un ouvert V de X tel que

$$F \subset V \subset \overline{V} \subset U.$$

- Soit X un espace topologique normal, \sim une relation d'équivalence telle que la projection canonique $\pi : X \rightarrow X/\sim$ soit fermée. Montrer que X/\sim est normal (donc séparé).
- Soit X un espace topologique compact, \sim une relation d'équivalence telle que la projection canonique $\pi : X \rightarrow X/\sim$ soit fermée. Montrer que X/\sim est compact.
- Montrer que l'espace topologique somme disjointe d'une famille d'espaces topologiques normaux est normal.
- Soit X un espace topologique compact, \sim une relation d'équivalence fermée (en tant que partie de $X \times X$). Montrer que X/\sim est compact.
- Soient X, Y deux espaces topologiques normaux, A un fermé de X et $f : A \rightarrow Y$ une application continue. Montrer que $X \cup_f Y$ est normal (donc séparé). En déduire que $X/\langle A \rangle$ est normal. Si X, Y sont compacts, montrer que $X \cup_f Y$ est compact.
- Montrer que si X est un espace topologique séparé (respectivement normal), alors son cône CX et sa suspension SX sont aussi séparés (respectivement normal).

Exercice E.A.97 Pour n dans \mathbb{N} , on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne standard sur \mathbb{R}^n (telle que $\|(x_1, \dots, x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$). Soit $\mathbb{B}_n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ la boule unité (fermée) de \mathbb{R}^n et $\mathbb{S}_n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$ la sphère de dimension n . On identifie \mathbb{C}^n avec \mathbb{R}^{2n} par $(z_1, \dots, z_n) \mapsto (\operatorname{Re} z_1, \dots, \operatorname{Re} z_n, \operatorname{Im} z_1, \dots, \operatorname{Im} z_n)$. On identifie \mathbb{R}^n avec un sous-espace de \mathbb{R}^{n+1} par $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n, 0)$.

- Sur $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$, on considère la relation d'équivalence $x \sim_1 \lambda x$ pour tout x dans $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ et λ dans $\mathbb{R} - \{0\}$. Sur \mathbb{S}_n , on considère la relation d'équivalence $x \sim_2 \pm x$ pour tout x dans \mathbb{S}_n . Sur \mathbb{B}_n , on considère la relation d'équivalence \sim_3 engendrée par $x \sim -x$ pour tout x dans $\mathbb{S}_{n-1} = \partial\mathbb{B}_n$. Montrer que l'inclusion $\mathbb{S}_n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ et l'application $\mathbb{B}_n \rightarrow \mathbb{S}_n$ définie par $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n, \sqrt{1 - \sum_{i=1}^n x_i^2})$ induisent des homéomorphismes $\mathbb{S}_n/\sim_2 \rightarrow (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})/\sim_1$ et $\mathbb{B}_n/\sim_3 \rightarrow \mathbb{S}_n/\sim_2$. Montrer que ces espaces sont compacts. L'espace quotient $(\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})/\sim_1$ est appelé l'*espace projectif réel* de dimension n et noté $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ (ou $\mathbb{R}P_n$). On note $[x_1, \dots, x_{n+1}]$ la classe d'équivalence de (x_1, \dots, x_{n+1}) .
- Sur $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$, on considère la relation d'équivalence $x \sim_1 \lambda x$ pour tout x dans $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ et λ dans $\mathbb{C} - \{0\}$. Sur \mathbb{S}_{2n+1} , on considère la relation d'équivalence $x \sim_2 \lambda x$ pour tout x dans \mathbb{S}_{2n+1} et $\lambda \in \mathbb{S}_1$. Montrer que l'inclusion $\mathbb{S}_{2n+1} \hookrightarrow \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ induit un homéomorphisme $\mathbb{S}_{2n+1}/\sim_2 \rightarrow (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})/\sim_1$. Montrer que ces espaces sont compacts. L'espace quotient $(\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})/\sim_1$ est appelé l'*espace projectif complexe* de dimension n et noté $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ (ou $\mathbb{C}P_n$). On note $[z_1, \dots, z_{n+1}]$ la classe d'équivalence de (z_1, \dots, z_{n+1}) .
- Montrer que $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$ est homéomorphe au compactifié d'Alexandrov de \mathbb{R} (donc à \mathbb{S}_1), par l'application $[x, y] \mapsto x/y$ si $y \neq 0$, et $[x, 0] \mapsto \infty$. Montrer que $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ est homéomorphe au compactifié d'Alexandrov de \mathbb{C} (donc à \mathbb{S}_2), par l'application $[w, z] \mapsto w/z$ si $z \neq 0$, et $[w, 0] \mapsto \infty$.

