Topologie Générale,

Partie 1 sur 3 du cours de topologie et calcul différentiel.
Octobre 2013

Patrick Bernard

1 Définitions

Une distance d sur un ensemble X est une fonction $d : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$ telle que

1. $d(x, y) + d(y, z) \leqslant d(x, z)$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, x) = 0$
4. $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$.

pour tous x, y, z dans X. Un *espace métrique* est un ensemble muni d'une distance. Lorsque les trois premières propriétés sont satisfaites, on parle d'une semi-distance.

1.1 Exemples de distances

Si $(E, |.|)$ est un espace vectoriel normé, alors la fonction $d(x, y) = |y - x|$ est une distance sur E.

Si (X, d) est un espace métrique, et si Y est une partie de X, alors la restriction de d à $Y \times Y$ est une distance sur Y.

Les parties des espaces vectoriels normés constituent une riche classe d'exemples d'espaces métriques. En fait, tous les espaces métriques s'identifient à des parties d'espaces vectoriels normés, on le montrera plus tard.

Si $\varphi : Y \longrightarrow X$ est une application et d est une distance sur X, alors $d_Y(x, y) := d(\varphi(x), \varphi(y))$ est une semi-distance sur Y. C'est une distance si et seulement si φ est injective.

On définit ainsi par exemple la distance

$$d(x, y) = \left| \frac{x}{1 + |x|} - \frac{y}{1 + |y|} \right|$$

sur $[-\infty, \infty]$, avec la convention $\pm\infty/(1 + \infty) = \pm 1$.

Si (X, d) est un espace métrique, on peut construire d'autres distances sur X à partir de d, par exemple par les formules

$$d_1(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \quad , \quad d_2(x, y) = \min(d(x, y), 1).$$

Ces deux distances ont la propriété d'être bornées, et elles engendrent sur X la même topologie que d (on verra bientôt ce que cela veut dire). Plus généralement, si d est une distance, alors $\varphi \circ d$ en est une aussi à condition que $\varphi : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ ait les propriétés suivantes:

1. Croissance.
2. Sous-additivité: $\varphi(s + r) \leqslant \varphi(s) + \varphi(r)$.
3. $\varphi(0) = 0$

4. $\varphi(r) > 0 \quad \forall r > 0$.

Soit X un ensemble et Y un espace métrique. Une fonctions $f : X \longmapsto Y$ est dite bornée si son image a un diamètre borné: $\sup_{x,x'} d(f(x), f(x')) < \infty$. L'ensemble $b(X,Y)$ des fonctions bornées est muni de la distance $d_\infty(f,g) := \sup_{x\in X} d(f(x), g(x))$.

1.2 Topologie

Dans l'espace métrique (X,d), on définit les boules ouvertes et fermées de centre x et de rayon r comme les parties suivantes de X:

$$B(x,r) := \{y \in X, d(x,y) < r\} \quad , \quad \bar{B}(x,r) := \{y \in X, d(x,y) \leqslant r\}.$$

On définite aussi les sphères

$$S(x,r) := \{y \in X, d(x,y) = r\}.$$

La partie U de X est dite ouverte si c'est une réunion de boules ouvertes. De manière équivalente, U est ouverte si et seulement si pour tout point x de U, il existe une boule ouverte de centre x et de rayon strictement positif contenue dans U. L'ensemble $\mathcal{O}$ des ouverts de X vérifie les propriétés suivantes:

1. $\emptyset \in \mathcal{O}$, $X \in \mathcal{O}$.

2. Une réunion d'éléments de $\mathcal{O}$ est un élément de $\mathcal{O}$.

3. Une intersection finie d'éléments de $\mathcal{O}$ est un élément de $\mathcal{O}$.

De manière générale, on appelle *topologie* sur X un ensemble $\mathcal{O}$ de parties de X qui vérifie les trois propriétés ci-dessus. La topologie particulière que nous avons définie à l'aide des boules est la topologie induite par la distance d.

Vérifier que la distance $\varphi \circ d$ définie un peu plus haut engendre la même topologie que d si φ est continue en 0.

L'ensemble des parties de X est une topologie sur X, dite topologie discrète. Elle est engendrée par la distance $d(x,y)$ qui vaut 1 si $x \neq y$ et 0 si $x = y$.

A l'autre extrême, la topologie grossière est $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$. On ne peut pas l'engendrer par une distance, car elle n'est pas séparée.

Définition 1. *L'espace topologique $(X,\mathcal{O})$ est dit séparé si, pour tous $x \neq y$ dans X, il existe des ouverts disjoints U et V contenant respectivement x et y.*

Dans un espace séparé, les points sont fermés. Ce n'est pas toujours le cas, par exemple pour la topologie grossière.

Proposition 2. *La topologie engendrée par la distance d est séparée.*

DÉMONSTRATION. Si $x \neq y$, alors $d(x,y) > 0$. Les boules $B(x, d(x,y)/3)$ et $B(y, d(x,y)/3)$ sont alors des ouverts disjoints contenant respectivement x et y. $\square$

On voit que c'est l'axiome 4 dans la définition d'une distance qui force le caractère séparé. En supprimant cet axiome, on obtient une notion généralisée de distances que l'on appelle semi-distances. On peut associer une topologie à une semi-distance exactement comme à une distance, mais celle-ci ne sera pas forcément séparée. Par exemple, la topologie grossière est engendrée par la semi-distance identiquement nulle.

Exercice 1. *Montrer que la topologie induite sur $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ est la topologie discrète.*

Exercice 2. *Soit d une semi-distance sur X. On considère la relation R définie par xRy si et seulement si $d(x,y) = 0$. Montrer que R est une relation d'équivalence. L'ensemble X est donc décomposé en classes d'équivalences. Montrer qu'il existe une (unique) distance d_R sur l'ensemble X/R des classes d'équivalences, qui a la propriété que $d_R([x],[y]) = d(x,y)$ pour tous x et y dans X, où $[x]$ désigne la classe de x.*

Exercice 3. *Soit d une fonction sur $X \times X$ prenant ses valeurs dans $[0,\infty]$ et vérifiant les axiomes d'une distance. Montrer que la relation R définie par xRy si et seulement si $d(x,y) < \infty$ est une relation d'équivalence. Montrer que d engendre une "vraie" distance sur chacune des classes d'équivalence.*

Exercice 4. *On munit $[0,\infty]$ de la topologie dont les ouverts sont les ouverts de $[0,\infty)$, et les complémentaires des fermés bornés de $[0,\infty)$. (Voire plus généralement le compactifié d'Alexandroff dans la suite du cours). Montrer qu'elle est engendrée par la distance*

$$d(x,y) = \left| \frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y} \right|$$

avec la convention que $\infty/(1+\infty) = 1$.

1.3 Vocabulaire

Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique, c'est à dire un espace muni d'une topologie $\mathcal{O}$.

Une partie de X est dite *fermée* si son complémentaire est ouvert. L'ensemble $\mathcal{F}$ des fermés vérifie les propriétés suivantes:

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$, $X \in \mathcal{F}$.
2. Une intersection d'éléments de $\mathcal{F}$ est un élément de $\mathcal{F}$.
3. Une union finie d'éléments de $\mathcal{F}$ est un élément de $\mathcal{F}$.

Étant donné un point $x \in X$, une partie V de X est un *voisinage* de x si V contient un ouvert qui contient x. Une intersection finie de voisinages de x est un voisinage de x.

L'*intérieur* de la partie $A \subset X$ est le plus grand ouvert contenu dans A, on le note $\mathring{A}$. Il est caractérisé par les propriétés suivantes: $\mathring{A}$ est ouvert et tout ouvert contenu dans A est contenu dans $\mathring{A}$.

Pour vérifier qu'un tel ensemble existe, il suffit de prendre la réunion de tous les ouverts contenus dans A, qui est bien ouverte.

L'*adherence* de la partie $A \subset X$ est le plus petit fermé contenant A, on la note $\overline{A}$. C'est aussi le complémentaire de l'intérieur du complémentaire de A:

$$\left(\mathring{A}\right)^c = \overline{A^c}.$$

Propriété 3. *Le point $x \in X$ appartient à $\overline{A}$ si et seulement si tout ouvert contenant x intersecte A.*

Démonstration. Par définition, les points de $\overline{A}$ sont caractérisés par le fait que tout fermé contenant A contient x. Ce qui est équivalent à : tout ouvert disjoint de A ne contient pas x. Et, en prenant la contraposée, à tout ouvert contenant x intersecte A. $\square$

Une partie A dont l'adhérence est l'espace entier est dite *dense*. La partie A est dense si et seulement si elle intersecte tous les ouverts.

La *frontière* de A est le fermé $\partial A = \bar{A} - \mathring{A}$.

La boule fermée $\bar{B}(x,r)$ contient l'adhérence $\overline{B(x,r)}$ de la boule ouverte. Il y a égalité dans le cas des espaces vectoriels normés, mais pas dans tous les espaces métriques.

Considérons en effet l'ensemble $X = \{0,1\} \subset \mathbb{R}$, muni de la distance habituelle. On voit que $B(0,1) = \{0\}$, qui est fermé et donc égal à son adhérence, alors que $\bar{B}(0,1) = X$.

1.4 Bases

La topologie $\mathcal{O}'$ est dite *plus fine* que $\mathcal{O}$ si $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$.

Proposition 4. *Soit $\mathcal{R}$ un ensemble de parties de X. L'ensemble $\mathcal{O}_{\mathcal{R}}$ des réunions d'intersections finies d'éléments de $\mathcal{R}$ (auxquelles on ajoute $\emptyset$ et X) est une topologie. C'est la topologie la moins fine contenant $\mathcal{R}$.*

Démonstration. Il est clair que $\mathcal{O}_{\mathcal{R}}$ est stable par réunion. Vérifions la stabilité par intersection finie. Soient $O = \cup_\alpha \cap_i U_{\alpha,i}$ et $O' = \cup_\beta \cap_j V_{\beta,j}$ des éléments de $\mathcal{O}_{\mathcal{R}}$. Alors

$$O \cap O' = \cup_{\alpha,\beta}(\cap_{i,j} U_{\alpha,i} \cap V_{\beta,j})$$

est bien une union d'intersections finies d'éléments de $\mathcal{R}$. On voit ainsi que $\mathcal{O}_{\mathcal{R}}$ est stable par intersection de deux éléments, et donc par intersection finie. □

La partie $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ est une *Base* d'ouverts si tout élément de $\mathcal{O}$ est une union d'éléments de $\mathcal{B}$. Par exemple, les boules ouvertes forment une base de la topologie associée à une métrique. Les boules dont les rayons sont des inverses d'entiers constituent aussi une base. Dans $\mathbb{R}^d$, muni de la distance euclidienne, les boules centrées sur $\mathbb{Q}^d$ et de rayon rationnel constituent aussi une base, qui a la propriété intéressante d'être dénombrable.

Si $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts, alors

1. $\cup_{B\in\mathcal{B}} B = X$
2. Pour tous B_1 et B_2 dans $\mathcal{B}$ et $x \in B_1 \cap B_2$, il existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Une famille $\mathcal{B}$ de parties de X vérifiant ces deux propriétés est appelée une base de topologie. C'est une base d'ouverts de la topologie qu'elle engendre, c'est à dire que l'ensemble des réunions d'éléments de $\mathcal{B}$ constitue une topologie. En effet, la seconde propriété ci-dessus implique qu'une intersection finie d'éléments de $\mathcal{B}$ est une réunion d'éléments de $\mathcal{B}$.

Étant donné un point x dans un espace topologique $(X, \mathcal{O})$, une *base de voisinage* de x est un ensemble $\mathcal{V}$ de voisinages de X tel que tout voisinage de X contient un élément de $\mathcal{V}$. Les boules de centre x constituent une base de voisinage de x dans un espace métrique. On peut aussi prendre les boules de centre x et dont le rayon est l'inverse d'un entier, ce qui montre :

Proposition 5. *Dans un espace métrique, chaque point admet une base de voisinages dénombrable.*

2 Applications continues et suites convergentes

Soit $f : (X, \mathcal{O}) \longrightarrow (X', \mathcal{O}')$ une application entre deux espaces topologiques.

Définition 6. *L'application f est continue en x si la préimage de tout voisinage de $f(x)$ est un voisinage de x. Elle est continue si elle est continue en chaque point, c'est à dire si la préimage d'un ouvert de X' est un ouvert de X.*

Si la topologie image $\mathcal{O}'$ est issue d'une distance d', alors f est continue en x si et seulement si la fonctions $y \longmapsto d(f(x), f(y))$ est continue en x. Ceci s'écrit plus explicitement: Pour tout $\epsilon > 0$ il existe un voisinage V de x tel que $d'(f(x), f(y)) < \epsilon$ pour tout $y \in V$.

Dans le cas où $\mathcal{O}$ est elle aussi issue d'une distance d, c'est équivalent à la définition classique:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } d(x,y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

Il existe une autre façon bien utile d'exprimer cette propriété à l'aide de modules de continuité.

Définition 7. *On appelle module de continuité une fonction $\omega : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty]$ qui est continue et croissante, et telle que $\omega(0) = 0$.*

Un module de continuité ω a donc la forme suivante: Il existe $R \in [0,\infty]$ tel que $\omega(r) = \infty$ pour $r \geqslant R$, et ω est une fonction continue et croissante à valeurs dans $[0,\infty)$ sur [0,R[. De plus, si R est fini, alors ω tend vers $+\infty$ lorsque r tend vers R. A propos des modules de continuité, on utilisera souvent le

Lemme 8. *Soit $f : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty]$ une fonction qui tend vers 0 en 0, alors il existe un module de continuité $\omega \geqslant f$.*

Démonstration. Pour se ramener à une fonction à valeurs finies, on pose $F = f/(1+f)$. On considère alors la fonction $g(r) := \sup_{t\in[0,r]} F(t)$, qui est croissante, et tend vers zero en zero. Ensuite, on pose $\rho(r) = (\int_r^{2r} g(t)dt)/r$. Comme g est croissante, cette intégrale est bien définie pour tout r. Comme $g(2r) \geqslant g(t) \geqslant g(r)$ sur $[r, 2r]$, on voit que $g(2r) \geqslant \rho(r) \geqslant g(r) \geqslant F(r)$, et donc que g est continue en 0. Pour montrer que ρ est croissante, on remarque que $\rho(r) = \int_0^1 g(r(1+t))dt$, et que la fonction $r \longmapsto g(r(1+t))$ est croissante pour tout $t \geqslant 0$. Comme la fonction $r \longmapsto \int_r^{2r} g(t)dt$ est continue (g etant bornée), ρ est continue sur $]0,\infty)$, et donc sur $[0,\infty)$ (on a déjà montré la continuité en 0). On a construit un module de continuité ρ, à valeurs dans $[0,1]$, et tel que $\rho \geqslant f/(1+f)$. Il suffit alors de poser $\omega = \rho/(1-\rho)$. □

Proposition 9. *L'application $f : (X,d) \longrightarrow (X',d')$ est continue en x si et seulement si il existe un module de continuité ω tel que*

$$d'(f(y), f(x)) \leqslant \omega(d(y,x)).$$

Démonstration. Il est clair que l'existence du module de continuité implique la continuité. Réciproquement, si f est continue en x, alors on peut poser $\omega_1(r) := \sup_{y\in B_X(x,r)} d'(f(y), f(x))$. La continuité de f en x est équivalente à la continuité en 0 de ω_1. On applique alors le Lemme 8 qui nous donne l'existence d'un module de continuité $\omega \geqslant \omega_1$. On a alors $d'(f(y), f(x)) \leqslant \omega_1(d(f(y), f(x)) \leqslant \omega(d(f(y), f(x))$. □

Le concept suivant n'a pas de sens pour les espaces topologiques generaux:

Définition 10. *L'application $f : X \longrightarrow X'$ entre les espaces métriques X et X' est dite uniformément continue si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } d(x,y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

C'est équivalent à l'existence d'un module de continuité ω tel que

$$d'(f(x), f(y)) \leqslant \omega(d(x,y))$$

pour tous x et y dans X.

La différence par rapport à la continuité est que le module de continuité ne dépend pas du point x. Une application uniformément continue est bien sur continue. On rappelle aussi que f est dite Lipschitz si il existe $L > 0$ tel que

$$d'(f(x), f(y)) \leqslant L d(x, y).$$

On dit alors que f est L-Lipschitz. Si A est une partie de l'espace métrique (X, d), alors la fonction

$$d_A(x) := \inf_{a \in A} d(x, a)$$

est 1-Lipschitz. En effet, il découle directement de l'inégalité triangulaire que la fonction $x \longmapsto d(x, a)$ est 1-Lipschitz pour tout $a \in X$, et un infimum de fonctions 1-Lipschitz est 1-Lipschitz.

