Espaces de Banach

Partie 2 sur 3 du cours de topologie et calcul différentiel.

Patrick Bernard

November 21, 2013

1 Espaces Vectoriels Normés

Nous considèrerons des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$. Une norme sur l'espace vectoriel E est une fonction $n : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ telle que

1. $n(ax) = |a|n(x)$ pour tous $x \in E, a \in \mathbb{R}$.
2. $n(x+y) \leqslant n(x) + n(y)$ pour tous $x, y \in E$.
3. $n(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Si seules les deux premières propriétés sont satisfaites, on dit que n est une semi-norme. On associe à toute norme n une distance d sur E définie par $d(x,y) = n(y-x)$. Si n n'est qu'une semi-norme, d est une semi-distance. On est souvent amené à construire des fonctions $n : E \longrightarrow [0,\infty]$ qui satisfont les trois propriétés ci-dessus. On vérifie alors que le sous ensemble $E_n \subset E$ des points en lesquels n prend une valeur finie est un sou-espace vectoriel de E, et que (E_n, n) est un espace vectoriel normé. On dit que E est un espace de Banach si c'est un espace vectoriel normé complet. On rappelle le critère classique

Proposition 1. *L'espace vectoriel normé E est complet si et seulement si toute suite normalement convergente est convergente.*

Exemple 2. *Sur l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles, on définit les "normes" à valeurs dans $[0,\infty]$*

$$n_p(x) = (\sum |x_i|^p)^{1/p}$$

pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$, et

$$n_\infty(x) = \sup |x_i|.$$

On note $l_p, 1 \leqslant p \leqslant \infty$ les espaces normés correspondants. l^p est donc l'espace des suites x telles que $n_p(x) < \infty$, il est muni de la norme n_p.

Proposition 3. *Soient E et F des espaces vectoriels normés et soit $L : E \longrightarrow F$ une application continue. On a équivalence entre:*

1. *L est continue en 0*
2. *L est continue*
3. *L est uniformément continue*
4. *L est Lipschitz*

5. L est bornée sur B_E, la boule unité de E

On pose alors $\|L\| = \sup_{x\in B_E} \|L(x)\|_F$.

Démonstration. Si L est continue en 0, alors il existe $\delta > 0$ et $\epsilon > 0$ tel que $\|L(x)\|_F < \epsilon$ pour $\|x\|_E < \delta$. Mais alors $\|L(x)\|_F < \epsilon/\delta$ sur B_E.

Si $\|L\|$ est bornée par M sur B_E, alors

$$\|L(x) - L(x')\|_F = \|x' - x\|_E \|L((x - x')/\|x' - x\|_E) \leqslant M\|x' - x\|_E$$

pour tous $x \neq x'$ dans E, donc L est Lipschitz.

Les autres implications sont évidentes. □

On a alors:

Proposition 4. *L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires continues est un espace vectoriel normé, il est complet si F l'est.*

Démonstration. La restriction à la boule unité est une isométrie i de $\mathcal{L}(E, F)$ dans $C(\bar{B}_E, F)$, l'espace des fonctions continues muni de sa norme habituelle. L'image $i(\mathcal{L}(E, F))$ est l'ensemble des applications qui sont linéaires sur B_E, c'est à dire des applications $f \in C(\bar{B}_E, F)$ telles que

$$f(ax + by) = af(x) + bf(y)$$

pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ et $x, y \in \bar{B}_E$ tels que $ax+by \in B_E$. En effet, si f est une telle application, on peut prolonger f de manière homogène à E tout entier en posant $L(x) = \|x\|f(x/\|x\|)\forall x \neq 0$. On vérifie que L est égale à f sur $\bar{B}_E$ et qu'elle est homogène de degré un, c'est à dire que $L(ax) = aL(x)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. Finalement, on a

$$\begin{aligned} L(x + y) = \|x + y\|L\left(\frac{x + y}{\|x + y\|}\right) &= \|x + y\|f\left(\frac{x}{\|x + y\|} + \frac{y}{\|x + y\|}\right) \\ = \|x + y\|f\left(\frac{x}{\|x + y\|}\right) + \|x + y\|f\left(\frac{y}{\|x + y\|}\right) &= L(x) + L(y). \end{aligned}$$

L'image de i est donc fermée, elle est donc complète puisque $C(\bar{B}_E, F)$ l'est. On conclut que $\mathcal{L}(E, F)$ est complét. □

Deux normes n_1 et n_2 sont dites équivalentes si il existe une constante $C \geqslant 1$ telle que $n_1/C \leqslant n_2 \leqslant Cn_1$.

Proposition 5. *Si E est un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sur E sont équivalentes, et munissent E d'une structure d'espace de Banach localement compact.*

Démonstration. On identidie E à $\mathbb{R}^d$ une fois pour toutes au moyen d'une base. On munit d'abord $\mathbb{R}^d$ de la norme $n_\infty(x) = \max |x_i|$. Les boules fermées pour cette norme sont compactes, car ce sont des produits d'intervalles compactes.