- Si $f : \mathbb{S}_{n-1} \rightarrow \mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R})$ (ces deux espaces sont vides si $n = 0$) est la projection canonique $(x_1, \dots, x_n) \mapsto [x_1, \dots, x_n]$, montrer que l'application

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{B}_n \amalg \mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \\ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{B}_n &\mapsto [x_1, \dots, x_n, \sqrt{1 - \sum_{i=1}^n x_i^2}] \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \\ [x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R}) &\mapsto [x_1, \dots, x_n, 0] \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

induit un homéomorphisme

$$\mathbb{B}_n \cup_f \mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}_n(\mathbb{R}).$$

- De même, montrer que si $f : \mathbb{S}_{2n-1} \rightarrow \mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C})$ désigne la projection canonique $(z_1, \dots, z_n) \mapsto [z_1, \dots, z_n]$, alors l'application

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{B}_{2n} \amalg \mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C}) &\rightarrow \mathbb{P}_n(\mathbb{C}) \\ (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{B}_{2n} &\mapsto [z_1, \dots, z_n, \sqrt{1 - \sum_{i=1}^n |z_i|^2}] \in \mathbb{P}_n(\mathbb{C}) \\ [z_1, \dots, z_n] \in \mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C}) &\mapsto [z_1, \dots, z_n, 0] \in \mathbb{P}_n(\mathbb{C}) \end{aligned}$$

induit un homéomorphisme

$$\mathbb{B}_{2n} \cup_f \mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}_n(\mathbb{C}).$$

Exercice E.A.98 Soit G un sous-groupe (additif) de \mathbb{R} . On considère la relation d'équivalence \sim sur \mathbb{R} définie par $x \sim y$ si $x - y \in G$. Quelle est la topologie quotient sur \mathbb{R}/\sim ?

Exercice E.A.99 On munit $\{0, 1\}$ de la topologie discrète et $X = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ de la topologie produit. On appelle *sous-suite finie consécutive* de $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in X$ toute suite finie de la forme $(x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{k+\ell})$ avec $k, \ell \in \mathbb{N}$. Soit M un ensemble de suites finies de 0 et de 1. Montrer que le sous-espace des éléments de X , dont aucune sous-suite finie consécutive n'est dans M , est compact.

Exercice E.A.100 Un espace topologique est *séparable* s'il admet une partie dénombrable dense.

- Montrer qu'un espace métrisable compact est séparable.
- Si X est un espace séparable, montrer que tout ouvert de $X^{\mathbb{N}}$ est union dénombrable d'ouverts élémentaires.
- Si X est un espace topologique, est-ce que tout ouvert de $X^{\mathbb{N}}$ est union dénombrable d'ouverts élémentaires ?

Exercice E.A.101 Un espace topologique est dit *totalelement discontinu* si tout point admet un système fondamental de voisinages à la fois ouverts et fermés. Montrer que tout espace topologique métrisable, compact, totalelement discontinu, sans point isolé, non vide est homéomorphe à l'espace triadique de Cantor (voir exercice E.A.81). Montrer que tout espace topologique métrisable, compact, sans point isolé, non vide contient un sous-espace homéomorphe à l'espace triadique de Cantor.