Propriété 11. *L'adhérence de A est l'ensembles $\{d_A = 0\}$.*

Démonstration. Comme d_A est continue, l'ensemble $\{d_A = 0\}$ est fermé. Il continet A donc $\bar{A}$. Réciproquement, si $x \in \bar{A}$, alors pour tout $\epsilon > 0$ la boule $B(x, \epsilon)$ intersecte A, donc $d_A(x) < \epsilon$. On conslut que $d_A = 0$ sur $\bar{A}$. □

Définition 12. *L'application f entre les espaces topologiques X et X' est un homéomorphisme si elle est continue, inversible, et d'inverse continue. On dit que X et X' sont homéomorphes si il existe un homéomorphisme entre X et X'.*

Si $f : X \longrightarrow X'$ est continue et injective, et si de plus l'application réciproque $f^{-1} : f(X) \longrightarrow X$ est continue (où $f(X) \subset X'$ est munie de la topologie induite), on dit que f est un *homéomorphisme sur son image*, ou un *plongement topologique*. L'affirmation ci-dessous est à peu près tautologique, mais bien utile:

Propriété 13. *L'identité $i : (X, \mathcal{O}) \longrightarrow (X, \mathcal{O}')$ est continue si et seulement si $\mathcal{O}$ est plus fine que $\mathcal{O}'$, c'est un homéomorphismes si et seulement si $\mathcal{O} = \mathcal{O}'$.*

Être homéomorphes est une notion naturelle d'équivalence entre espaces topologiques. Entre espaces métriques, il existe d'autre notions tout aussi importantes, et en particulier l'isométrie. Une isométrie est une bijection qui préserve les distances. C'est donc un homéomorphisme, dont l'inverse est aussi une isométrie. Une application injective qui préserve les distances sera appelé plongement isométrique, ou isométrie sur son image. Deux espaces métriques sont dits isométriques si il existe une isométrie de l'un dans l'autre.

L'existence d'un homéomorphisme bi-Lipschitz (c'est à dire d'une bijection Lipschitz ainsi que son inverse) est aussi une notion naturelle d'équivalence.

Exercice 5.

- *L'application $x \longmapsto x/(1 + x)$ (étendue par $\infty \longmapsto 1$) est un homéomorphisme entre $[0, \infty]$ et $[0, 1]$, c'est même une isométrie lorsqu'on munit $[0, \infty]$ de la distance introduite plus haut.*
- *La boule $B(0, 1) \subset \mathbb{R}^d$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^d$, mais elle ne lui est pas isométrique (les deux ensembles étant munis de la distance Euclidienne), ni Lipschitz-équivalente.*
- *L'application $f : [0, 1[\longrightarrow S^1$ (la sphère unité de $\mathbb{C}$ munie de la topologie induite) définie par $f(\theta) = e^{2i\pi\theta}$ est continue et bijective, mais ce n'est pas un homéomorphisme.*

2.1 Suites

Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique.

Définition 14. *On dit que la suite x_n tend vers x si, pour tout voisinage V de x dans X, il existe n_0 tel que $x_n \in V$ pour tout $n \geqslant n_0$.*

Dans le cas d'un espace métrique, la suite x_n tend vers x si et seulement si la suite réelle $d(x_n, x)$ tend vers 0.

Exercice 6. *Si $x_n \longrightarrow x$, alors l'ensemble $\{x_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ est fermé.*

Soit $\bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. On le munit de la topologie induite de celle de $[0, \infty]$. Montrer que la suite x_n tend vers x si et seulement si l'application $\bar{x} : \bar{\mathbb{N}} \longrightarrow X$ définie par $\bar{x}(n) = x_n$ et $\bar{x}(\infty) = x$ est continue.

Proposition 15. *Si $f : X \longrightarrow X'$ est continue et $x_n \longrightarrow x$, alors $f(x_n) \longrightarrow f(x)$. Dans le cas où X est (semi-)métrisables, la fonction f est continue en x si et seulement si l'image par f de toute suite convergent vers x est une suite convergent vers $f(x)$.*

Pour la réciproque, ce qui est important est que le point x admette une base dénombrable de voisinages, comme le montre une légère modification de la preuve ci-dessous.

DÉMONSTRATION. Considérons un voisinage V de $f(x)$. Si f est continue, sa préimage $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x elle contient donc tous les points de la suite x_n au dela d'un certain rang n_0, ce qui implique que V contient tous les points de la suite $f(x_n)$ au dela de ce rang.

Réciproquement, supposons que f n'est pas continue en x. Alors il y a un voisinage V de $f(x)$ dans X' dont la préimage ne contient aucune boule. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un point $x_n \in B(x, 1/n)$ tel que $f(x_n) \notin V$. La suite x_n a la propriété que $x_n \longrightarrow x$ mais $f(x_n)$ ne tend pas vers $f(x)$. □

Corollary 16. *Deux distances sur X engendrent la même topologie si et seulement si elles ont les mêmes suites convergentes.*

Attention, si $\mathcal{O}$ est une topologie et d une distance, il se peut que les suites convergentes pour d et pour $\mathcal{O}$ soient les mêmes sans pour autant que $\mathcal{O}$ soit la topologie engendrée par d (dans ce cas, bien sur, $\mathcal{O}$ n'est pas métrisable).

DÉMONSTRATION. Il suffit de constater que l'identité $i : (X, d) \longrightarrow (X, d')$ est un homéomorphisme si d et d' ont les mêmes suites convergentes, au vu de la Proposition 15. □

Proposition 17. *Soit A une partie de X et soit a_n une suite d'éléments de A. Si $a_n \longrightarrow x$, alors $x \in \bar{A}$. Réciproquement, dans le cas où X est métrisable, tout élément de $\bar{A}$ est limite d'une suite d'éléments de X.*

Comme ci-dessus, c'est l'existence d'une base de voisinages dénombrable pour chaque point de X qui est utilisée.

DÉMONSTRATION. Si $a_n \longrightarrow x$, alors tout voisinage de x contient un élément de la suite a_n, et donc un point de A. On a vu que cette propriété caractérise les points de l'adhérence.

Réciproquement, si $x \in \bar{A}$, alors toute boule de centre x coupe A. Il existe donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, un point $a_n \in A \cap B(x, 1/n)$. La suite a_n converge alors vers x. □

Définition 18. *Soit x_n une suite de points de X. On dit que a est une valeur d'adhérence de x_n si il satisfait l'une les propriétés suivantes, qui sont toutes équivalentes:*

- *Tout voisinage de a contient une infinité de points de la suite x_n.*
- *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a \in \overline{\{x_k, k \geqslant n\}}$*
- $a \in \cap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{x_k, k \geqslant n\}}$

Proposition 19. *Si la suite x_n admet une sous-suite qui tend vers a, alors a est une valeur d'adhérence. La réciproque est vraie dans le cas métrisable.*

DÉMONSTRATION. Le sens direct est évident. Soit a une valeur d'adhérence de x_n dans l'espace métrique X. La boule $B(a, 1)$ contient alors un point x_{n_1} de la suite x_n. La boule $B(a, 1/2)$ contient un point x_{n_2}, avec $n_2 > n_1$. Par récurrence, on construit ainsi une suite strictement croissante d'indices n_k tels que $x_{n_k} \in B(a, 1/k)$. La sous suite x_{n_k} de x_n converge donc vers a. □

Soit X un espace topologique et Y un espace métrique. Une fonctions $f : X \longmapsto Y$ est dite bornée si son image est contenue dans une boule de Y. L'ensemble $b(X, Y)$ est muni de la distance $d_\infty(f, g) := \sup_{x\in X} d(f(x), g(x))$.

Lemme 20. *L'ensemble $C_b(X, Y) \subset b(X, Y)$ des fonctions continues et bornées est fermé.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de montrer que la limite uniforme d'une suite de fonctions continues est continues. Soit f_n une telle suite, avec $d_\infty(f_n, f) \longrightarrow 0$. Fixons $\epsilon > 0$, et choisissons n tel que $d_\infty(f_n, f) < \epsilon/3$. Comme f_n est continue, tout point $x \in X$ admet un voisinage V tel que $d(f_n(x'), f_n(x)) < \epsilon/3$ pour tout $x' \in V$. On a alors

$$d(f(x'), f(x)) \leqslant d(f(x'), f_n(x')) + d(f_n(x'), f_n(x)) + d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$$

pour tout $x' \in V$. L'application f est donc continue en x. □

On finit par quelques notions sur les suites réelles, ou directement les suites de $[-\infty, +\infty]$. Si x_n est une telle suite, alors les suites

$$\bar{x}_n := \sup_{k\geqslant n} x_k \quad \text{et} \quad \underline{x}_n := \inf_{k\geqslant n} x_k,$$

sont, respectivement, décroissante et croissante. Elles ont donc des limites dans $[-\infty, \infty]$, qui sont, par définition, la limite supérieure et la limite inférieure de x_n:

$$\limsup x_n = \lim_{n\longrightarrow\infty} \sup_{k\geqslant n} x_k \quad , \quad \liminf x_n = \lim_{n\longrightarrow\infty} \inf_{k\geqslant n} x_k.$$

Proposition 21. *Les limites supérieure et inférieure de x_n sont des valeurs d'adhérence de x_n, ce sont respectivement la plus grande valeur d'adhérence et la plus petite valeur d'adhérence de x_n.*

DÉMONSTRATION. Soit l la limite supérieure. Définissons par récurrence une sous-suite n_k telle que $x_{n_k} \geqslant \bar{x}_{1+n_{k-1}} - 1/k$. On voit alors que cette sous suite converge vers la limite supérieure. On trouve de la même façon une sous-suite qui converge vers la limite inférieure.

Réciproquement, si x_{n_k} est une sous-suite, alors $\sup_{l\geqslant k} x_{n_k} \leqslant \bar{x}_{n_k}$, donc la limsup de la sous-suite est inférieure à la limsup de la suite. □

On conclut que toute suite réelle admet une valeur d'adhérence dans $[-\infty, +\infty]$, et que toute suite réelle bornée admet une valeur d'adhérence réelle.

Exercice 7. *Dans un espace métrique X, le point a est une valeur d'adhérence de x_n si et seulement si $\liminf d(x_n, a) = 0$.*

3 Topologie engendrée par des applications, topologie produit

Soit X un ensemble et soit $f_\alpha : X \longrightarrow Y_\alpha$ des applications à valeurs dans des espaces topologiques $(Y_\alpha, \mathcal{O}_\alpha)$.

Définition 22. *La topologie engendrée par les applications f_α est la moins fine parmi les topologies de X pour lesquelles les applications f_α sont continues.*

Dans le cas d'une seule application f, c'est donc juste la topologie constituée par les préimages des ouverts de Y.

En général, c'est la topologie engendrée par les ensembles de la forme $f_\alpha^{-1}(U_\alpha)$, avec $U_\alpha \in \mathcal{O}_\alpha$.

Proposition 23. *Soit Z un espace topologique. L'application $g : Z \longrightarrow X$ est continue pour la topologie engendrée par les applications f_α si et seulement si chacune des composées $f_\alpha \circ g$ est continue.*

DÉMONSTRATION. Une composée de fonctions continues est continues (c'est évident) donc les composées $f_\alpha \circ g$ sont continues si g l'est. Réciproquement, supposons que les composées sont continues et considérons un ouvert de X de la forme $U = \cap_\alpha f_\alpha^{-1}(U_\alpha)$, (ces ouverts forment un base d'ouverts de la topologie de X). Sa préimage s'écrit $g^{-1}(U) = \cap_\alpha (g \circ f_\alpha)^{-1}(U_\alpha)$, c'est une intersection finie d'ouverts de Z, et donc un ouvert de Z. $\square$

Cette propriété caractérise la topologie induite par les applications f_α. En effet, soit $\mathcal{O}'$ une topologie sur X telle que l'application $g : Z \longmapsto (X, \mathcal{O}')$ est continue si et seulement si $f_\alpha \circ g$ est continue. Comme $f_\alpha = f_\alpha \circ Id_{(X,\mathcal{O}')}$ est continue, la topologie $\mathcal{O}'$ est plus fine que la topologie $\mathcal{O}$ induite par les applications f_α. Réciproquement, l'application $Id : (X, \mathcal{O}) \longrightarrow (X, \mathcal{O}')$ est continue car ses composées $f_\alpha \circ Id = f_\alpha : (X, \mathcal{O}) \longrightarrow Y_\alpha$ sont continues.

Corollary 24. *La suite x_n converge vers x pour la topologie engendrée par les applications f_α si et seulement si $f_\alpha(x_n) \longrightarrow f_\alpha(x)$ pour tout α.*

DÉMONSTRATION. C'est un corollaire de la proposition précédente en prenant $Z = \bar{\mathbb{N}}$. $\square$

Proposition 25. *La topologie induite est séparée si la famille f_α vérifie: Pour tous points $x \neq y$ de X, il existe α et deux ouverts disjoints U et V de Y_α tels que $f_\alpha(x) \in U$ et $f_\alpha(y) \in V$.*

Dans le cas où les espaces Y_α sont séparés, il suffit donc que la famille f_α sépare les points, c'est à dire que pour $x \neq y$ il existe α tel que $f_\alpha(x) \neq f_\alpha(y)$.

Dans le cas où les topologies de Y_α sont engendrées par des semi-distances d_α, il suffit que, pour $x \neq y$ il existe α tel que $d_\alpha(f_\alpha(x), f_\alpha(y)) > 0$.

DÉMONSTRATION. Si la condition est satisfaite, alors pour $x \neq y$ il existe α et deux ouverts disjoints U et V de Y_α tels que $f_\alpha(x) \in U$ et $f_\alpha(y) \in V$. Les préimages de ces ouverts par f_α sont des ouverts disjoints de X qui séparent x de y. $\square$

A quelles conditions la topologie induite par les applications f_α est-elle métrisable?

Dans le cas d'une seule application $f : X \longrightarrow (Y, d)$ à valeurs dans un espace métrique, la topologie induite sur X est associée à la semi-distance

$$d_X(x, y) := d(f(x), f(y)).$$

Cette semi-distance est une distance si et seulement si f est injective. C'est aussi une condition nécessaire pour que la topologie induite soit métrisable.

Dans le cas d'une famille finie d'applications $f_i : X \longrightarrow (Y_i, d_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$ à valeurs dans des espaces métriques, la topologie induite est associée à la semi-distance

$$d_X(x, y) := \sum_{i=1}^{n} d_i(f_i(x), f_i(y)).$$

On aurait aussi pu prendre $\sup_i d_i(f_i(x), f_i(y))$ ou $(\sum_i d_i(f_i(x), f_i(y))^p))^{1/p}$. Ces semi-distances sont Lipschitz-équivalentes, c'est à dire que leur quotient est borné. Ces semi-distances sont des distances si et seulement si la famille f_i sépare les points, ce qui est une condition nécessaire pour que X soit séparé, et donc métrisable. On voit déjà qu'il est plus aisé de parler de topologie induite que de distance induite (il n'y a plusieurs notions naturelles de distances induites). Ce phénomène est encore plus net dans un produit infini.

Proposition 26. *Soit $f_i : X \longrightarrow (Y_i, d_i)$, $i \in \mathbb{N}^*$ une famille dénombrable d'applications à valeurs dans des espaces métriques. La topologie induite sur X est métrisable si et seulement si la famille f_i sépare les points. Elle est engendrée par la distance*

$$d_X(x, y) := \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \frac{d_i(f_i(x), f_i(y))}{1 + d_i(f_i(x), f_i(y))}.$$

Démonstration. On remarque que la série définissant d_X converge uniformément sur $X \times X$. Fixons un point x_0 de X. Comme les fonctions $x \longmapsto d_i(f_i(x), f_i(x_0))$ sont continues sur X, on conclut (par le lemme 20) que $d_X(x, x_0)$ est continue sur X, et donc que l'identité $i : (X, \mathcal{O}) \longrightarrow (X, d_X)$ est continue en x_0, où $\mathcal{O}$ est la topologie engendrée par les f_i.

Grâce à la proposition 15, pour montrer que l'inverse est aussi continue, il suffit de constater que toute suite qui converge pour d_X converge pour la topologie induite. En effet, on a

$$d_i(f_i(x), f_i(y)) \leqslant 2^i \frac{d_X(x, y)}{1 - d_X(x, y)}$$

donc si $d(x_n, x) \longrightarrow 0$, alors $f_i(x_n) \longrightarrow f_i(x)$ pour tout i, et donc $x_n \longrightarrow x$, par le corollaire 24

On conclut que la semi-distance d_X engendre la topologie de X. Cette semi-distance est bien une distance si la famille (f_i) sépare les points, X est donc métrisable dans ce cas. □

On peut remplacer 2^{-i} dans la définition de d_X par une autre suite sommable. Ceci définit une autre (semi) distance qui n'est pas forcément Lipsphitz-équivalente à d_X, mais qui engendre la même topologie. On peut encore définir les distances

$$D_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \left(\frac{d_i(f_i(x), f_i(y))}{1 + d_i(f_i(x), f_i(y))} \right)^p \right)^{1/p},$$

pour $p \geqslant 1$, qui définissent encore la même topologie (il n'est pas évident à ce stade de montrer que D_p est effectivement une distance). Remarquons finalement que la distance

$$D(x, y) = \sup_i \frac{d_i(f_i(x), f_i(y))}{1 + d_i(f_i(x), f_i(y))}$$

définit une topologie qui peut être strictement plus forte que la distance d_X.

Exercice 8. *Dans le cas où les distances d_i prennent leurs valeurs dans $[0, 1]$, montrer que la distance $\sum_i 2^{-i} d_i(f_i(x), f_i(y))$ engendre la topologie de X.*

Si Y est une partie de X, la topologie induite sur Y est la topologie engendrée par l'inclusion $i : Y \longrightarrow X$.