Si n est une autre norme, alors

$$n(x) \leqslant n_\infty(x)\big(n(e_1) + n(e_2) + \cdots + n(e_k)\big),$$

où e_i est la base canonique. On en déduit que n est une fonction continue sur $(\mathbb{R}^d, n_\infty)$. Soit $S = \{x \in \mathbb{R}^d, n_\infty(x) = 1\}$. C'est un compact pour la norme n_∞. Comme la fonction n est continue et strictement postitive sur ce compact, elle est minorée par $a > 0$. On a alors

$$n(x) = n_\infty(x)n(x/n_\infty(x)) \geqslant an_\infty(x)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. □

Réciproquement,

Proposition 6. *Les propriétés suivantes sont équivalentes pour un espace vectoriel normé* $(E, \|.\|)$*:*

1. E *est de dimension finie*
2. E *est localement compact*
3. *La boule unité fermée* $\bar{B}_E$ *est compacte.*

Démonstration. Montrons que $3 \Rightarrow 1$. Si E est de dimension infinie, on construit par récurrence une suite $x_n \in S_E$, la sphère unité, telle que

$$d(x_{n+1}, \text{vect}(x_1, \ldots, x_n)) \geqslant 1/2.$$

On observe alors que $d(x_n, x_m) \geqslant 1/2$ pour $n \neq m$, et donc que la suite x_n n'a pas de sous-suite convergente. Pour construire la suite x_n, on utilise le lemme ci-dessous. □

Lemme 7. *Soit* $F \subsetneq E$ *un sous-espace vectoriel non dense d'un espace vectoriel normé. Alors il existe* $x \in E$ *tel que* $\|x\| = 1$ *et* $d(x, F) \geqslant 1/2$*.*

Démonstration. Fixons $y \in E - \bar{F}$, de sorte que $d(y, F) > 0$. Il existe $f \in F$ tel que $\|y - f\| \leqslant 2d(y, F) = 2d(y - f, F)$. On considère alors le point $x = y - f/\|y - f\|$, qui vérifie $d(x, F) = d(y - f, F)/\|y - f\| \geqslant 1/2$. □

Lorsque F est de dimension finie, on peut même trouver x tel que $\|x\| = 1$ et $d(x, F) = 1$. Il suffit pour le montrer de vérifier dans la preuve ci-dessus que la fonction $f \longmapsto \|y - f\|$ atteint son minimum sur F. Comme

$$\|y - f\| \geqslant \|f\| - \|y\|$$

on voit que l'infimum sur F (qui est majoré par $\|y\|$) est égal à l'infimum sur la boule $\bar{B}_F(2\|y\|)$. Cet infimum est atteint car la boule est compacte. On va voir maintenant une classe d'espaces dans lesquels le minimum est toujours atteint.

2 Espaces de Hilbert

Un produit scalaire (réel) sur E est une forme bilinéaire symétrique $\langle ., . \rangle$ telle que $\langle x, x \rangle > 0$ pour tout $x \neq 0$. On note alors $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$, qui est une norme sur E comme nous allons le vérifier. On dit que x est orthogonal à y, noté $x \perp y$, si $\langle x, y \rangle = 0$. On voit alors en développant que $x \perp y$ si et seulement si $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Propriété 8. *La fonction* $\|.\|$ *est une norme. Elle vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwartz*

$$(x, y) \leqslant \|x\|\|y\|,$$

avec égalité si et seulement si il existe $\alpha > 0$ *et* $\beta > 0$ *tels que* $\alpha x = \beta y$*. Elle vérifie aussi l'égalité du parallélogramme*

$$\left\|\frac{x + y}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x - y}{2}\right\|^2 = \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2}{2}$$

pour tous x *et* y *dans* E*.*

Une norme est pré-Hilbertienne si et seulement si elle satisfait l'égalité du parallélogramme.
DÉMONSTRATION. Pour prouver l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on peut supposer que $\|x\| = 1$. On pose alors $z = y - (x, y)x$. On remarque en développant que $(x, z) = 0$, et donc que

$$\|y\|^2 = ((x, y)x + z, (x, y)x + z) = (x, y)^2 + \|z\|^2$$

dont on déduit que $\|y\|^2 \geqslant (x, y)^2$, avec égalité si et seulement si $y = (x, y)x$. Pour montrer que $\|.\|$ est une norme, on écrit

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle \leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| \leqslant (\|x\| + \|y\|)^2.$$

L'égalité du parallélogramme se prouve en développant les produits scalaires. La réciproque mentionnée après l'énoncé est plus difficile, on ne la traite pas ici. □

Un espace de Hilbert est un espace pré-Hilbertien complet. Voici une propriété très utile des espaces de Hilbert:

Théorème 1. *Soit H un espace de Hilbert, F un sous-espace fermé de H, et x un point de H. Alors il existe un unique point $z \in F$ tel que $d(x, F) = \|x - z\|$. Ce point est caractérisé par la propriété $(x - z) \perp F$.*