Exercice E.A.102 Soit E un ensemble, si $\{0, 1\}$ est muni de la topologie discrète, montrer que $\{0, 1\}^E$ est un espace compact totalelement discontinu sans point isolé. Montrer que $\{0, 1\}^E$ est séparable si et seulement si E est fini ou dénombrable.

Index

abélianisé, 135
action
continue, 30
libre, 33
propre, 32
proprement discontinue, 32
adhérence, 168
Alexandrov, 190
anneau
des coefficients, 109
application
antipodale, 151, 158
caractéristique, 77, 78
cellulaire, 78, 149
continue, 171
en un point, 170
d'attachement, 77, 78
fermée, 171
graphe, 32
ouverte, 171
propre, 191
arbre, 83
arête, 78
ouverte, 78
automorphisme
de revêtements, 27
autorphisme, 107
base, 24, 26
base canonique, 146
base d'ouverts, 167
 \mathbb{B}_n , 194
 $B_n(X, \mathbb{A})$, 111
bord, 10, 102, 110
singulier, 111
boule unité, 194
bouquet
de cercles, 181
de sphères, 77, 181
bouteille de Klein, 79
Cantor, 176
caractéristique d'Euler, 84, 155
caractéristique d'Euler-Poincaré, 105
catégorie, 106
cellule, 76–78
ouverte, 76–78
chaîne, 10
singulière, 109
chemin, 15
composé, 15
constant, 15
extrémité d'un, 15
inverse, 15
origine d'un, 15
chemins
composables, 15
homotopes, 15
classe d'homologie, 10
cobord, 106
cocycle, 106
codimension, 8
cohomologie
cellulaire, 161
singulière, 161
relative, 161
compactifié d'Alexandrov, 190
complexe
de cochaînes, 106
de chaînes, 102
cellulaires, 149
singulières, 111
2-complexe de Cayley, 87
complexe de chaînes
 \mathcal{U} -petites, 118
composante connexe, 171
par arcs, 171
composition, 107
des chemins, 15
concaténation, 15
cône, 180
conjecture
de Poincaré, 12
connectivité, 84
connexe, 171
contractile, 13
localement, 14
 CP_n , 194
 $C_p(X, Y; \mathbb{A})$, 116

critère
 pour base d'ouverts, 167
 CW-complexe, 78
 fini, 78
 $\mathcal{C}(X, Y)$, 193
 cycle, 10, 102
 singulier, 111

décomposition polaire, 30
 décomposition cellulaire, 77
 décomposition cellulaire, 78
 degré, 24, 150
 dense, 168
 dimension, 78, 134
 dual, 160
 dual topologique, 172

écrasement, 181
 engendrer, 66
 ensemble triadique de Cantor, 176
 équivalence d'homotopie, 14
 espace
 des bords, 102
 des cobords, 106
 des cocycles, 106
 des cycles, 102
 espace topologique
 paracompact, 25
 espace de Moore, 158
 espace des orbites, 31
 espace lenticulaire, 34
 espace projectif
 complexe, 194
 réel, 194
 espace topologique, 166
 compact, 186
 connexe, 171
 par arcs, 171
 discret, 166
 grossier, 166
 homéomorphes, 166
 localement
 compact, 189
 connexe, 171
 connexe par arcs, 171
 métrisable, 170
 normal, 193

séparable, 195
 semilocalement simplement connexe, 50
 séparé, 170
 totalement discontinu, 195

espace total, 26
 espace vectoriel topologique, 13
 excision, 11, 164

face, 109
 famille inductive, 69
 famille inductive, 127
 de parties, 127
 complète, 128
 fermé, 166
 de Zariski, 166
 fermée, 171
 fibré vectoriel, 24
 fibré vectoriel
 isomorphes, 25
 fibré vectoriel
 trivial, 25
 fibre, 24, 26
 fibré
 localement trivial, 26
 foncteur
 contravariant, 108
 covariant, 107
 forme normale, 72
 fortement continue, 172
 frontière, 168