Une application plus intéressante est la topologie produit. Soit X_α une famille d'espaces topologiques.

Définition 27. *La topologie produit sur le produit $X = \pi_\alpha X_\alpha$ est la topologie engendrée par les projections canoniques $\pi_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha$.*

En application de ce qui précède, on voit qu'une application $f = (f_\alpha) : Z \longrightarrow X$ est continue si et seulement si chacun de ses facteurs est continu, une suite de X converge si et seulement si chacun de ses facteurs converge. Le produit est séparé si et seulement si chacun des facteurs est séparé.

Dans le cas d'un produit finie, les produits d'ouverts forment une base d'ouvert de la topologie produit. Dans le cas d'un produit infini, les cylindres forment une base d'ouvert de la topologie produit, où les cylindres sont les produits d'ouverts dont tous sauf un nombre fini sont égaux à l'espace entier. Plus précisément, dans $X = \pi_\alpha X_\alpha$, un cylindre est un ensemble de la forme $C = \pi_\alpha U_\alpha$, où les U_α sont des ouverts de X_α, et où l'égalité $U_\alpha = X_\alpha$ a lieu pour tous les α sauf un nombre fini.

Il faut noter que les produits d'ouverts ne sont pas nécessairement ouverts dans un produit infini. La topologie engendrée par ces produits est donc parfois strictement plus fine que la topologie produit. Par contre, on a :

Exercice 9. *Montrer qu'un produit de fermés est fermé pour la topologie produit.*

Montrer que l'adhérence d'un produit est le produit des adhérences.

Soir $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ l'ensemble des suites réelles, qui est aussi le produit $\pi_{i\in\mathbb{N}}\mathbb{R}$. La topologie produit est l'unique topologie métrisable dont la notion de convergence de suite est la convergence simple. Elle est engendrée par exemple par la distance

$$d(x,y) = \sum_i 2^{-i}\frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|}.$$

La distance

$$D(x,y) = \sup_i \frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|}$$

munit $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ d'une topologie strictement plus fine correspondant à la convergence uniforme des suites.

4 Espaces métriques complets

Soit (X, d) un espace métrique.

Définition 28. *La suite x_n est de Cauchy si la suite réelle $\delta_n := \sup_{m\geqslant n} d(x_n, x_m)$ tend vers 0.*

On remarque qu'il n'y a pas d'analogue évident de cette définition pour un espace topologique. La définition est souvent donnée sous la forme

$$\forall \epsilon > 0, \exists n \text{ tel que } d(x_k, x_l) < \epsilon \,\forall k, l \geqslant n.$$

Une suite de Cauchy qui a une valeur d'adhérence converge vers cette valeur. On note aussi que toute suite de Cauchy est bornée, c'est à dire contenue dans une boule. La Proposition 21 implique alors que, dans $\mathbb{R}$ toute suite suite de Cauchy est convergente: $\mathbb{R}$ est *complet*.

Définition 29. *Un espace métrique est dit Complet si toute suite de Cauchy converge.*

Le critère suivant est bien utile:

Proposition 30. *L'espace X est complet si et seulement si toute suite x_n telle que $\sum_n d(x_n, x_{n+1}) < \infty$ converge.*

DÉMONSTRATION. On dira que la suite x_n vérifie le critère de Cauchy fort si la série de terme général $d(x_n, x_{n+1})$ est convergente. Toute suite qui vérifie ce critère est de Cauchy. Réciproquement, toute suite de Cauchy admet une sous-suite qui vérifie le critère de Cauchy fort. □

Proposition 31. *Soit X un espace métrique complet et Y une partie de X. Alors Y est complet si et seulement si il est fermé.*

DÉMONSTRATION. Toute suite de Cauchy de Y est aussi une suite de Cauchy de X, donc elle converge. Si Y est fermé, la limite est dans Y, et la suite converge donc bien dans Y. Réciproquement, supposopns que Y est complet et considérons une suite y_n qui converge dans X vers une limite x. Cette suite est donc de Cauchy, donc elle a une limite dans Y, qui ne peut etre que x. On a donc $x \in Y$. □

Une conséquence directe de la complétude sera souvent utile.

Propriété 32. *Dans l'espace métrique complet X, soit F_n une suite décroissante de fermés dont le diamètre tend vers zéro. Alors $\cap_n F_n$ est un point.*

DÉMONSTRATION. Soit x_n un point de F_n. La suite F_n est de Cauchy car, pour $m \geqslant n$, $x_m \in F_m \subset F_n$, donc $d(x_m, x_n) \leqslant diam(F_n)$. Cette suite est donc convergente, on note x sa limite. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $x_n \in F_n \subset F_k$ pour tout $n \geqslant k$. Comme F_k est fermé, on conclut que $x \in F_k$. L'intersection est donc non-vide. Elle est réduite à un point car son diamètre, qui est majoré par celui des F_n, est nul. □

La complétude est vraiment une propriété d'une distance, et pas une propriété topologique. Par exemple, $\mathbb{R}$ est complet alors que $]0,1[$ ne l'est pas, bien qu'ils soient homéomorphes.

Exercice 10. *Soit X un espace métrique complet et U un ouvert de X. Alors il existe sur U une distance complète qui engendre la même topologie que la distance de X. On peut considérer la distance (en notant F le complémentaire du U)*

$$D(x,y) = d(x,y) + \left| \frac{1}{d(x,F)} - \frac{1}{d(y,F)|} \right|.$$

Voici une des constructions les plus importantes d'espaces complets:

Théorème 1. *Si (Y, d) est un espace métrique complet et X un espace topologique, alors l'espace $b(X, Y)$ des fonctions bornées (muni de la distance uniforme d_∞) est un espace métrique complet, ainsi que son sous-espace $C_b(X, Y)$ des fonctions continues et bornées.*

DÉMONSTRATION. Soit f_n une suite de Cauchy dans $b(X, Y)$. Il existe donc une suite ϵ_n, tendant vers zero, et telle que $d(f_n(x), f_m(x)) \leqslant \epsilon_n$ pour tout $m \geqslant n$ et tout $x \in X$. Pour chaque $x \in X$, la suite $f_n(x)$ est alors de Cauchy dans Y, donc elle converge. Appelons $f(x)$ sa limite. En passant à la limite $m \longrightarrow \infty$ dans l'inégalité ci-dessus, on obtient

$$d(f_n(x), f(x)) \leqslant \epsilon_n$$

pour tout n et tout x. On conclut a la fois que f est bornée et que f_n converge uniformément vers f. Finalement, $C_b(X, Y)$ est complet car fermé. □

On a aussi:

Propriété 33. *Un produit fini d'espaces complets (X_i, d_i), muni de la distance $\sup_i d_i$, est complet.*

La preuve est facile.

Théorème 2. *Soit X et Y des espaces métriques, avec Y complet, et soit Z une partie dense de X, et soit $f : Z \longrightarrow Y$ une application uniformément continue. Alors cette application se prolonge en une unique application continue $\tilde{f} : X \longrightarrow Y$. Ce prolongement est uniformément continue, tout module de continuité de f est un module de continuité de $\tilde{f}$.*

DÉMONSTRATION. Fixons un module de continuité ω de f. Soit x un point X. Les ensembles $\overline{f(B(x, 1/n) \cap Z)}$ forment une suite décroissante de fermés non vides dont le diamètre, qui est majoré par $\omega(2/n)$, tend vers zéro. L'intersection de ces ensemble est donc un unique point, que l'on note $\tilde{f}(x)$. Ce point est necessairement égal à $f(x)$ si $x \in Z$.

Étants donnés deux points x et x' de X, on choisit pour tout n des points z_n et z'_n dans $B(x, 1/n) \cap Z$ et $B(x', 1/n) \cap Z$. On a alors

$$\begin{aligned} d(f(x), f(x')) &\leqslant d(f(x), f(z_n)) + d(f(z_n), f(z'_n)) + d(f(z'_n), f(x')) \\ &\leqslant \omega(2/n) + \omega(d(z_n, z'_n)) + \omega(2/n) \leqslant 2\omega(2/n) + \omega(d(x, x') + 2/n). \end{aligned}$$

pour tout n. A la limite, en utilisant la continuité de ω, on obtient que $d(f(x), f(x')) \leqslant \omega(d(x, x'))$. □

Définition 34. *Une complétion de l'espace métrique X est un plongement isométrique $i : X \longrightarrow Y$ de X dans un espace complet Y dont l'image est dense. On identifie alors X à son image dans Y.*

Le plongement isométrique $i : X \longrightarrow Y$ (à valeurs dans un espace métrique complet Y) est une complétion de X si et seulement si toute application uniformément continue $f : X \longrightarrow Z$ à valeurs dans un espace métrique complet Z admet un unique prolongement uniformément continu $\tilde{f} : Y \longrightarrow Z$ (c'est à dire que $\tilde{f} \circ i = f$).

Théorème 3. *Tout espace métrique admet une unique complétion à isométrie près.*

DÉMONSTRATION. Commençons par montrer l'unicité. Soient $i : X \longrightarrow Y$ et $i' : X \longrightarrow Y'$ deux complétions de X, d'images denses Z et Z'. L'application $i' \circ i^{-1} : Z \longrightarrow Y'$ est donc un plongement isométrique, défini sur le sous-ensemble Z qui est dense dans X. Elle se prolonge donc en une unique application $I : Y \longrightarrow Y'$ qui réduit les distances. De manière identique L'application $i \circ i'^{-1} : Z' \longrightarrow Y$ se prolonge en une unique application $I' : Y' \longrightarrow Y$ qui réduit les distances. Comme la restriction de $I \circ I'$ (resp. $I' \circ I$) à Z' (resp. Z), est l'identité, on conclut que $I \circ I'$ et $I' \circ I$ dont l'application identité, et donc que I est une isométrie, qui a la propriété que $I \circ i = i'$.

Pour montrer l'existence, il suffit de montrer que tout espace métrique peut se plonger isométriquement dans un espace métrique complet, ce qui découle de l'énoncé ci-dessous puique $b(X, \mathbb{R})$ est complet. □

Proposition 35. *Soit X un espace métrique, et soit x_0 un point de X. L'application qui au point x associe la fonction $f_x := d(., x) - d(., x_0)$ est un plongement isométrique de X dans l'espace de Banach $b(X, \mathbb{R})$.*

DÉMONSTRATION. On constate d'abord que $d(y, x) - d(y, x_0) \leqslant d(x, x_0)$. La fonction f_x appartient donc bien a $b(X, \mathbb{R})$. De plus, on a

$$f_x(y) - f_{x'}(y) = d(y, x) - d(y, x') \leqslant d(x, x'),$$

donc $d_\infty(f_x, f_{x'}) \leqslant d(x, x')$. L'application $x \longmapsto f_x$ réduit les distances. Comme de plus

$$d_\infty(f_x, f_{x'}) \geqslant f_x(x') - f_{x'}(x') = d(x', x)$$

on voit que c'est une isométrie. □

Théorème 4 (Baire). *Dans un espace métrique complet, une intersection dénombrable d'ouverts denses est dense.*

Une intersection dénombrable d'ouverts est souvent appelée un G_δ, et une union dénombrable de fermés un F_σ.

Démonstration. Notons U_n les ouverts denses. Soit V un ouvert de X. L'intersection $U_1 \cap V$ est un ouvert non-vide, qui contient donc l'adhérence d'une boule B_1, de rayon au plus 1. L'intersection $U_2 \cap B_1$ contient l'adhérence d'une boule B_2 de rayon au plus $1/2$. On construit ainsi par récurrence une suite B_n de boules de rayon au plus 2^{-n} telles que $\overline{B_{n+1}} \subset B_n \cap V \cap U_{n+1}$.

Les adhérences de ces boules forment une suite décroissante de fermés dont le diamètre tend vers 0. Leur intersection est un point de V qui appartient aussi a chacun des U_n. On a montre que $\cap U_n \cap V$ est non-vide pour tout ouvert V, et donc que $\cap U_n$ est dense. □

On finit par le très important

Théorème 5. *Soit X un espace métrique complet et soit $f : X \longrightarrow X$ une application contractante, c'est à dire L-Lipschitz avec $L < 1$. Alors l'application f a un unique point fixe.*

Démonstration. On considère une suite x_n satisfaisant la relation de récurrence $x_{k+1} = f(x_k)$. On voit alors par récurrence sur k que $d(x_k, x_{k+1}) \leqslant L^k d(x_0, f(x_0))$. On a alors

$$d(x_n, x_m) \leqslant \sum_{k=n}^{m-1} d(x_k, x_{k+1}) \leqslant d(x_0, f(x_0)) \sum_{k=n}^{m} L^k \leqslant d(x_0, f(x_0)) \frac{L^n}{1-L}.$$

La suite x_n est donc de Cauchy, et elle a une limite x. En passant a la limite dans la relation $x_{k+1} = f(x_k)$, on obtient $x = f(x)$. □

5 Espaces topologiques Normaux

Définition 36. *L'espace topologique X est dit normal si on peut séparer les fermés par des ouverts dans X, c'est à dire si, pour toute paire F_1, F_2 de fermés disjoints, il existe deux ouverts disjoints U_1 et U_2 contenant respectivement F_1 et F_2.*

On dit que l'espace topologique X a la propriété d'Urysohn si on peut séparer les fermés par des fonctions continues, c'est à dire si, pour toute paire F_1, F_2 de fermés disjoints, il existe une fonction continue $f : X \longrightarrow [0, 1]$ qui vaut 0 sur F_1 et 1 sur F_2.

On dit que l'espace topologique X a la propriété de Tietze si, pour tout fermé F de X, toute fonction continue $f : F \longrightarrow [-1, 1]$ peut être étendue à une fonction continue $\tilde{f} : X \longrightarrow [-1, 1]$ telle que $\tilde{f}_{|F} = f$.

On remarque que, formellement, un espace normal n'est pas forcément séparé (les points n'étant pas forcément fermés). L'objectif principal de cette section sera de démontrer les résultats suivants.

Théorème 6. *Ces propriétés sont équivalentes pour un espace séparé.*

Théorème 7. *Ces propriétés sont satisfaites par les espaces métrisables.*

Dans la propriété de Tietze, l'image $[0, 1]$ est importante. Par exemple, il n'y a pas de prolongement à $\mathbb{C}$ de l'identité $S^1 \longrightarrow S^1$, bien que $\mathbb{C}$ soit un espace métrique. Cependant, si l'espace X vérifie la propriété de Tietze, alors on peut étendre les fonctions à valeurs réelle, et donc les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ (en les étendant coordonnée par coordonnée).

Proposition 37. *Soit X un espace vérifiant la propriété de Tietze, et soit $f : F \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue définie sur un fermé F de X. Alors on peut étendre f en une fonction continue sur X.*

Démonstration. On pose $g = f/(1 + |f|)$, qui est une fonction continue à valeurs dans $]-1, 1[$. Par la propriété de Tietze, elle s'étend en un fonction $g : X \longrightarrow [-1, 1]$. Soit G le fermé $\{|g| = 1\}$, qui est disjoint de F. Par la propriété d'Urysohn (qui est une conséquence facile de la propriété de Tietze), il existe un fonction continue $h : X \longrightarrow [0, 1]$ qui vaut 1 sur F et 0 sur G. Alors, la fonction hg est continue, elle est égale à g sur F, et elle prend ses valeurs dans $]-1, 1[$. On étend finalement f par la fonction $hg/(1 - |hg|)$. □

Démonstration du théorème 7. On prouve ici que les espaces métriques ont la propriété d'Urysohn. Il suffit pour ceci de constater que la fonction continue

$$f(x) := \frac{d(x, F_1)}{d(x, F_1) + d(x, F_2)}$$

sépare les fermés disjoints F_1 et F_2. Cette fonction est bien continue, son dénominateur ne s'annulant pas puisque la fonction $d(x, F_i)$ est strictement positive en dehors du fermé F_i. □

Démonstration du théorème 6. Tietze ⇒ Urysohn. On considère la fonction $f : F_1 \cup F_2 \longrightarrow [0, 1]$ qui vaut 0 sur F_1 et 1 sur F_2, et on la prolonge à X.

Urysohn ⇒ Normal. On considère les ouverts $f^{-1}(]-1, 1/4[)$ et $f^{-1}(]3/4, 2[)$.

Normal ⇒ Urysohn (Lemme d'Urysohn). Soient F_1 et F_2 deux fermés disjoints. Soit $\mathbb{D}$ l'ensemble des rationnels dyadiques dans $[0, 1]$. On va construire, pour chaque $t \in \mathbb{D}$, un ouvert U_t de sorte que $F_0 \subset U_1$, $U_1 = X$, $U_1 = F_2^c$, et $\bar{U}_s \subset U_t$ pour tous $s < t$. En supposant construits ces ouverts, on pose

$$f(x) = \inf\{1, s \in \mathbb{D}, x \in U_s\} = \inf\{1, s \in \mathbb{D}, x \in \bar{U}_s\}.$$

Si il n'y avait pas égalité, il existerait deux valeurs $s < t$ dans $\mathbb{D}$ telles que $x \in \bar{U}_s$ and $x \notin U_t$, ce qui est en contradiction avec l'inclusion $\bar{U}_s \subset U_t$.

On a $f = 1$ sur F_2 et $f = 0$ sur F_1. Il suffit donc de montrer que f est continue. Pour ceci on constate que, pour $a \in]0, 1]$, $f(x) < a$ si et seulement si il existe $t \in \mathbb{D}$ tel que $t < a$ et $x \in U_t$. On a donc

$$\{f < a\} = \bigcup_{t \in \mathbb{D}, t < a} U_t,$$

c'est donc un ouvert. Pour $a \in [0, 1[$, on a $f(x) \leqslant a$ si et seulement si il existe $t \in \mathbb{D}$, $t > a$ tel que $x \in \bar{U}_t$. On a donc

$$\{f \leqslant a\} = \bigcap_{t \in \mathbb{D}, t > a} \bar{U}_t,$$

qui est fermé. On conclut que f est continue.

Pour construire les ouverts U_t, on utilise le

Lemme 38. *Si X est normal, U est un ouvert de X et F un fermé contenu dans U, alors il existe un ouvert V tel que $F \subset V \subset \bar{V} \subset U$.*

Démonstration. On sépare les fermés disjoints F et U^c par des ouverts disjoints $V \supset F$ et $W \supset U^c$. On a alors $F \subset V \subset \bar{V} \subset W^c \subset U$. □

On applique le lemme pour trouver $U_{1/2}$ tel que $F_1 \subset U_{1/2} \subset \bar{U}_{1/2} \subset U_1$. Ensuite, on applique deux fois le lemme pour trouver $U_{1/4}$ et $U_{3/4}$ vérifiant

$$F_1 \subset U_{1/4} \subset \bar{U}_{1/4} \subset U_{1/2} \subset \bar{U}_{1/2} \subset U_{3/4} \subset \bar{U}_{3/4} \subset U_1.$$

Et on construit les ensembles U_s pour $s = n2^{-k}$ par récurrence sur k. Ceci termine la preuve du lemme d'Urysohn, qui affirme que tout espace normal a la propriété d'Urysohn. □

Urysohn $\Rightarrow$ Tietze. On utilisera le

Lemme 39. *Soit X un espace topologique vérifiant la propriété d'Urysohn et F un fermé. Soit $f : F \longrightarrow [-a, a]$ une fonction continue. Alors il existe une fonction continue $g : X \longrightarrow [-a/3, a/3]$ telle que $|f - g| \leqslant 2a/3$ sur F.*

Démonstration. On considère les fermés $F_1 := \{x \in F, f(x) \leqslant -a/3\}$ et $F_2 := \{x \in F, f(x) \geqslant a/3\}$, et une fonction continue $g : X \longrightarrow [a/3, -a/3]$ telle que $g = a/3$ sur F_2 et $-a/3$ sur F_1. □
Soit $f : F \longrightarrow [-1, 1]$ une fonction continue. Le lemme donne une fonction $g_1 : X \longrightarrow [-1/3, 1/3]$ telle que $|f - g_1| \leqslant 2/3$ sur F. On peut l'appliquer à la fonction $f - g_1$, ce qui donne une fonction $g_2 : X \longrightarrow [-2/9, 2/9]$ telle que $|f - (g_1 + g_2)| \leqslant (2/3)^2$. Par récurrence, on construit ainsi une suite de fonctions continues

$$g_k : X \longrightarrow [-2^{k-1}3^{-k}, 2^{k-1}3^{-k}]$$

telles que

$$|f - (g_1 + \ldots + g_k)| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^k$$

sur F. On conclut que la série $g_1 + \ldots + g_n$ converge uniformément vers une limite g. Celle-ci est continue comme limite uniforme de fonctions continues, et vérifie $g = f$ sur F. □

Un espace topologique est dit séparable si il admet une partie dénombrable et dense. Un espace métrique et séparable admet une base dénombrable d'ouverts (prendre les boules de rayon rationnel centrées sur la partie dénombrable dense). Réciproquement, tout espace admettant une base dénombrable d'ouverts est séparable (prendre un point dans chacun des ouverts de la base).

Proposition 40. *Une partie $Z \subset X$ d'un espace métrique séparable est séparable.*

Démonstration. Une première preuve consiste à remarquer qu'un espace métrique est séparable si et seulement si il admet une base dénombrable d'ouverts. Or une partie d'un espace admettant une base dénombrable d'ouverts admet une base dénombrable d'ouverts.

Voici une preuve plus directe. Soit $A \subset X$ une partie dénombrable dense. Considérons l'ensemble $I \subset A \times \mathbb{N}$ des paires (a, n) telle que la boule $B(a, 1/n)$ intersecte Z. Pour chaque $(a, n) \in I$, on choisit un point $z(a, n)$ dans cette intersection. Ces points forment un famille dénombrable et dense dans Z. En effet, pour tout $z \in Z$ et tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a \in A$ tel que $d(x, a) < 1/n$. Mais alors $d(z, z(a, n)) < 2/n$. □

Théorème 8. *Tout espace séparé, normal, admettant une base dénombrable d'ouverts est métrisable et séparable.*

Lemme 41. *Il existe une suite $f_n : X \longrightarrow [0, 1], n \in \mathbb{N}$ qui engendre la topologie de X.*

Ceci implique que X est métrisable.

DÉMONSTRATION. Soit U_k une base dénombrable d'ouverts. Soit $I \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ l'ensemble des paires $i = (l, k)$ telles que $\bar{U}_l \subset U_k$. En utilisant la propriété d'Urysohn, on trouve, pour chaque $(l, k) \in I$, une fonction continue $f_{(l,k)}$ qui vaut 1 sur U_l et 0 en dehors de U_k.

Comme les fonctions $f_{(l,k)}$ sont continues, elles engendrent une topologie moins fine que celle de X.

Il faut donc montrer que tout ouvert de X est engendré par les fonctions $f_{(l,k)}$, et il suffit de le montrer pour les ouverts U_k de notre base dénombrable. Si x est un point de U_k, on peut séparer le fermé $\{x\}$ du complémentaire de U_k et trouver un ouvert V tel que $x \in V \subset \bar{V} \subset U_k$. Il existe alors l tel que $x \in U_l \subset \bar{U}_l \subset U_k$. Autrement dit, U_k est la réunion des U_l pour $(l, k) \in I$. C'est donc aussi la réunion des ensembles $\{f_{l,k} > 1/2\}$ pour $(l, k) \in I$. □

On peut plonger X dans l_1, par l'application $x \longmapsto (2^{-n} f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$.

6 Compacité

La compacité est une des notions les plus importantes de la topologie.

Définition 42. *L'espace topologique X est compact si il est séparé et si, de tout recouvrement ouvert de X, on peut extraire un sous-recouvrement fini.*

On dit qu'une famille $\mathcal{G}$ de fermés de X a la propriété d'intersection finie si, pour tout partie finie $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$, l'intersection $\cap_{F \in \mathcal{H}} F$ est non vide. Un espace séparé est compact si et seulement si, toute famille $\mathcal{G}$ de fermés ayant la propriété d'intersection finie a une intersection $\cap_{F \in \mathcal{H}} F$ non vide. En particulier, dans un compact, une suite décroissante de fermés a un intersection non vide.

Proposition 43. *Soient K et K' deux parties compactes d'un espace séparé X. Alors on peut séparer K et K' par des ouverts*

DÉMONSTRATION. On commence par le cas où K' est un point x'. Pour tout pout x de K, il existe deux ouverts disjoints U_x et U'_x contenant respectivement x et x'. Les ouverts $U_x, x \in K$ recouvrent K, il existe donc une famille finie $x_1, \ldots, x_n$ telle que $K \subset \cup_{i=1}^n U_{x_i}$. Notons U cette réunion, et posons $U' = \cap_{i=1}^n U_{x_i}$. On voit alors que U et U' sont des ouverts disjoints qui contiennent K et $K' = \{x'\}$.

Considérons maintenant le cas de deux compacts. Au vu de la première étape, pour tous $x' \in K'$, il existe deux ouverts disjoints $U_{x'}$ et $U'_{x'}$ contenant respectivement K et x'. On conclut comme ci-dessus en recouvrant K' par une famille finie des $U'_{x'}$. □

Énumérons quelques propriétés qui découlent directement de la proposition ci-dessus et de sa preuve:

- Dans un compact, tout fermé est compact.
- Toute partie compacte d'un espace topologique séparé est fermée.
- Tout espace topologique compact est normal.

Proposition 44. *Soit $f : K \longrightarrow X$ une fonction continue du compact K dans l'espace séparé X. Alors l'image $f(K)$ est compacte. Si de plus f est injective, alors c'est un plongement topologique.*

DÉMONSTRATION. Si U_α est un recouvrement ouvert de $f(K)$, alors les préimages $f^{-1}(U_\alpha)$ constituent un recouvrement ouvert de K. Il existe donc un famille finie A d'indices α telle que le ouverts $f^{-1}(U_\alpha), \alpha \in A$ recouvrent K. Mais alors les ouverts $U_\alpha, \alpha \in A$ recouvrent $f(K)$.

Si de plus f est injective, c'est une bijection continue entre K et $f(K)$. Montrons que son inverse est continue. Soit U un ouvert de K. Alors son complémentaire $K - U$ est fermé, donc compact, donc $f(K - U) = f(K) - f(U)$ est compact, donc $f(U)$ (qui est la préimage de U par l'inverse de f) est ouvert. □

Corollary 45. *Si $(K, \mathcal{O})$ est un espace topologique compact, alors la topologie $\mathcal{O}$ est un élément maximal parmi les topologies séparées sur K.*

DÉMONSTRATION. Soit $\mathcal{O}'$ une topologie séparée plus fine que $\mathcal{O}$. Alors l'identité $i : (K, \mathcal{O}') \longrightarrow (K, \mathcal{O})$ est une bijection continue, donc un homéomorphisme, c'est à dire que $\mathcal{O}' = \mathcal{O}$. □

Proposition 46. *Dans un espace topologique compact, toute suite admet une valeur d'adhérence.*

DÉMONSTRATION. La suite décroissante de fermés $F_n = \overline{\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}}$ a une intersection non vide. □

6.1 Espaces métriques compacts

Tout espace métrique compact est précompact.

Définition 47. *L'espace métrique X est dit précompact (ou totalement borné) si, pour tout $\epsilon > 0$, X est recouvert par un nombre fini de boules de rayon ϵ.*

Il s'agit donc de boules centrée en des points de X. Toutefois, dans le cas ou X est une partie d'un espace métrique Y, on constate que X est précompact si et seulement si, pour tout $\epsilon > 0$, X est recouvert par un nombre fini de boules de Y de rayon ϵ. En effet, si y_i sont les centres des boules de rayon ϵ qui recouvrent X, on peut supposer sans perte de généralité que chacune des boules $B_Y(y_i, \epsilon)$ intersecte X, et choisir un point x_i dans cette intersection. Alors, $B_Y(y_i, \epsilon) \subset B_Y(x_i, 2\epsilon)$, donc les boules $B_X(x_i, 2\epsilon)$ recouvrent X.

Théorème 9. *Les propriétés suivantes sont équivalentes pour un espace métrique X:*

1. *X est compact.*
2. *X est précompact et complet.*
3. *Toute suite de X admet une sous-suite convergente (on dit que X est séquentiellement compact).*

DÉMONSTRATION. Si X est compact, nous avons vu que toute suite admet une valeur d'adhérence, donc une sous-suite convergente.

Si X est séquentiellement compact, alors il est complet. Montrons qu'il est aussi précompact. Sinon, il existe $\epsilon > 0$ et une suite x_n de X qui est telle que x_{n+1} n'appartient pas à $\cup_{i=1}^{n} B(x_i, \epsilon)$, c'est à dire que $d(x_n, x_i) \geqslant \epsilon$ pour tout $i \leqslant n$. Une telle suite ne peut pas voir de sous-suite convergente, ce qui contredit la compacité sequentielle.

Montrons maintenant qu'un espace complet et précompact est séquentiellement compact. Soit x_n une suite. Au vu de la précompacité, il existe une boule B_1, de rayon 1, qui contient une infinité de points de la suite, et donc il existe une sous-suite x_n^1 de x_n dont les points sont contenus dans B_1. Cette sous-suite admet une sous-suite x_n^2 contenue dans une boule B_2 de rayon $1/2$. On construit ainsi successivement des sous-suites x_n^k contenues dans des boules B_k de rayon 2^{-k}. On peut alors conclure de deux façons. On constate que les centres des boules B_k forment une suite de Cauchy, donc convergente. La limite est allors une valeur d'adhérence de x_n. On peut aussi directement trouver une sous-suite de x_n, la suite $n \longmapsto x_n^n$. Elle est de Cauchy, puisque tous ses termes au dela du rank k sont contenus dans une boule de rayon 2^{-k}. Elle est donc convergente puisque X est complet.

Montrons maintenant qu'un espace séquentiellement compact est compact. On a déjà vu qu'il est précompact est complet. On utilise le

Lemme 48. *Soit U_α un recouvrement ouvert d'un espace séquentiellement compact. Alors il existe $\epsilon > 0$ tel que toute boule de rayon ϵ est contenue dans l'un des ouverts U_α. C'est le nombre de Lebesgue du recouvrement.*

Démonstration. Si la conclusion n'était pas vraie, il existerait une suite x_n avec la propriété que $B(x_n, 2^{-n})$ intersecte chacun des complémentaitres $F_\alpha = X - U_\alpha$. Soit alors x_∞ la limite d'une sous-suite de x_{n_k} de x_n. Fixons α tel que $x_\infty \in U_\alpha$. On choisit alors un point $y_{n_k}^\alpha$ dans $B(x_{n_k}, 2^{-n_k}) \cap F_\alpha$. Comme F_α est fermé, et que $y_{n_k}^\alpha \longrightarrow x_\infty$, on conclut que $x_\alpha \in F_\alpha$, ce qui est une contradiction. □

Étant donné un recouvrement ouvert U_α de X, on considère son nombre de Lebesgue ϵ. Comme X est précompact, il est recouvert par un nombre finie de boules de rayon ϵ. Chacune de ces boules étant contenue dans un des ouverts U_α, on obtient un sous recouvrement fini. □

Proposition 49. *Soit $f : X \longrightarrow Y$ une fonction continue entre les espaces métriques X et Y. Si X est compact, alors f est uniformément continue.*

Démonstration. Si f n'est pas uniformément continue, il existe $\epsilon > 0$ et deux suites x_n et y_n telles que $d(x_n, y_n) \longrightarrow 0$ et $d(f(x_n), f(y_n)) > \epsilon$. On prend une sous-suite convergente de x_{n_k} de x_n puis une sous-suite convergente y_{m_k} de y_{n_k}. Les deux suites x_{m_k} et y_{m_k} convergent alors vers des limites x et y. Par continuité de la distance, on a $d(x, y) = 0$, c'est à dire $x = y$, et $d(f(x), f(y)) \geqslant \epsilon$, ce qui est une contradiction. □

Ayant étudié les espaces métriques compacts, caractérisons maintenant les espaces compacts métrisables:

Théorème 10. *L'espace topologique compact X est métrisable si et seulement si il admet une base dénombrable d'ouverts. Il est alors séparable.*

Démonstration. Nous avons démontré qu'un compact est normal, et qu'un espace normal admettant une base dénombrable d'ouverts est métrisable, ce qui montre le sens direct.

Réciproquement, un espace métrique compact est précompact, donc séparable. Il admet donc une base dénombrable d'ouverts (c'est le cas de tout espace métrique séparable). □

Exercice 11. *Soient K et F un compact et un fermé dans l'espace métrique X, définissions leur distance $d(K, F) := \inf_{k \in K, f \in F} d(k, f)$. Montrer que $d(K, F) = 0$ si et seulement si K et F se coupent.*

Propriété 50. *Toute partie compacte d'un espace métrique est bornée, ce qui s'ignifie qu'elle est contenue dans une boule, ou, de manière équivalente, que son diamètre est fini.*

DÉMONSTRATION. Si $K \in X$ n'était pas bornée, il existerait deux suites x_n et x'_n telles que $d(x_n, x'_n) \longrightarrow \infty$. Quitte a extraire des sous-suite, on peut supposer que x_n et x'_n sont convergentes, mais alors $d(x_n, x'_n) \longrightarrow d(x_\infty, x'_\infty)$, qui est un nombre fini. C'est une contradiction. □

Proposition 51. *Les compacts de $\mathbb{R}$ sont les fermés bornés.*

DÉMONSTRATION. Un compact est fermé et borné. Réciproquement, si K est borné, alors toute suite de K est bornée, donc admet une sous-suite qui converge dans $\mathbb{R}$. Si de plus K est fermé, alors la limite est dans K, donc toute suite de K admet une sous-suite convergente. □

Proposition 52. *Une fonction continue à valeurs réelles sur un compact est bornée et atteint son maximum et son minimum.*

6.2 Théorème de Tychonov

L'énoncé du Théorème de Tychonov est simple et général:

Théorème 11. *Le produit $X = \Pi_{i\in I} X_i$ des espaces topologiques séparés X_i, muni de la topologie produit, est compact si et seulement si les facteurs X_i sont compacts.*

Il n'y a ici aucune hypothèse sur l'ensemble I. Notons que chaque facteur X_i est l'image par la projection π_i du produit X, il est donc compact si X l'est. Nous avons déjà vu qu'un produit d'espaces séparés est séparé.