genre, 138
 graphe, 78
 groupe
 de Galois, 49
 de Poincaré, 17
 de présentation finie, 68
 de type fini, 68
 discret, 29
 fondamental, 17
 libre, 66, 67
 linéaire, 29
 orthogonal, 30
 spécial linéaire, 29, 30
 spécial orthogonal, 30
 spécial unitaire, 29
 topologique, 29

unitaire, 29
 G_x , 33

$H_n(X, \mathbb{A})$, 111
 $H_n(X, Y; \mathbb{A})$, 116
 $\text{Hom}(\cdot, M)$, 160
 homéomorphisme, 166
 homéomorphisme local, 27
 homologie, 102
 cellulaire, 149
 singulière, 111
 relative, 116
 homologue à zéro, 12
 homotope, 17
 homotope à zéro, 12
 homotopie, 13, 15, 103
 de morphisme de paires, 115
 relative, 13, 15

immersion, 28
 inductif, 188
 intérieur, 168
 invariante par homéomorphismes, 166
 isolé, 174
 isomorphe, 25, 107
 isomorphisme, 107
 de revêtements, 26
 de groupes topologiques, 29

lacet, 17
 lemme
 des cinq, 108
 limite, 182
 à droite, 183
 à gauche, 183
 en $+\infty$, 183
 en $-\infty$, 183
 limite inductive, 69, 128
 localement
 contractile, 14
 localement compact, 189
 longueur d'un mot, 67

majorant, 188
 maximal, 188
 métrisable, 170
 moins fine, 172
 morphisme, 107

canonique, 67
 composé, 102, 104
 de revêtements, 26, 42
 composé, 26, 42
 identité, 26, 42
 de bord, 102, 110
 de cobord, 106
 de complexes
 de chaînes, 102
 de cochaînes, 106
 de groupes topologiques, 29
 de Hurewicz, 135
 de paires, 115
 de suites exactes
 de complexes de chaînes, 103
 identité, 102, 104
 mot, 67
 réduit, 68, 72

nœud, 131
 nombre de Betti, 105
 normal, 193
 normalisateur, 46
 nulle part dense, 168

objet, 107
 opérateur
 de subdivision, 118
 orbite, 31
 ordre de connexion, 8
 ordre inductif, 127
 ouvert, 166
 élémentaire, 174
 ouverte, 171

paire
 d'espaces topologiques, 115
 paracompact, 25
 partie compacte, 187
 partie génératrice, 66
 peigne, 22
 $\pi_0 X$, 39
 $\pi_1(X, x)$, 17
 plus fine, 172
 $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$, 194
 $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$, 194
 point à l'infini, 190
 point base, 17

- prébase, 167
- présentation de groupe, 68
- produit
 - amalgamé, 71
 - de Kronecker, 161
 - libre, 71
- projection stéréographique, 191
- propre, 191
- propriété universelle, 66, 69
- p -simplexe
 - singulier, 109
 - standard, 109
- \mathbb{R} , 168
- rang
 - d'un fibré vectoriel, 24
 - d'un groupe libre, 67
- recollement, 181
 - de cellules, 76
- recouvrement, 186
 - fermé, 186
 - localement fini, 174
 - mauvais, 188
 - ouvert, 186
- relation d'équivalence engendrée, 179
- relevé, 35
- relèvement, 35
- rétracte, 14
 - fort par déformation, 14
 - par déformation, 14
- rétraction, 14
 - forte par déformation, 14
 - par déformation, 14
- revêtement, 26
 - à n feuillets, 28
 - associé, 53
 - connexe, 53
 - fini, 28
 - galoisien, 49
 - image réciproque, 42
 - trivial, 27
 - universel, 49
- Riesz, 189
- $\mathbb{R}P_n$, 194
- ruban de Möbius, 22
- séparable, 195