Nous allons donner successivement les preuves de trois cas. Dans un premier temps, nous montrerons l'énoncé pour un produit dénombrable d'espaces métriques compacts. Bien qu'elle soit de portée moins générale, cette preuve est basée sur la technique d'extraction diagonale, qu'il est important de connaitre. Nous montrerons ensuite le théorème dans le cas du produit de deux espaces topologiques compacts (ce qui implique le résultat pour tous les produits finis). Il y a plusieurs preuves possible de ce cas, celle que nous donnerons a vocation à introduire la preuve du cas général, et n'est sans doute pas la plus simple ni la plus courte. Nous donnerons ensuite la preuve du cas général.

CAS D'UN PRODUIT DÉNOMBRABLE D'ESPACES MÉTRIQUES. On pose alors directement $I = \mathbb{N}$. On a vu que dans ce cas l'espace X est métrisable, il suffit dont de démontrer que toute suite de x admet une sous-suite convergente pour conclure que X est compact. Soit $x(n)$ une suite d'éléments de X, et soit $x_i(n) := \pi_i(x(n))$ la i-ème composante de $x(n)$. Comme X_1 est compact, la suite $x_1(n)$ admet une sous-suite convergente. C'est à dire qu'il existe une application strictement croissante $\varphi_1 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que $x_1 \circ \varphi_1$ converge vers une limite x_1. Comme X_2 est compact, la suite $n \longmapsto x_2 \circ \varphi_1(n)$ admet une sous-suite convergente. Il existe donc application strictement croissante $\varphi_2 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que $x_2 \circ \varphi_1 \circ \varphi_2$ converge vers une limite x_1. Posons $\psi_2 = \varphi_1 \circ \varphi_2$. On construit ainsi par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}$, une application strictement croissante $\varphi_k : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que la suite $n \longmapsto x_k \circ \psi_k(n)$ converge dans X_k, où

$$\psi_k = \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \cdots \circ \varphi_k.$$

Posons alors $\phi(n) = \psi_n(n)$ et montrons que la sous-suite $x \circ \phi$ converge dans X. Il suffit pour ceci de montrer que chacune des suites $x_k \circ \phi$ converge. Ceci découle de la convergence de la suite $x_k \circ \psi_k$ puisque, pour tout $n \geqslant k$, on a

$$\phi(n) = \psi_k[\varphi_{k+1} \circ \cdots \circ \varphi_n(n)].$$

Si l'on oublie ses k premiers termes, la suite $x_k \circ \phi$ est donc une sous-suite de la suite convergente $x_k \circ \psi_k$, elle est donc elle même convergente. □

L'idée de choisir la sous-suite $\phi(n) = \psi_n(n)$ pour faire converger simultanément tous les facteurs s'appelle principe d'extraction diagonale, elle est très importante en elle même.

Produit de deux espaces compacts. Nous utiliserons la caractérisation des compacts par les fermés:

Si $\mathcal{F}$ est une famille de parties de X dont les intersections finies sont non-vides (on dit que $\mathcal{F}$ a la propriété d'intersection finie), alors l'intersection de tous les éléments de $\mathcal{F}$ est non-vide.

Soit donc $\mathcal{F}$ une famille de parties fermées de $X = X_1 \times X_2$ ayant la propriété d'intersection finie. On veut montrer que l'intersection des éléments de $\mathcal{F}$ est non-vide. On peut supposer sans perte de généralité que $\mathcal{F}$ est stable par intersection finie. On associe à $\mathcal{F}$, par projection, un ensemble $\mathcal{F}_1 = \{\overline{\pi_1(F)}, F \in \mathcal{F}\}$ de parties fermées de X_1. Comme $\mathcal{F}$ a la propriété d'intersection finie, il est facile de vérifier que $\mathcal{F}_1$ l'a aussi. Comme X_1 est compact, on conclut qu'il existe un point $x_1 \in X_1$ qui est dans l'adhérence de chacune des projections $\pi_1(F), F \in \mathcal{F}$.

On peut trouver de la même façon un point $x_2 \in X_2$ qui est dans l'adhérence de chacune des projections $\pi_2(F), F \in \mathcal{F}$. Mais ceci ne suffit pas à conclure que (x_1, x_2) est dans l'intersection des éléments de F, comme on pourrait l'espérer.

Pour surmonter cette difficulté, on considère la famille $\hat{\mathcal{F}}$ constituée des ensembles $F \cap (K_1 \times X_2)$, où K_1 est un voisinage compact de x_1. On constate que cette famille est stable par intersection finie, et qu'elle ne contient pas l'ensemble vide. Elle a donc la propriété d'intersection finie.

On peut maintenant construire comme ci-dessus un élément x_2 de X_2 qui est dans l'adhérence de chacun des ensembles $\pi_2(F), F \in \tilde{\mathcal{F}}$. Montrons alors que $(x_1, x_2) \in F$ pour tout $F \in \mathcal{F}$. En effet, si K_1 et K_2 sont des voisinage compacts de x_1 et x_2, alors la définition de x_2 implique que $X_1 \times K_2$ intersecte $F \cap (K_1 \times X_2)$. L'intersection $F \cap (K_1 \times K_2)$ est donc non-vide. Comme ceci est vrai pour tous voisinages compacts K_1 et K_2 de x_1 et x_2, on conclut que (x_1, x_2) est dans l'adhérence de F, donc dans F, pour tout $F \in \mathcal{F}$.

Cas général. On utilise la caractérisation par les fermés, et on s'inspire de la preuve ci-dessus. On a vu qu'il était utile d'étendre la famille de fermés $\mathcal{F}$. On le fait cette fois de manière plus abstraite: On considère une famille $\mathcal{G} \supset \mathcal{F}$ de parties de X ayant la propriété d'intersection finie, et maximale parmi les familles ayant cette propriété. On repousse la discussion sur l'existence d'une telle famille, et on montre que l'intersection $\cap_{G \in \mathcal{G}} \bar{G}$ des adhérences des éléments de $\mathcal{G}$ est non vide, ce qui implique que $\cap_{\mathcal{F}}$ est non vide.

On utilise pour ceci:

Lemme 53. *La famille $\mathcal{G}$ est stable par intersection finie.*

Toute partie de X qui intersecte chacun des éléments de $\mathcal{G}$ est un élément de $\mathcal{G}$.

Toute partie de X qui contient un élément de $\mathcal{G}$ est un élément de $\mathcal{G}$.

Démonstration. Les intersections finies d'éléments de $\mathcal{G}$ constituent une famille de parties de X qui contient $\mathcal{G}$ et a la propriété d'intersection finie. C'est donc $\mathcal{G}$, au vu de la maximalité.

Considérons maintenant une partie A de X qui intersecte chacune des parties de $\mathcal{G}$. Pour montrer que $A \in \mathcal{G}$, il suffit de constater que $\{A\} \cup \mathcal{G}$ a la propriété d'intersection finie.

La troisième propriété est une conséquence de la seconde. □

Fixons un indice α. La famille $\mathcal{G}_\alpha := \{\overline{\pi_\alpha(G)}, G \in \mathcal{G}\}$ a la propriété d'intersection finie, et a donc une intersection non-vide $\mathcal{I}_\alpha$. Tout ouvert U_α qui intersecte $\mathcal{I}_\alpha$ intersecte $\overline{\pi_\alpha(G)}$, donc $\pi_\alpha(G)$, pour tout G, c'est à dire que $\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ intersecte G. On conclut donc par le lemme que $\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ est un élément de $\mathcal{G}$, et donc finalement que $\bar{U}_\alpha$ est dans $\mathcal{G}_\alpha$. Comme X_α est séparé, on conclut que l'intersection $\mathcal{I}_\alpha = \cap_{\mathcal{G}_\alpha}$ est réduite à un point, que l'on note x_α.

On note alors x le point (x_α). On a vu que $\mathcal{G}$ contient tous les voisinages de x de la forme $\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$, avec U_α ouvert dans X_α. Comme $\mathcal{G}$ est stable par intersection finie, il contient tous les cylindres ouverts contenant x, et donc tous les ouverts contenant x. En conséquence, on a $x \in \bar{G}$

pour tout $G \in \mathcal{G}$, et donc $x \in \cap_{G \in \mathcal{G}} \bar{G} \subset \cap_{F \in \mathcal{F}} F$. □

Nous avons terminé le preuve en utilisant la famille maximale $\mathcal{G}$. L'existence de cette famille découle du lemme de Zorn, que nous exposons ci-dessous.

6.3 Lemme de Zorn

Une relation d'ordre sur un ensemble W est une relation binaire $\leqslant$ telle que

- $w \leqslant w$ pour tout $w \in W$.
- Si $w \leqslant z$ et $z \leqslant y$, alors $w \leqslant y$.
- Si $w \leqslant z$ et $z \leqslant w$, alors $z = w$.

L'odre est dit total si, étant donnés deux éléments w et z, on a $w \leqslant z$ ou $z \leqslant w$. La partie Z de W est dite totalement ordonnée si la restriction de l'odre à $Z \times Z$ est un ordre total. La partie Z de W est dite majorée si il existe un élément w de W telle que $z \leqslant w$ pour tout $z \in Z$. On dit alors que $z \in W$. On dit que $m \in W$ est un élément maximal si aucun élément de W n'est plus grand que m.

Nous utiliserons l'énoncé suivant du Lemme de Zorn.

Soit W un ensemble ordonné non-vide dans lequel toute partie totalement ordonnée est majorée. Alors il y a une élément maximal dans W.

En dépit du nom, nous le considérerons comme un axiome. C'est une conséquence de l'axiome du choix, que nous ne discuterons pas ici.

Corollary 54. *Sous les hypothèses du Lemme de Zorn, tout élément est majoré par un élément maximal.*

Démonstration. Soit w un élément de W, et soit Z l'ensemble des éléments de W qui sont plus grands que w. Toute partie totalement ordonnée de Z est aussi une partie totalement ordonnée de W, elle admet donc un majorant. Par transitivité, ce majorant est plus grand que w, c'est donc un élément de Z. On conclut que Z vérifie les hypothèses du lemme de Zorn, et admet donc un élément maximal m dans Z. Celui-ci est alors aussi un élément maximal dans W. C'est donc bien un élément maximal qui majore w. □

Appliquons maintenant le lemme de Zorn pour construire la famille maximale $\mathcal{G}$ utilisée dans la preuve du théorème de Tychonov. On considère pour ceci l'ensemble W constitué des parties de $\mathcal{P}(X)$ qui vérifient la propriété d'intersection finie. On l'ordonne par l'inclusion.

Si l'on considère une partie totalement ordonnée $Z \subset W$, on peut considérer sa réunion A, qui est un majorant de Z dans $\mathcal{P}(X)$. Vérifions que A est un élément de W, c'est à dire qu'il a la propriété d'intersection finie. Si $a_1, \ldots, a_n$ sont des éléments de A (ce sont donc des sous-ensembles de X), alors chaque a_i est un élément d'une partie z_i de Z. Comme Z est totalement ordonnée, les éléments z_i sont ordonnés, supposons que c'est de manière décroissante, $z_1 \supset z_2 \cdots \supset z_n$. On a alors $a_i \in z_1$ pour tout i. Comme z_1 a la propriété d'intersection finie, on conclut que l'intersection des a_i est non vide. On a montré que A a la propriété d'intersection finie, c'est donc un majorant de Z dans W.

Par le lemme de Zorn, il existe un élément maximal $\mathcal{G}$ dans W qui majore $\mathcal{F}$. □

6.4 Espaces localement compacts

Un espace topologique est dit localement compact si il est séparé et si tout point admet un voisinage compacte. C'est le cas dans $\mathbb{R}^n$, par exemple.

Dans un espace localement compact X, tout point admet une base de voisinages compacts. En effet, soit $x \in X$, soit K un voisinage compact de x, et soit U un ouvert contenant x. Alors $U \cap \mathring{K}$ est un ouvert de X (et de K) qui contient x. Puisque K est compact, donc normal, il existe un ouvert V de K tel que $x \in V \subset \bar{V} \subset U \cap \mathring{K}$. Comme V est contenu dans $\mathring{K}$, c'est un ouvert de X, donc $\bar{V}$ est un voisinage de x dans X. Comme $\bar{V}$, est fermé dans le compact K, c'est un compact. On a montré que tout ouvert contenant x contient un voisinage compact de x.

Propriété 55. *Toute partie fermée ou ouverte d'un espace localement compact est localement compacte.*

Un produit fini d'espaces localement compacts est localement compact.

Attention, un produit infini d'espaces localement compacts n'est pas necessairement localement compact. Par exemple $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ n'est pas localement compact pour la topologie produit, car les cylindres ne sont pas compacts.

Une compactification d'un espace topologique X est un plongement topologique $i : X \longrightarrow Y$ dans un espace compact Y. On demande souvent en plus que l'image de i soit dense dans Y, mais nous ne le ferons pas ici.

Théorème 12. *Si X est localement compact, il existe une unique (à conjugaison près) compactification $i : X \longrightarrow \hat{X}$ de X telle que $\hat{X} - i(X)$ est un point. C'est la compactification d'Alexandroff. On identifie en général X à son image $i(X)$, et on note ∞ le point de $\hat{X} - X$, de sorte que*

$$\hat{X} = X \cup \{\infty\}.$$

On appelle compactifié d'Alexandroff l'ensemble $\hat{X}$.

La preuve va nous indiquer que la topologie de $\hat{X}$ est formée de deux sortes d'ouverts: les ouverts de X et les complémentaires (dans $\hat{X}$) des compacts de X.

On remarque que X est dense dans $\hat{X}$ si et seulement si X n'est pas compact.

Démonstration. Discutons d'abord l'unicité. Soient $i : X \longrightarrow Y$ et $i' : X \longrightarrow Y'$ deux compactifications telles que $Y - i(X)$ et $Y' - i'(X)$ contiennent un seul point. On note alors que $i(X)$ et $i'(X)$ sont des ouverts. Considérons la bijection $J : Y \longrightarrow Y'$ qui vaut $i' \circ i^{-1}$ sur $i(X)$, et qui donc envoie le point supplémentaire de Y sur le point supplémentaire de Y'. Montrons que cette application est un homéomorphisme.

Soit U un ouvert de Y. Si U est contenu dans $i(X)$, alors $J(U) = i' \circ i(U)$ est ouvert, puisque $i' \circ i$ est un plongement topologique dont l'image $i'(X)$ est ouverte.

Si U contient le point supplémentaire de Y, alors son complémentaire est un compact contenu dans $i(X)$. Son image par J est donc un compact contenu dans $i(X')$.

Dans les deux cas, on voit que $J(U)$ est un ouvert de Y', donc J^{-1} est continue, et, symétriquement, J est continue. Il existe donc un homéomorphisme J tel que $J \circ i = i'$.

Pour montrer l'existence, on considère l'ensemble $\hat{X}$ qui contient X et un point supplémentaire ∞. On le munit de la topologie dont les ouverts sont les ouverts de X et les complémentaires des compacts de X.

Montrons qu'il s'agit effectivement d'une topologie. Considérons une famille finie d'ouverts de $\hat{X}$. Si tous ces ouverts contiennet ∞, alors l'intersection est le complémentaire d'une réunion finie de compacts de X, c'est à dire le complémentaire d'un compact de X, qui est donc bien un ouvert de $\hat{X}$.

Si l'un de ces ouverts ne contient pas ∞, alors l'intersection est un ouvert de X, donc un ouvert de $\hat{X}$. On a montré la stabilité par intersections finies.

Considérons maintenant un famille d'ouverts de $\hat{X}$. Si aucun de ces ouverts ne contient ∞, alors leur réunion est un ouvert de X.

Si l'un de ces ouverts contient ∞, alors leur réunion est le complémentaire d'un compact de X. On a donc stabilité par réunion.

L'injection $i : X \longrightarrow \hat{X}$ est bien un plongement topologique puisque les ouverts de X sont bien les restrictions à X des ouverts de $\hat{X}$.

Montrons finalement que $\hat{X}$ est compact. Si U_α est un recouvrement ouvert de $\hat{X}$, alors l'un au moins de ces ouverts contient ∞. Choisissons en un et notons le U_0. Le complémentaire de U_0 est un compact X. Comme les U_α recouvrent $\hat{X}$, ils recouvrent aussi le compact ${}^cU_0$. Il existe donc une famille finie d'ensembles U_α qui recouvrent ${}^cU_0$. En ajoutant U_0 à cette famille finie d'ouverts, on obtient un recouvrement fini de $\hat{X}$.

Enfin, $\hat{X}$ est séparé. En effet, dexu point x et x' de X peuvent être séparés par des ouverts de X, qui sont des ouverts de $\hat{X}$. De plus, tout point $x \in X$ est contenu dans un ouvert relativement compact V, et alors V et $(\bar{V})^c$ sont des ouverts disjoints de $\hat{X}$ qui séparent x de ∞. C'est le seule point de la preuve ou on utilise le caractère localement compact de X. $\square$

Par exemple, la sphère S^n de dimension n est le compactifié d'Alexandroff de $\mathbb{R}^n$. On peut prendre pour plongement $i : \mathbb{R}^n \longrightarrow S^n$ l'inverse de la projection stéréographique.

Corollary 56. *Soit $K \subset X$ un compact dans l'espace localement compact X. Il existe un compact C tel que $K \subset \mathring{C}$.*

Démonstration. Dans le compactifié $\hat{X}$, il existe des ouverts disjoints U et V contenant K et ∞. Le complémentaire C de V est un compact qui vérifie $K \subset U \subset C$ et donc $K \subset \mathring{C}$. $\square$

Un espace métrique X est localement compact si et seulement si, pour tout $x \in X$, il existe $r > 0$ tel que la boule fermée $\bar{B}(x, r)$ est compacte. Il faut prendre garde au fait que toute boule n'est pas forcément compacte ce qui est clair quand on se souvient qu'on peut toujours trouver une distance bornée qui engendre la même topologie.

Théorème 13. *Le compactifié d'Alexandroff de l'espace localement compact X est métrisable si et seulement si X est métrisable et séparable. Il suffit en fait que X admette une base dénombrable d'ouverts.*

En particulier, un espace localement compact est métrisable si et seulement si il admet une base dénombrable d'ouverts.

Démonstration. Si $\hat{X}$ est métrisable, alors il est séparable, donc $X \subset \hat{X}$ est métrisable et séparable.

Réciproquement, supposons que X admet une base dénombrable d'ouverts. Comme $\hat{X}$ est compact, il suffit de montrer qu'il admet une base dénombrable d'ouverts pour montrer qu'il est métrisable. Soit $\mathcal{U}_1$ une base dénombrable d'ouverts de X. Soit $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}_1$ le sous-ensemble des éléments relativement compacts de $\mathcal{U}_1$. C'est aussi une base d'ouverts de X. En effet, si U est un ouvert de X et x un point de U, alors il existe un ouvert relativement compact V de x contenu dans U. Comme $\mathcal{U}_1$ est une base d'ouverts, il existe alors un ouvert $W \in \mathcal{U}_1$ tel que $x \in W \subset V$, mais alors $W \in \mathcal{U}$. Soit $\mathcal{V}_1$ l'ensemble des complémentaires dans $\hat{X}$ des adhérences des éléments de $\mathcal{U}$, et $\mathcal{V}$ l'ensemble des intersections finies d'éléments de $\mathcal{V}_1$. La famille $\mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ est alors une famille dénombrable d'ouverts de $\hat{X}$. Montrons que c'est une base d'ouverts. Tout ouvert de X est réunion d'éléments de $\mathcal{U}$. Soit Ω un ouvert de $\hat{X}$ contenant ∞. Son complémentaire est donc compact. Recouvrons ce compact ${}^c\Omega$ par un nombre fini d'éléments $U_1, \dots, U_n$ de $\mathcal{U}$. L'ouvert $V := (\bar{U}_1 \cup \dots \cup \bar{U}_n)^c = \bar{U}_1^c \cap \dots \cap \bar{U}_n^c$ est un élément de $\mathcal{V}$. Soit alors U un ouvert de X qui contient le complémentaire de V. On a $\Omega = V \cup (U \cap \Omega)$, où V est un élément de $\mathcal{V}$ et $U \cap \Omega$ est un ouvert de X, donc une union d'éléments de $\mathcal{U}$. $\square$

Corollary 57. *Soit X un espace métrisable localement compact et séparable. Alors la topologie de X est engendrée par une distance complète.*

DÉMONSTRATION. L'espace X s'identifie à une ouvert de son compactifié $\hat{X}$, qui est complet. On a vu plus haut qu'un ouvert d'un espace métrique complet admet une distance complète. □

En fait, le caractère séparable n'est pas utile. Tout espace localement compact métrisable admet une métrique complète. Il suffit pour le montrer de vérifier que, si X est localement compact, il est ouvert dans son complété, ce qui est une conséquence de l'exercice suivant:

Exercice 12. *Si Y est un espace métrique et que X est une partie dense et localement compacte de Y, alors X est ouvert dans Y.*

6.5 Partition de l'unité, plongement

Une partition de l'unité finie sur l'espace X est une collection finie de fonction continues $f_i : X \longrightarrow [0, 1], 1 \leqslant i \leqslant n$ telle que, pour chaque x

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x) = 1.$$

Si $U_i, 1 \leqslant i \leqslant n$ est un recouvrement ouvert de X, on dit que la partition de l'unité f_i est subordonnée au recouvrement U_i si le support $\overline{\{f_i > 0\}}$ de f_i est contenu dans U_i. Plus généralement, on dit que la partition de l'unité f_i est subordonnée au recouvrement ouvert U_α si, le support de chacune des fonctions f_i est contenu dans l'un des ouverts du recouvrement.

Théorème 14. *Pour tout recouvrement ouvert d'un espace compact X, il existe une partition de l'unité finie qui lui est subordonnée.*

DÉMONSTRATION. On peut supposer grâce a la compacité que le recouvrement est fini, on note $U_i, 1 \leqslant i \leqslant n$ ses éléments. Notons alors $F_1 \subset U_1$ le complémentaire de l'ouvert $\cup_{i \neq 1} U_i$. Comme X est normal, il existe un ouvert V_1 tel que $F_1 \subset V_1 \subset \bar{V}_1 \subset U_1$. La famille $V_1, U_2, \ldots, U_n$ est toujours un recouvrement ouvert de X. On construit de la même façon un ouvert V_2 tel que $\bar{V}_2 \subset U_2$ et tel que $V_1, V_2, U_3, \ldots U_n$ est un recouvrement de X. On continue jusqu'à trouver un recouvrement ouvert $V_i, 1 \leqslant i \leqslant n$ de X tel que $\bar{V}_i \subset U_i$. On refait l'opération et on obtient un recouvrement ouvert W_i avec $\bar{W}_i \subset V_i$. Pour chaque i, il existe (par la propriété d'Urysohn) une fonction continue $g_i : X \longrightarrow [0, 1]$ nulle en dehors de V_i et égale à 1 sur W_i. Comme les W_i recouvrent X, la somme $s(x)$ des fonctions g_i est strictement positive sur X. Les fonctions $f_i(x) = g_i(x)/s(x)$ forment la partition de l'unité cherchée. □

Dans les espaces non compacts, il est souvent trop restrictif de considérer des partitions de l'unité finie. On introduit alors la notion de partition de l'unité localement finie. C'est une famille $f_\alpha : X \longrightarrow [0, 1]$ de fonctions continues qui on la propriété que, pour tout $x \in X$, il existe un voisinage V de x et une famille finie A d'indices tels que toutes les fonctions $f_\alpha, \alpha \notin A$ sont identiquement nulles sur V, et qui de plus vérifient $\sum_\alpha f_\alpha(x) = 1$ pour tout x, (la somme n'implique qu'un nombre fini de termes non nuls en chaque point x au vu du caractère localement fini). Un espace topologique est dit paracompact si il a la propriété qu'on peut subordonner une partition localement finie à tout recouvrement ouvert. Les espaces métriques sont paracompacts, mais nous ne le montrerons pas ici.

Voici un exemple d'application.

Théorème 15. *Soit X une variété topologique compacte de dimension d, c'est à dire un espace métrique compact dont chaque point admet un voisinage homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^d$.*

Démonstration. On recouvre X par des ouverts $U_i, 1 \leqslant i \leqslant k$ homéomorphes à des ouverts de $\mathbb{R}^d$. On a donc des plongements topologiques $\phi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^d$. On considère une partition de l'unité $f_i, 1 \leqslant i \leqslant k$ subordonnée à ce recouvrement. On considère alors l'application

$$\Phi : x \longmapsto \Big(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x), f_1(x)\phi_1(x), \ldots, f_k(x)\phi_k(x)\Big)$$

à valeurs dans $\mathbb{R}^N$, avec $N = k(d+1)$. Dans l'expression ci-dessus, on a étend les produits $f_i\phi_i$, qui a priori ne sont définis que sur U_i, par la valeur 0 en dehors de U_i. On obtient bien une application continue puisque les fonctions f_i sont supportées dans U_i. Comme X est compact, il suffit de montrer que Φ est injective pour conclure que c'est un plongement topologique.

Soient x et y deux points tels que $\Phi(x) = \Phi(y)$. Chacune des fonctions f_i prend la même valeur en x et en y. De plus, comme $\sum_i f_i(x) = 1$, l'une des ces valeurs est non nulle, $f_j(x) = f_j(y) > 0$. Les points x et y sont donc dans u_j. Comme $f_j(x)\phi_j(x) = f_j(y)\phi_j(y)$, on a aussi $\phi_j(x) = \phi_j(y)$ et donc $x = y$ puisque ϕ_j est un plongement topologique. □

7 Ensembles compacts de fonctions continues

Soit X un espace topologique compact, et Y un espace métrique. On note $b(X,Y)$ l'ensemble des applications bornées de X dans Y, muni de la norme

$$d_\infty(f,g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)).$$

On rappelle que l'ensemble $C(X,Y)$ des applications continues est contenu dans $b(X,Y)$, on le munit de la distance d_∞. Une famille $\mathcal{F}$ d'applications de X dans Y est dite équicontinue en x_0 si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un voisinage V de x_0 tel que

$$d(f(x), f(x_0)) < \epsilon \quad \forall f \in \mathcal{F}, x \in V.$$

Il est équivalent de dire que la fonction

$$e(x) := \sup_{f \in \mathcal{F}} d(f(x), f(x_0))$$

est continue en x_0. Si X est un espace métrique, c'est aussi équivalent à l'existence d'un module de continuité ω_{x_0} commun aux fonctions $f \in \mathcal{F}$ en x_0, c'est à dire tel quel

$$d(f(x), f(x_0)) \leqslant \omega_{x_0}(d(x, x_0)) \quad \forall f \in \mathcal{F}.$$

Dans le cas où X est métrique, on dit que $\mathcal{F}$ est uniformément équicontinue si il existe un module de continuité ω tel que

$$d(f(x), f(y)) \leqslant \omega(d(x,y)) \quad \forall f \in \mathcal{F}, x, y \in X.$$

Théorème 16. *Soit $\mathcal{F} \subset C(X,Y)$ une partie fermée. Alors les propriétés 1. à 3. ci dessous sont équivalentes, et, dans le cas où X est un espace métrique, elles sont équivalentes à 4.*

1. *$\mathcal{F}$est compact*
2. *(a) $\mathcal{F}(X)$ est compact dans Y et*

   (b) $\mathcal{F}$ est équicontinue

3. (a) $\mathcal{F}(x)$ *est relativement compact dans* Y *pour chaque* $x \in X$ *et*

   (b) $\mathcal{F}$ *est équicontinue*

4. (a) $\mathcal{F}(X)$ *est compact dans* Y *et*

   (b) $\mathcal{F}$ *est uniformément équicontinue.*

On a aussi la variante suivante, où $\mathcal{F}$ n'est pas supposée fermée. Cet énonvé est le Théorème d'Ascoli, dit aussi d'Ascoli-Arzela.

Théorème 17. *Soit* $\mathcal{F} \subset C(X, Y)$ *une partie quelconque. Alors les propriétés 1. à 3. ci dessous sont équivalentes, et, dans le cas où* X *est un espace métrique, elles sont équivalentes à 4.*

1. $\mathcal{F}$*est relativement compact*

2. (a) $\mathcal{F}(X)$ *est relativement compact dans* Y *et*

   (b) $\mathcal{F}$ *est équicontinue*

3. (a) $\mathcal{F}(x)$ *est relativement compact dans* Y *pour chaque* $x \in X$ *et*

   (b) $\mathcal{F}$ *est équicontinue*

4. (a) $\mathcal{F}(X)$ *est relativement compact dans* Y *et*

   (b) $\mathcal{F}$ *est uniformément équicontinue.*

Le résultat le plus utilisé est sans doute l'implication $4. \Rightarrow 1.$ du Théorème 17. Nous allons démontrer le Théorème 16 puis en déduire le Théorème 17.

Démonstration du Théorème 16. $1. \Rightarrow 2.$ L'application $(f, x) \longmapsto f(x)$ est continue sur $C(X, Y) \times X$, donc l'image $\mathcal{F}(X)$ du compact $\mathcal{F} \times X$ est compacte. Pour vérifier la continuité de l'application ci-dessus, on fixe f_0 et x_0, et on observe que

$$d(f(x), f_0(x_0)) \leqslant d_\infty(f, f_0) + d(f_0(x), f_0(x_0)).$$

Fixons maintenant un point $x_0 \in X$ et démontrons que $\mathcal{F}$ est equicontinue en x_0. Pour ceci, on fixe $\epsilon > 0$, et on considère une partie finie et ϵ-dense $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$. Comme cette partie est finie, elle est équicontinue, il existe donc un voisinage U de x_0 tel que

$$d(g(x), g(x_0)) < \epsilon \quad \forall g \in \mathcal{G}, x \in U.$$

Alors, pour toute application $f \in \mathcal{F}$, on choisit $g \in \mathcal{G}$ tel que $d_\infty(f, g) < \epsilon$, et on obtient, pour tout x dans U:

$$d(f(x), f(x_0)) < d(f(x), g(x)) + d(g(x), g(x_0)) + d(g(x_0), f(x_0)) < 3\epsilon.$$

La famille $\mathcal{F}$ est donc équicontinue.

$2. \Rightarrow 3.$ Clair.

$3. \Rightarrow 1.$ Nous allons montrer que $\mathcal{F}$ est complet et précompact.

Complétude : Pour chaque x, notons Y_x la fermeture de $\mathcal{F}(x)$ dans Y, qui est supposée compacte (et donc complète). Soit f_n une suite de Cauchy dans $\mathcal{F}$. La suite $f_n(x)$ est alors de Cauchy dans Y_x pour tout x, et elle admet donc une limite $f(x)$. On a alors

$$d_\infty(f_n, f) \leqslant \sup_{m \geqslant n} d_\infty(f_n, f_m) \longrightarrow 0$$

ce qui implique que f_n tend vers f dans $b(X,Y)$, et donc dans $C(X,Y)$. La fermeture de $\mathcal{F}$ implique alors que $f \in \mathcal{F}$.

Précompactité : Fixons $\epsilon > 0$.

Chaque point $x \in X$ admet un voisinage ouvert U tel que $d(f(x), f(x')) < \epsilon$ pour tout $x' \in U$ et tout $f \in \mathcal{F}$. Comme X est compact, il existe un nombre fini de points x_i et d'ouverts $U_i \ni x_i$ recouvrant X et tels que $d(f(x_i), f(x)) < \epsilon$ pour tout $x \in U_i$ et tout $f \in \mathcal{F}$. On considère des ensembles X_i tels que $X_i \subset U_i$ et tels que X soit la réunion disjointe des X_i. On Considère aussi pour chaque i une partie $Y_i \subset Y$ qui est finie et ϵ-dense dans $\mathcal{F}(x_i)$. On définit alors la partie finie $B \subset b(X,Y)$ constituée des fonctions qui sont constantes sur chacun des ensembles X_i et y prennent une valeur dans Y_i.

Montrons que toute fonction de $f \in \mathcal{F}$ est à une distance au plus 2ϵ de B, ce qui implique la précompacité de $\mathcal{F}$. Pour ceci, on choisit, pour chacun des x_i, un point $y_i \in Y_i$ tel que $d(y_i, f(x_i)) < \epsilon$, et on considère la fonction $g \in B$ qui vaut y_i sur X_i. On a alors, pour tout $x \in X_i$,

$$d(f(x), g(x)) = d(f(x), y_i) \leqslant d(f(x), f(x_i)) + d(f(x_i), y_i) \leqslant 2\epsilon.$$

Ceci est vrai pour tout i, donc $d_\infty(f,g) \leqslant 2\epsilon$.

Finalement, dans le cas où X est un espace métrique, il est immédiat que $4. \Rightarrow 2.$, et l'implication $1. \Rightarrow 4.$ se montre comme l'implication $1. \Rightarrow 4.$ ci-dessus. □

Démonstration du Théorème 17. $1. \Rightarrow 2.$ On applique l'implication correspondante du Théorème 16 à la famille compacte $\bar{\mathcal{F}}$. On conlut que $\bar{\mathcal{F}}(X)$ est compacte dans Y et donc que $\mathcal{F}(X) \subset \bar{\mathcal{F}}(X)$ est relativement compacte.

$2. \Rightarrow 3.$ Est clair.

$3. \Rightarrow 1.$ On constate d'abord que, si $\mathcal{F}$ est équicontinue, il en est de même de sa fermeture $\bar{\mathcal{F}}$, puisque

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} d(f(x), f(x_0)) = \sup_{f \in \bar{\mathcal{F}}} d(f(x), f(x_0))$$

pour tous x et x_0. De plus, on a $\bar{\mathcal{F}}(x) \subset \overline{\mathcal{F}(x)}$ pour tout x, donc on peut appliquer l'implication $3. \Rightarrow 1.$ du Théorème 16 à $\bar{\mathcal{F}}$.