- saturé, 178
- section, 35
- semilocalement simplement connexe, 50
- séparé, 170
- simplement connexe, 12, 14
- S_n , 194
- somme
 - amalgamée, 70, 71
 - disjointe, 176
 - pointée, 181
 - presque nulle, 128
- sommet, 78, 180
- sous-espace topologique, 173
- sous-groupe
 - dérivé, 135
 - des commutateurs, 135
 - distingué
 - engendré par, 66
 - engendré par, 66
- sous-recouvrement, 186
- sous-CW-complexe, 78
- sous-variété
 - topologique, 8
- sphère, 194
- sphère à cornes d'Alexander, 133
- squelette, 78
- stabilisateur, 33
- submersion, 28
- suite exhaustive
 - de compacts, 128
- suite exacte, 101
 - de complexes de chaînes, 103
 - longue
 - d'homologie, 104
 - d'homologie singulière relative, 117
 - de cohomologie singulière relative, 164
 - de Mayer-Vietoris, 125, 164
 - du triplet, 154
- suspension, 180
- système fondamental de voisinages, 168
- théorème
 - d'invariance du domaine, 6
 - de Riesz, 189
 - de Schreier, 86
 - de Borsuk-Ulam, 158
 - de Brouwer

- d'invariance du domaine II, 133
- d'invariance du domaine I, 6
- du point fixe, 6
- de Hurewicz, 136
- de Jordan-Brouwer, 132
- de peignage des sphères, 158
- de Tychonov, 189
- de van Kampen, 74
- de Zorn, 188
- des petites chaînes, 118
- d'excision, 121
- du point fixe, 6
- théorie
 - de l'homologie, 10
- \mathbb{T}^n , 178
- topologie, 166
 - compacte-ouverte, 193
 - de Zariski, 167
 - discrète, 166
 - engendrée, 167
 - faible (d'un espace vectoriel topologique), 172
 - faible (définie par une famille de sous-espaces), 177
 - finale, 176
 - forte, 172
 - grossière, 166
 - induite, 173
 - induite par une distance, 166
 - initiale, 172
 - moins fine, 172
 - plus fine, 172
 - produit, 174
 - quotient, 177
 - somme disjointe, 176
- tore, 178
- totalelement discontinu, 195
- totalelement ordonnée, 188
- trivial, 25
- trivialisation locale, 26
- Tychonov, 189
- type d'homotopie, 14
 - de paires, 115
- $\mathcal{V}(x)$, 168
- valeur d'adhérence, 185
- variété
 - topologique, 8
 - à bord, 9
- voisinage
 - d'un point, 168
 - d'une partie, 168
 - distingué, 24, 26
- $Z_n(X, \mathbb{A})$, 111
- Zorn, 188