Dans le cas où X est un espace métrique, l'implication $4. \Rightarrow 2.$ est claire, et l'implication $1. \Rightarrow 4.$ découle directement de son analogue du Théorème 16 □

8 Courbes de longueur minimale

Soit X un espace métrique. Une courbe sur X est une application continue $\gamma : [S,T] \longrightarrow X$. On définit la longueur de γ comme le supremum

$$\mathcal{L}(\gamma) = \sup_{S=t_0<t_1<\cdots<t_k=T} \big(d(\gamma(0), \gamma(t_1)) + \cdots + d(\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k))\big)$$

où le supremum est pris sur l'ensemble des suites finies croissantes de temps intermédiaires $S = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_{k-1} \leqslant t_k = T$. On notera $\mathcal{L}(\gamma_{[S,T]})$ lorsqu'on veut préciser le domaine de la courbe. On étendra aussi la notation $\mathcal{L}(\gamma)$ au cas d'applications $\gamma : [S,T] \longrightarrow X$ pas continues. Notre objectif principal sera de montrer:

Théorème 18. *Soit X un espace métrique compact et soient x_0 et x_1 deux points de X. Si il existe une courbe de longueur finie entre x_0 et x_1, alors il existe un courbe de longueur minimale entre x_0 et x_1.*

La méthode pour montrer ce type de résultat consiste à se restreindre à un espace compact de courbes et à utiliser une variante du principe selon lequel une fonction continue sur un compact atteint son minimum. Il y a deux difficultés à surmonter. D'abord, les courbes ne constituent pas immédiatement un bon espace fonctionnel puisqu'elles ne sont pas toutes définies sur le même domaine. De plus l'invariance de la longueur par reparamétrisation est une source de non-compacité. La deuxième difficulté sera que la longueur n'est pas une fonction continue de la courbe, ce qui nous conduira à la notion de semi-continuité.

8.1 Longueur et reparamétrisation

Les quelques propriétés ci dessous de la longueur découlent directement de la définition:

$$\mathcal{L}(\gamma_{[s,t]}) \geqslant d(\gamma(s),\gamma(t)), \quad \forall s \leqslant t$$

$$\mathcal{L}(\gamma_{[S,t]}) + \mathcal{L}(\gamma_{[t,T]}) = \mathcal{L}(\gamma_{[S,T]}) \quad \forall t \in [S,T]$$

Propriété 58. *Dans le cas de l'espace Euclidien $\mathbb{R}^d$, cette notion de longueur coincide avec la définition habituelles pour les courbes C^1, c'est à dire que*

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_S^T |\dot\gamma(t)|dt =: \mathcal{I}(\gamma).$$

Démonstration. On constate d'abord que $\mathcal{I}(\gamma_{[s,t]}) \geqslant d(\gamma(s),\gamma(t))$, et que $\mathcal{I}$ vérifie la relation de Chasles. On en conclut que $\mathcal{I}(\gamma) \geqslant \mathcal{L}(\gamma)$. Réciproquement, considérons un module de continuité ω de $\dot\gamma$. Pour tout $[s,t] \subset [S,T]$, on a

$$\big||\gamma(t)-\gamma(s)| - (t-s)|\dot\gamma(s)|\big| \leqslant \left|\int_s^t \dot\gamma(\sigma) - \dot\gamma(s)d\sigma\right| \leqslant (t-s)\omega(t-s)$$

et

$$\left|\int_s^t |\dot\gamma(\sigma)|d\sigma - (t-s)|\dot\gamma(s)|\right| \leqslant (t-s)\omega(t-s)$$

donc

$$\left|\int_s^t |\dot\gamma(\sigma)|d\sigma - |\gamma(s)-\gamma(t)|\right| \leqslant 2(t-s)\omega(t-s).$$

En prenant une décomposition $T = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ telle que $t_{i+1} - t_i < \epsilon$, on a donc

$$\mathcal{L}(\gamma) \geqslant |\gamma(t_0) - \gamma(t_1)| + \cdots + |\gamma(t_{n-1}) - \gamma(t_n)| \geqslant \mathcal{I}(\gamma) - 2(T-S)\omega(\epsilon).$$

Comme on peut choisir $\epsilon > 0$ arbitrairement petit, on a $\mathcal{L}(\gamma) \geqslant \mathcal{I}(\gamma)$ et donc $\mathcal{L}(\gamma) = \mathcal{I}(\gamma)$. □

La longueur est invariante par reparamétriation des courbes:

Lemme 59. *Soit $\gamma : [S,T] \longrightarrow X$ une application (pas forcément continue). Si $\tau : [S',T'] \longrightarrow [S,T]$ est une fonction croissante (pas forcément continue) vérifiant $\tau(S) = S'$ et $\tau(T) = T'$, alors $\mathcal{L}(\gamma\circ\tau) \leqslant \mathcal{L}(\gamma)$. Si de plus τ est continue, $\mathcal{L}(\gamma\circ\tau) = \mathcal{L}(\gamma)$.*

Démonstration. Pour toute suite croissante $S' = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_k = T'$ de temps intermédiaires, la suite $S = \tau(t_0) \leqslant \tau(t_1) \leqslant \cdots \leqslant \tau(t_k) = T$ est une suite croissante de temps intermédiaires de l'intervalle $[S,T]$, donc

$$d(\gamma(\tau(t_0), \gamma(\tau(t_1))) + \cdots + d(\gamma(\tau(t_{k-1}), \gamma(\tau(t_k))) \leqslant \mathcal{L}(\gamma).$$

En prenant le supremum, on obtient que $\mathcal{L}(\gamma\circ\tau)\leqslant\mathcal{L}(\gamma)$.

Dans le cas où τ est continue, elle est surjective. On considère une suite croissante de temps intermédiaires $S=t_0\leqslant t_1\leqslant\cdots\leqslant t_k=T$. On choisit des temps t'_i tels que $\tau(t'_i)=t_i$, avec $t'_0=S'$ et $t'_k=T'$. On a alors

$$\begin{aligned}d(\gamma(t_0),\gamma(t_1)))+\cdots+d(\gamma(t_{k-1}),\gamma(t_k)) &= d(\gamma\circ\tau(t'_0),\gamma\circ\tau(t'_1))+\cdots+d(\gamma\circ\tau(t'_{k-1}),\gamma\circ\tau(t'_k))\\ &\leqslant \mathcal{L}(\gamma\circ\tau).\end{aligned}$$

En prenant le supremum, on obtient que $\mathcal{L}(\gamma)\leqslant\mathcal{L}(\tilde{\gamma})$, et donc $\mathcal{L}(\gamma)=\mathcal{L}(\gamma\circ\tau)$. □

Une courbe $\gamma:[S,T]\longrightarrow X$ est dite bien paramétrée si $\mathcal{L}(\gamma)=Lip(\gamma)(T-S)$. Notons qu'on a toujours l'inégalité $\mathcal{L}(\gamma_{[S,T]})\leqslant Lip(\gamma)(T-S)$. La courbe γ est bien paramétrée si et seulement si $\mathcal{L}(\gamma_{[s,t]})=Lip(\gamma)(t-s)$ pour tout $[s,t]\subset[S,T]$. En effet, les trois inégalités $\mathcal{L}(\gamma_{[S,s]})\leqslant Lip(\gamma)(s-S)$, $\mathcal{L}(\gamma_{[s,t]})\leqslant Lip(\gamma)(t-s)$ et $\mathcal{L}(\gamma_{[t,T]})\leqslant Lip(\gamma)(T-t)$ on pour somme $\mathcal{L}(\gamma_{[S,T]})\leqslant Lip(\gamma)(T-S)$, qui est une égalité. Donc ces inégalités sont toutes des égalités. On va montrer que toute courbe de longueur finie admet un bon paramétrage.

Lemme 60. *Soit $\gamma:[S,T]\longrightarrow X$ une courbe de longueur finie. La fonction $l:t\longmapsto\mathcal{L}(\gamma_{[S,t]})$ est croissante et continue sur $[S,T]$.*

Démonstration. La croissance découle de la relation $l(t)=l(s)+\mathcal{L}(\gamma_{[s,t]})$ pour $s\leqslant t$ dans $[S,T]$. Fixons maintenant $t_0\in[S,T[$ et $\epsilon>0$. Il existe alors une suite de temps intermédiaires $t_0<t_1<\cdots<t_k=T$ tels que

$$l(\gamma_{[t_0,T]})\leqslant\epsilon+d(\gamma(t_0),\gamma(t_1))+d(\gamma(t_1),\gamma(t_2))+\cdots+d(\gamma(t_{k-1}),\gamma(T)).$$

Pour tout $s\in[t_0,t_1]$, on a

$$\begin{aligned}l(T)-l(t_0)=l(\gamma_{[t_0,T]})&\\ &\leqslant\epsilon+d(\gamma(t_0),\gamma(s))+d((\gamma(s),\gamma(t_1)))+\cdots+d(\gamma(t_{k-1}),\gamma(T))\\ &\leqslant\epsilon+d(\gamma(t_0),\gamma(s))+l(\gamma_{[s,T]})\\ &\leqslant\epsilon+d(\gamma(t_0),\gamma(s))+l(T)-l(s).\end{aligned}$$

Il existe donc $t_1>t_0$ tel que, pour tout $s\in[t_0,t_1]$, $l(s)\leqslant l(t_0)+\epsilon+d(\gamma(t_0),\gamma(s))$. Quitte a choisir t_1 assez petit, on conclut, au vu de la continuité de γ, que $l(s)\leqslant l(t_0)+2\epsilon$ pour tout $s\in[t_0,t_1]$, ce qui montre la continuité à droite de l (en rappelant que l est croissante). La continuité à gauche se montre de la même façon. □

Proposition 61. *Soit $\gamma:[S,T]\longrightarrow X$ une courbe continue de longueur finie. Alors il existe une courbe continue $\tilde{\gamma}:[0,1]\longrightarrow X$ bien paramétrée telle que $\gamma=\tilde{\gamma}\circ\tau$, où $\tau:[S,T]\longrightarrow[0,1]$ est continue et croissante. On a alors $\mathcal{L}(\gamma)=\mathcal{L}(\tilde{\gamma})$.*

Démonstration. La fonction $\tau(t):=\mathcal{L}(\gamma_{|[0,t]})/\mathcal{L}(\gamma)$ est croissante et continue, son image sur l'intervalle $[S,T]$ est $[0,1]$. Posons $f(t)=\min\{s\in[S,T]:\tau(s)=t\}$. La fonction $f:[0,1]\longrightarrow[S,T]$ vérifie $\tau\circ f(t)=t$, elle est strictement croissante. Elle serait continue si τ était strictement croissante, ce qui n'est pas forcément le cas. On pose malgré tout $\tilde{\gamma}=\gamma\circ f$.

Montrons que $\gamma=\tilde{\gamma}\circ\tau$. On a pas $f\circ\tau(t)=t$, mais $f\circ\tau(t)\leqslant t$. De plus $\mathcal{L}(\gamma_{[f\circ\tau(t),t]})=(\tau\circ f\circ\tau(t)-\tau(t))\mathcal{L}(\gamma)=0$, donc la courbe γ est constante sur l'intervalle $[f\circ\tau(t),t]$, et en particulier $\gamma=\gamma\circ f\circ\tau=\tilde{\gamma}\circ\tau$.

Pour tout $[s, t] \subset [0, 1]$, on déduit du lemme 60 que

$$\mathcal{L}(\tilde{\gamma}_{[s,t]}) = \mathcal{L}(\tilde{\gamma}_{[\tau(f(s)),\tau(f(t))]}) = \mathcal{L}(\gamma_{[f(s),f(t)]}) = \big(\tau(f(t)) - \tau(f(s))\big)\mathcal{L}(\gamma) = (t-s)\mathcal{L}(\gamma).$$

En particulier, $\mathcal{L}(\tilde{\gamma}) = \mathcal{L}(\gamma)$. Ceci implique que la courbe $\tilde{\gamma}$ est Lipschitz de constante $\mathcal{L}(\tilde{\gamma})$ et donc qu'elle est continue et bien paramétrée. □

8.2 Semi-continuité

La fonction $f : X \longrightarrow [-\infty, \infty]$ est semi continue inférieurement en x si, pour tout $a < f(x)$, l'ensemble $\{f > a\}$ est un voisinage de x.

La fonction f est semi-continue si elle est semi-continue en chaque point, c'est à dire si les ensembles $\{f > a\}$ sont ouverts pour tout a.

On dit que f est semi-continue supérieurement si $-f$ est semi-continue inférieurement. La fonction f est continue si et seulement si elle est semi-continue inférieurement et semi-continue supérieurement.

Propriété 62. *Soit X un espace métrique et $f : X \longrightarrow [-\infty, \infty]$. La fonction f est semi-continue inférieurement en x si et seulement si $\liminf f(x_n) \geqslant f(x)$ pour toute suite $x_n \longrightarrow x$.*

Démonstration. Supposons que f est semi-continue inférieurement en x. Pour tout $a < f(x)$, l'ensemble $\{f > a\}$ est un voisiange de x, donc toute suite x_n qui converge vers x est contenue dans cet ensemble apres un certain rang. On a donc $f(x_n) > a$ pour n assez grand, et donc $\liminf f(x_n) > a$. Comme ceci est vrai pour tout $a < f(x)$, on a $\liminf f(x_n) \geqslant f(x)$.

Réciproquement si f n'est pas semi-continue inférieurement en x, alors il existe $a < f(x)$ tel que $\{f > a\}$ ne contient aucune boule centrée en x. Il existe donc une suite $x_n \longrightarrow x$ telle que $f(x_n) \leqslant a$, et donc $\liminf f(x_n) < f(x)$. □

Propriété 63. *Une fonction semi-continue sur un compact admet un minimum (si la fonction est à valeurs réelles, le minimum est donc réel).*

Démonstration. Soit $m \in [-\infty, \infty]$ l'infimum de f. Si $m = +\infty$, alors $f(x) = +\infty$ pour tout x, donc la valeur est atteinte. On suppose maintenant que $m < \infty$. Les ensembles $f^{-1}([-\infty, a])$ sont fermés, et donc compacts pour tout $a \in \mathbb{R}$. Soit a_n une suite qui tend vers m en décroissant strictement. Alors $Y = \cap_n f^{-1}((-\infty, a_n])$ est non vide, et $f = m$ sur Y. □

Propriété 64. *Le suprémum d'une famille quelconque de fonctions semi-continues inférieurement (à valeurs dans $[-\infty, \infty]$) est semi-continue inférieurement.*

C'est donc en particulier le cas d'un suprémum de fonctions continues. On notera cependant qu'un tel supremum n'est pas forcément continu.
Démonstration. Il suffit de remarquer que $\{(\sup_\alpha f_\alpha) > a\} = \cup_\alpha \{f_\alpha > a\}$. □

8.3 Démonstration du Théorème 18.

Considérons une courbe de longueur finie L joignant x_0 à x_1. Il existe alors une courbe L-Lipschitz $\gamma : [0, 1] \longrightarrow X$ joignant x_0 à x_1. Soit $\mathcal{C}_L \subset b([0, 1], X)$ l'ensemble des courbes $\gamma : [0, 1] \longrightarrow X$ qui sont L-Lipschitz et vérifient $\gamma(0) = x_0$ et $\gamma(1) = x_1$. Par le théorème d'Ascoli, $\mathcal{C}_L$ est compact.

Proposition 65. *La fonction longueur $\mathcal{L} : \mathcal{C}_L \longrightarrow \mathbb{R}$ admet un minimum sur $\mathcal{C}_L$.*

Démonstration. Par le théorème d'Ascoli, $\mathcal{C}_L$ est compact. Il suffit donc de démontrer que la fonction longueur $\mathcal{L} : b([0,1], X) \longrightarrow (-\infty, \infty]$ est semi-continue inférieurement. Pour chaque suite croissante $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$, la fonction

$$\gamma \longmapsto d(\gamma(t_0), \gamma(t_1)) + \cdots + d(\gamma(t_{n-1}), \gamma(t_n))$$

est continue (elle est même $2n$-Lipschitz). La longueur est donc un suprémum de fonctions continues, elle est donc semi-continue inférieurement. □

Il suffit pour conclure de constater que le minimum m de $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{C}_L$ est bien son minimum sur l'ensemble de toutes les courbes continues joignant x_0 à x_1. En effet, si il existait une courbe de longueur $l < m$, on pourrait la reparamétrer en une courbe l-Lipschitz de longueur l, qui serait donc un élément de $\mathcal{C}_L$. Ceci contredirait la définition de m. □

8.4 Théorème de Hopf-Rinow dans les espaces de longueur

L'espace métrique (X, d) est un espace de longueur si, pour tous x_0 et x_1 dans X, la distance $d(x_0, x_1)$ est l'infimum des longueurs des courbes joignant x_0 à x_1.

Lemme 66. *Soit (X, d) un espace de longueur, et soient x_0 et x_1 deux points de X. Si r_0 et r_1 sont des réels strictement positifs tels que $r_0 + r_1 > d(x_0, x_1)$, alors $B(x_0, r_0) \cap B(x_1, r_1)$ est non vide.*

Démonstration. On commence par choisir $r_0' < r_0$ tel que $r_0' + r_1 > d(x_0, x_1)$. On suppose aussi que $r_0' \leqslant d(x_0, x_1)$. Considérons une courbe $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$ joignant x_0 à x_1 et telle que $\mathcal{L}(\gamma) < r_0' + r_1$. Comme la fonction $t \longmapsto d(x_0, \gamma(t))$ est continue, elle prend toutes les valeurs entre 0 et $d(x_0, x_1)$, donc en particulier la valeur r_0'. En notant t_0 un temps tel que $d(x_0, \gamma(t_0)) = r_0'$, on a

$$r_0' + d(\gamma(t_0), x_1) \leqslant \mathcal{L}(\gamma_{[0,t_0]}) + \mathcal{L}(\gamma_{[t_0,1]}) = \mathcal{L}(\gamma) < r_0' + r_1.$$

On a donc $d(\gamma(t_0), x_1) < r_1$ et $d(\gamma(t_0), x_0) = r_0' < r_0$. □

Théorème 19. *Si (X, d) est un espace de longueur localement compact et complet, alors:*

Toutes les boules fermées de X sont compactes.

Pour tous points x_0 et x_1, il existe une courbe de longueur $d(x_0, x_1)$ qui joint x_0 à x_1.

Rappelons encore une fois que, dans un espace métrique localement compact général, les boules fermées ne sont pas forcément toutes compactes.

Démonstration. Fixons $x \in X$ et montrons que les boules fermées de centre x sont compactes. Pour ceci on considère le supremum R des rayons $r > 0$ tels que la boule $\bar{B}(x, r)$ est compacte. On veut montrer que $R = +\infty$, on suppose que c'est un nombre fini.

La boule $\bar{B}(x, R)$ est compacte. Cette boule est fermée dans X complet, donc elle est complète. Pour montrer qu'elle est précompacte, on fixe $\epsilon > 0$ et on considère une partie $x_1, \ldots, x_n$ qui est $\epsilon/3$-dense dans la boule compacte $\bar{B}(x, R - \epsilon/3)$. Cette partie est alors ϵ-dense dans $\bar{B}(x, R)$. En effet pour tout $y \in \bar{B}(x, R)$, il existe un point $z \in B(x, R - \epsilon/3)$ tel que $d(y, z) < \epsilon/2$ (par le lemme 66). En choisissant i tel que $d(x_i, z) < \epsilon/3$, on voit que $d(x_i, y) < \epsilon$.

Il existe $\delta > 0$ tel que la boule $\bar{B}(x, R+\delta)$ est compacte. La boule compacte $\bar{B}(x, R)$ est contenue dans l'intérieur d'un compact K. La distance entre $\bar{B}(x, R)$ et le complémentaire de $\mathring{K}$ est alors strictement positive, c'est à dire qu'il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout point y qui appartient à une boule de rayon 2δ et dont le centre est dans $\bar{B}(x, R)$, on a $y \in K$. Au vu du lemme 66, on conclut que $B(x, R+\delta) \subset K$ et donc que la boule $\bar{B}(x, R+\delta)$ est compacte. Ceci est en contradiction avec ma définition de R, on conclut que R est infini, ce qui termine la preuve de la première moitié de l'énoncé.

Montrons maintenant l'existence d'une courbe minimisant la longueur. Toute courbe joignant x_0 à x_1 et de longueur L est contenue dans la boule $\bar{B}(x,L)$, qui est compacte. Fixons $L > d(x_0,x_1)$. Il existe alors des courbes de longueur finie joignant x_0 à x_1 dans le compact $\bar{B}(x,L)$. Il existe donc une courbe de longueur minimale, par le théorème 18. On vérifie facilement que cette longueur minimale est $d(x_0,x_1)$. □

9 Connexité

Définition 67. *L'espace topologique X est dit connexe si toute fonction continue $f : X \longrightarrow \{0,1\}$ est constante.*

Un espace est connexe si et seulement si il n'est pas possible de le décomposer de manière non-triviale en réunion disjointe de deux fermés (ou de deux ouverts). C'est aussi équivalent à demander que toute partie ouverte et fermée est soit vide soit égale à X.

Proposition 68. *Les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.*

Démonstration. Soit $X \subset \mathbb{R}$. Si X n'est pas un intervalle, il existe un point $a \in \mathbb{R} - X$ tel que chacun des ensembles $X \cap]-\infty, a[$ et $X \cap]a, \infty[$ est non vide. On obtient ainsi une partition de X en deux ouverts, donc X n'est pas connexe.

Réciproquement, soit I un intervalle de bornes $a < b$. Soit U_0 un ouvert non vide de I qui est aussi fermé (dans I). Fixons un de ses points x_0 et considérons le supremum y des réels $x \in I$ tels que $[x, y[\in U_0$. Supposons que $y < b$. Comme U_0 est fermé, il contient le point y, et donc l'intervalle $[x, y]$. Mais alors, comme U_0 est ouvert, il contient un intervalle $]y - \epsilon, y + \epsilon[$, et donc il contient $[x_0, y + \epsilon[$, ce qui contredit la définition de y. On a donc $y = b$ et $[x_0, b[\subset U_0$. On montre de la même façon que $]a, x_0] \in U_0$, et donc $]a, b[\subset U_0$. Comme U_0 est fermé, on a $U_0 = I$. □

Propriété 69. *L'image continue d'un connexe est connexe.*

On en déduit le théorème des valeurs intermédiaires: L'image d'une fonction continue à valeurs réelles est un intervalle.

Démonstration. Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application continue et surjective, et soit $g : Y \longrightarrow \{0,1\}$ une application continue. Alors $g \circ f$ est une application continue, donc elle est constante, ce qui implique que g est constante. □

Propriété 70. *L'adhérence d'une partie connexe est connexe. PLus généralement, si $Y \subset Z \subset \bar{Y}$, et si Y est connexe, alors Z est connexe.*

Démonstration. On considère un ouvert $U \subset Z$ qui est aussi fermé. L'intersection $U \cap Y$ est ouverte et fermée dans Y. De plus, si U est non-vide, elle est non-vide, donc égale à Y. Comme U est fermée dans Z, c'est l'intersection d'un fermé F de X avec Z. Ce fermé F contient Y, donc il contient $\bar{Y}$, et donc Z. Donc $U = F \cap Z = Z$. □

Propriété 71. *Soient A_α des parties connexes de X dont l'intersection est non-vide. Alors $\cup A_\alpha$ est connexe.*

Démonstration. Soit $f : \cup A_\alpha \longrightarrow \{0,1\}$ une fonction continue. Si x_0 est un point de l'intersection, alors, sur chacun des A_α la fonction f est constante et y prend donc la valeur $f(x_0)$. Elle est donc constante sur $\cup A_\alpha$. □

Au vu de la propriété précédente, on peut parler de la plus grande partie connexe d'un espace X qui contient le point x. C'est la réunion de toutes les parties connexes de X contenant x. On l'appelle la *composante connexe* de x (dans X). Si y est dans la composante connexe de x, alors la composante connexe de y est égale à celle de x (car leur union est connexe). Les composantes connexes forment donc une partition de X en sous ensembles connexes maximaux. Les composantes connexes sont fermées (car leur adhérence est connexe).

La donnée d'une partition de X est équivalente à la donnée d'une relation d'équivalence sur X dont ce sont les classes d'équivalence. En l'occurence deux points sont équivalents si ils appartiennent à la même composante connexe. Il y a diverses formulations alternatives. Par exemple, deux points x_0 et x_1 sont équivalents si et seulement si toute fonction continue $f : X \longrightarrow \{0,1\}$ prend la même valeur en x_0 et en x_1.

Toute partie ouverte et fermée de X est un union de composantes connexes.

On aurait pu tenter de définir la composante connexe de x comme le plus petit ensemble ouvert et fermé contenant x. Mais il n'existe pas forcément un tel ensemble, l'intersection des ouvers-fermés contenant x n'eétant pas forcément ouverte.

Un espace est dit totalement discontinu si ses composantes connexes sont ses points, c'est à dire si il ne contient aucun sous-ensemble connexe à part ses points.

Définition 72. *Un espace est dit localement connexe si tout point admet une base de voisinages connexes.*

Attention, un espace connexe n'est pas forcément localement connexe. Un contre exemple classique est donné par la partie de $\mathbb{R}^2$ constituée des droites $\{x=0\}, \{y=0\}$, et $\{y=1/n\}, n \in \mathbb{N}^*$.

Propriété 73. *Si X est localement connexe, ses composantes connexes sont ouvertes.*

Proposition 74. *Un produit est connexe si et seulement si ses facteurs sont connexes.*

Démonstration. Considerons un point $x = (x_\alpha)$ du produit $X = \pi X_\alpha$ avec X_α connexe. Soit Z la composante connexe de x. Considérons une fibre $F_\alpha(x) = \cap_{\beta \neq \alpha} \pi_\beta^{-1}(x_\beta)$, qui est homéomorphe à X_α donc connexe. Comme elle contient x, elle est contenue dans Z. Z contient donc tous les points dont une seule coordonnée est différente de celle de x. Mais alors Z contient tous les points dont deux coordonnées sont différentes de celles de x, et, par récurrence, tous les points dont un nombre fini de coordonnées sont différentes de celles de x. Notons Y cet ensemble. On observe que Y intersecte tout cylindre ouvert, et donc que Y est dense. Comme Z contient Y, c'est donc X tout entier. □

Considérons l'application d'écriture décimale

$$\begin{aligned} F : \{0,1,2,\dots,9\}^{\mathbb{N}} &\longrightarrow [0,10] \\ (n_i) &\longmapsto \sum_{i \geqslant 0} 10^{-i} n_i. \end{aligned}$$

Cette aplication est continue et surjective. Comme $\{0,1,2,\cdots,9\}^{\mathbb{N}}$ est compact, ce serait un homéomorphisme si elle était injective, ce qui ne peut pas être le cas puisque $[0,1]$ est connexe, mais pas $\{0,1,2,\cdots,9\}^{\mathbb{N}}$ (qui est totalement discontinu). En l'occurence, on a, par exemple, $F(0,1,0,0\dots) = F(0,0,9,9,9,\dots)$.

Si on restreint F à $\{0,2,4,6,8\}^{\mathbb{N}}$, on obtient une injection (le vérifier), et donc un plongement topologique. L'image est une partie compacte et totalement discontinue de $[0,10]$. Elle a de plus la propriété de ne pas avoir de point isolé. C'est un ensemble de Cantor. On peut obtenir géométriquement cet ensemble par une généralisation de la construction triadique classique: On coupe l'intervalle en dix, on ne garde qu'un des sous-intervalles sur deux, et on refait récursivement la même chose pour chacun des intervalles obtenus.

Le Cantor triadique classique s'obtient comme image de l'application

$$\begin{aligned} G : \{0,2\}^{\mathbb{N}} &\longrightarrow [0,3] \\ (n_i) &\longmapsto \sum_{i\geqslant 0} 3^{-i} n_i. \end{aligned}$$

Ces deux espaces sont en fait homéomorphes. La preuve n'est pas simple car 2 et 5 sont premiers entre eux. On va introduire quelques notations. On note $\{0,2\}^{<\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites finies d'éléments de $\{0,2\}$,

$$\{0,2\}^{<\mathbb{N}} = \{0,2\} \cup \{0,2\}^2 \cup \{0,2\}^3 \cup \{0,2\}^4 \cup \cdots .$$

Tout élément de $\{0,2\}^{<\mathbb{N}}$ appartient à un ensemble $\{0,2\}^l$, on dit alors que l est la longueur de σ. On dit que $\sigma \in \{0,2\}^{<\mathbb{N}}$ prolonge $\sigma' \in \{0,2\}^{<\mathbb{N}}$ si $l(\sigma) > l(\sigma')$ et si les $\sigma_i = \sigma'_i$ pour tout $i \leqslant l(\sigma')$. À tout élément $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_l) \in \{0,2\}^{<\mathbb{N}}$, on associe le cylindre $C_\sigma \subset \{0,2\}^{\mathbb{N}}$ constitué des suites $s \in \{0,2\}^{\mathbb{N}}$ telles que $s_i = \sigma_i$ pour tout $i \leqslant l$.

Les cylindres ouverts $C_\sigma \in \{0,2\}^{\mathbb{N}}$ ont les propriétés suivantes:

1. $\bar{C}_\sigma \subset C_{\sigma'}$ si σ prolonge σ'.
2. $C_\sigma \cap C_{\sigma'} = \emptyset$ sauf si l'une des suites σ, σ' prolonge l'autre.
3. $X = \cup_{\sigma\in\{0,2\}^l} C_\sigma$ pour tout l (ici avec $X = \{0,2\}^{\mathbb{N}}$).
4. Pour tout $s \in \{0,2\}^{\mathbb{N}}$, l'intersection $\cap_{l\geqslant 1} C_{s_{|l}}$ est un point, où $s_{|l}$ est la suite finie constituée des l premiers éléments de s.

En fait, le point de l'intersection est précisément s. Réciproquement, si dans un espace métrique compact X il existe une famille d'ouverts $F_\sigma, \sigma \in \{0,2\}^{<\mathbb{N}}$, qui satisfait les quatre conditions ci-dessus, alors X est homéomorphe à $\{0,2\}^{\mathbb{N}}$. En effet on peut considérer l'application $\{0,2\}^{\mathbb{N}} \longrightarrow X$:

$$s \longmapsto \cap_{l\geqslant 1} F_{s_{|l}}$$

et vérifier que c'est une bijection continue donc un homéomorphisme ($\{0,2\}^{\mathbb{N}}$ étant compact).

Voici comment on peut construire une famille F_σ dans $\{0,2,4,6,8\}^{\mathbb{N}}$: On prend $F_0 = \{s_1 = 0\}$, $F_1 = \{s_1 \neq 0\}$, $F_{00} = \{s_1 = s_2 = 0\}$, $F_{01} = \{s_1 = 0, s_2 \neq 0\}$, $F_{10} = \{s_1 = 2\}$, $F_{11} = \{s_1 \in \{4,6,8\}\}$, $F_{000} = \{s_1 = 0, s_2 = 0, s_3 = 0\}$, $F_{001} = \{s_1 = 0, s_2 = 0, s_3 \neq 0\}$, $F_{010} = \{s_1 = 0, s_2 = 2\}$, $F_{011} = \{s_1 = 0, s_2 \in \{4,6,8\}\}$, $F_{100} = \{s_1 = 2, s_2 = 0\}$, $F_{101} = \{s_1 = 2, s_2 \neq 0\}$, $F_{110} = \{s_1 = 4\}$, $F_{111} = \{s_1 \in \{6,8\}\}$, etc ...

On conclut que $\{0,2,4,6,8\}^{\mathbb{N}}$ et $\{0,2\}^{\mathbb{N}}$ sont homéomorphes. Plus généralement, tout espace compact métrisable, totalement discontinu, et sans point isolé admet une famille F_σ comme ci-dessus et est donc homéomorphe au Cantor $\{0,2\}^{\mathbb{N}}$.

9.1 Connexité par chaines

On se place ici dans un espace métrique X. On dit que x_0 et x_1 sont chaine-connectés si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe une suite finie de points $y_0 = x_0, y_1, \dots, y_n = x_1$ tels que $d(y_i, y_{i+1}) < \epsilon$.

C'est une relation d'équivalence, on lui associe une décomposition de X en classes d'équivalence, que l'on appelle composantes connexes par chaines.

L'espace X est dit connexe par chaines si il contient une seule classe d'équivalence, c'est à dire si toute paire de points de X est chaine-connactée.

Les composantes connexes par chaines sont les plus grandes parties connexes par chaines de X.

Proposition 75. *Si X est connexe, il est connexe par chaines.*

DÉMONSTRATION. Soit x un point de X, et Y_ϵ l'ensemble des points qui peuvent être reliés à x par une ϵ-chaine. Il est facile de vérifier que Y_ϵ est ouvert et fermé dans X, et donc $Y_\epsilon = X$. Comme ceci est vrai pour tout $\epsilon > 0$, on conclut que la composante connexe par chaines du point x est X.

□

Il y a une réciproque partielle:

Proposition 76. *Si X est compact et connexe par chaines, alors il est connexe.*

DÉMONSTRATION. Si X n'est pas connexe, on peut le décomposer en deux fermés non vides K_1 et K_2, qui sont donc compacts. Alors la distance δ entre K_1 et K_2 est strictement positive, donc il n'est pas possible de relier un point de K_1 à un point de K_2 par une ϵ-chaine avec $\epsilon < \delta$. □

9.2 Connexité par arcs

On considère à nouveau un espace topologique X. Cet espace est dit *connexe par arcs* si, pour toute paire (x_0, x_1) de points de X, il existe une courbe continue qui joint x_0 à x_1.

Comme pour les précédentes notions de connexité, on lui associe une notion de composantes connexes par arcs, qui sont les plus grandes parties connexes par arcs. Ce sont aussi les classes d'équivalences de la relation x_0 et x_1 peuvent être reliés par un arc continu.

Propriété 77. *Tout espace connexe par arcs est connexe.*

DÉMONSTRATION. Fixons un point x_0 de X. Si X est connexe par arcs, alors c'est l'union des courbes continues issues de x_0. Comme chacune de ces courbes est connexe, la réunion est connexe.

□

L'espace X est *localement connexe par arcs* si chaque point de X admet une base de voisinages connexes par arcs.

Proposition 78. *Dans un espace localement connexe par arcs, les composantes connexes sont connexes par arcs.*

DÉMONSTRATION. Les composantes connexes par arcs sont ouvertes. Elles sont donc aussi fermées (le complémentaire d'une composante est un union de composantes). Comme elles sont ouvertes et fermées, ce sont des réunions de composantes connexes. Comme elles sont connexes, ce sont les composantes connexes. □

Corollary 79. *Si un ouvert d'un espace vectoriel normé est connexe, alors il est connexe par arcs.*