Références

- [BBBMP] L. Bessières, G. Besson, M. Boileau, S. Maillot, J. Porti, *Geometrisation of 3-manifolds*, livre à paraître, http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~besson/english_principal.pdf
- [BT] R. Bott, L. Tu, *Differential forms in algebraic topology*, Springer Verlag, 1982.
- [Bre] G. Bredon, *Geometry and topology*, Springer Verlag, 1993.
- [Bou] N. Bourbaki, *Topologie générale*, Chap. 1-4, Masson, 1990.
- [CZ] H.-D. Cao and X.-P. Zhu, *A complete proof of the Poincaré and geometrization conjectures : application of the Hamilton-Perelman theory of the Ricci flow*, Asian J. Math. **10** (2006) 165–492.
- [CE] H. Cartan, S. Eilenberg, *Homological algebra*, Princeton Univ. Press, 1956.
- [DeR] G. de Rham, *Variétés différentiables*, Hermann, 1960.
- [Dix] J. Dixmier, *Topologie générale*, Presse Univ. France, 1981.
- [Die1] J. Dieudonné, *Éléments d'analyse t. 3*, Gauthier-Villars, 2e éd. 1974.
- [Die2] J. Dieudonné, *A history of algebraic and differential topology 1900-1960*, Birkhäuser, 1990.
- [Dol] A. Dold, *Lectures on algebraic topology*, Springer Verlag, 1980.
- [DNF] B. Doubrovine, S. Novikov, A. Fomenko, *Géométrie contemporaine I, II*, Éditions MIR, 1987.
- [Dug] J. Dugundji, *Topology*, Wm. C. Brown, 1989.
- [ES] S. Eilenberg, N. Steenrod, *Foundations of algebraic topology*, Princeton Univ. Press, 1952.
- [FFG] A. Fomenko, D. Fuks, V. Gutenmacher, *Homotopic topology*, Akadémiai kiadó Budapest, 1986.
- [God] C. Godbillon, *Éléments de topologie algébrique*, Hermann, 1971.
- [Gra] A. Gramain, *Topologie des surfaces*, Presse Univ. France, 1971.
- [GH] M. Greenberg, J. Harper, *Algebraic topology, a first course*, Addison-Wesley, 1981.
- [Har1] P. de la Harpe, *An invitation to Coxeter groups*, dans “Group theory from a geometrical viewpoint ” (E. Ghys, A. Haefliger, A. Verjovsky eds.), pp 193-253, World Scientific, 1991.
- [Har2] P. de la Harpe, *Topics in geometric group theory*, Chicago Univ. Press, 2000.
- [Hat] A. Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge Univ. Press, 2002, <http://www.math.cornell.edu/~hatcher>.
- [KL] B. Kleiner, J. Lott, *Notes on Perelman's papers*, Geom. Topol. **12** (2008) 2587–2855.
- [Kri] J.L. Krivine, *Théorie axiomatique des ensembles*, Presse Univ. France, 1969.
- [Laf] J. Lafontaine, *Introduction aux variétés différentielles*, Press. Univ. Grenoble, 1996.
- [McL] S. Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, Grad. texts Math. **5**, Springer Verlag, 1971.
- [MT] J. Morgan, G. Tian. *Ricci Flow and the Poincaré Conjecture*, Clay Math. Monographs **3**, Amer. Math. Soc. 2007.
- [Olu] P. Olum, *Non-abelian cohomology and van Kampen's theorem*, Ann. Math. **68** (1958) 658-668.
- [Pau1] F. Paulin, *Géométrie différentielle élémentaire*, Notes de cours, École Normale Supérieure, <http://www.fimfa.ens.fr/fimfa/IMG/File/cours/poly2p.pdf> .
- [Pau2] F. Paulin, *Topologie, analyse et calcul différentiel*, Notes de cours, École Normale Supérieure <http://www.fimfa.ens.fr/fimfa/IMG/File/cours/polyanalyse12009.pdf> .
- [Per] D. Perrin, *Géométrie algébrique : une introduction*, Interditions/CNRS éditions, 1995.
- [Poi] H. Poincaré, *Oeuvres complètes, Vol. 6*, Gauthier Villars, 1953.
- [Pon] J.C. Pont, *La topologie algébrique des origines à Poincaré*, Presse Univ. France, 1974.
- [Rol] D. Rolfsen, *Knots and links*, Publish or Perish, 1976.
- [Ser] J.-P. Serre, *Arbres, amalgames, SL_2* , Astérisque **46**, Soc. Math. France, 1983.
- [Spa] E. Spanier, *Algebraic topology*, Tata McGraw-Hill, 1981.
- [Vic] J. Vick, *Homology theory : an introduction to algebraic topology*, Academic Press, 1973.
- [Wal] A. Wallace, *Algebraic topology : homology and cohomology*, Benjamin, 1970.

Département de Mathématique et Applications, UMR 8553 CNRS
Ecole Normale Supérieure
45 rue d'Ulm
75230 PARIS Cedex 05, FRANCE
e-mail : Frederic.Paulin@ens.fr

Département de Mathématique et Applications, UMR 8553 CNRS
Ecole Normale Supérieure
45 rue d'Ulm
75230 PARIS Cedex 05, FRANCE
e-mail : Frederic.Paulin@ens.fr