On trouve dans presque tous les ouvrages sur les espaces de Hilbert une version plus générale où le sous-espace fermé est remplacé par une partie convexe fermée.
DÉMONSTRATION. Supposons dans un premier temps qu'il existe un point z tel que $d(x, F) = \|x - z\|$. On a alors $\|x - z + tf\|^2 \geqslant \|x - z\|^2$ pour tous $f \in F$ et $t \in \mathbb{R}$. En développant, on obtient

$$2t(x - z, f) + t^2\|f\|^2 \geqslant 0$$

pour tout t, ce qui implique que $(x - z, f) = 0$. L'unicité du point z en découle. En effet, si il existait deux points z_1 et z_2 de F tels que $(x - z_1, f) = 0 = (x - z_2, f)$ pour tout $f \in F$, on aurait $(z_1 - z_2, f) = 0$ pour tout $f \in F$ et donc en particulier $\|z_1 - z_2\|^2 = 0$ et donc $z_1 = z_2$.

Pour montrer l'existence (et remontrer l'unicité) du point z, considérons les ensembles

$$D(\epsilon) := \{f \in F : \|f - x\|^2 \leqslant d(x, F)^2 + \epsilon\}, \epsilon > 0.$$

Ils forment une famille croissante de parties fermées de F. Nous allons montrer que leur diamètre tend vers zéro (pour $\epsilon \longrightarrow 0$), ce qui implique au vu de la complétude de F que $\cap_{\epsilon>0} D(\epsilon)$ est un point z. Ce point vérifie alors $\|x - z\| = d(x, H)$.

Si z_1 et z_2 sont deux points de $D(\epsilon)$, on a

$$\|z_1 - z_2\|^2 = \|x - z_1 - (x - z_2)\|^2 = 2\|x - z_1\|^2 + 2\|x - z_2\|^2 - \|2x - z_1 - z_2\|^2$$

par l'égalité du parallélogramme, et donc

$$\|z_1 - z_2\|^2 = 2\|x - z_1\|^2 + 2\|x - z_2\|^2 - 4\|x - (z_1 + z_2)/2\|^2 \leqslant 4d(x, F)^2 + 2\epsilon - 4d(x, F)^2 \leqslant 2\epsilon.$$

□

En notant $F^\perp$ l'espace des points $x \in H$ tels que $\langle x, f\rangle = 0$ pour tout $f \in F$, on a:

Corollaire 9. *Pour tout sous espace fermé F, on a $H = F \oplus F^\perp$.*

DÉMONSTRATION. Pour tout $x \in H$, il existe un unique point $z \in F$ tel que $x - z \perp F$, c'est à dire une unique décomposition $x = z + p$ avec $z \in F$ et $p \in F^{\perp}$. □

On appelle *projection orthogonale* sur F la projection d'image F et de noyau $F^{\perp}$, c'est à dire l'application $x \longmapsto z$ avec les notations du théorème 1. On a $P \circ P = P$, et

$$\|x\|^2 = \|P(x)\|^2 + \|x - P(x)\|^2$$

donc $\|P(x)\| \leqslant \|x\|$, c'est à dire $\|P\| = 1$ (en particulier, P est continue). La projection P est de plus symétrique, c'est à dire que

$$\langle P(x), y\rangle = \langle x, P(y)\rangle$$

pour tous x et y dans H. En effet, on a $\langle P(x), y\rangle = \langle P(x), P(y)+(y-P(y))\rangle = \langle P(x), P(y)\rangle$ puisque $(y - P(y)) \perp F$. On montre symétriquement que $\langle x, P(y)\rangle = \langle P(x), P(y)\rangle$. Réciproquement, une projection symétrique est une projection othogonale, c'est à dire que son noyau est orthogonal à son image.

Une famille de vecteurs e_α de H est dite orthonormée si $\langle x_\alpha, x_\beta\rangle = \delta_{\alpha,\beta}$ (c'est à dire 1 si $\alpha = \beta$ et 0 sinon). On vérifie facilement qu'une famille orthonormée est libre, c'est donc une base de l'espace vectoriel qu'elle engendre. On dit que la famille orthonormée e_α est une base orthonormée de H si elle engendre un sous-espace dense.

Propriété 10. *Si $e_i, 1 \leqslant i \leqslant N$, est une famille orthonormée finie qui engendre le sous-espace F, alors la projection orthogonale sur F s'écrit*

$$P(x) = \langle e_1, x\rangle e_1 + \langle e_2, x\rangle e_2 + \cdots + \langle e_N, x\rangle e_N.$$

En particulier, on a l'inégalité de Bessel

$$\|x\|^2 \geqslant \|\langle e_1, x\rangle\|^2 + \|\langle e_2, x\rangle\|^2 + \cdots + \|\langle e_N, x\rangle\|^2.$$

Dans le cas $x \in F$, on a

$$x = \langle e_1, x\rangle e_1 + \langle e_2, x\rangle e_2 + \cdots + \langle e_N, x\rangle e_N$$

et

$$\|x\|^2 = \|\langle e_1, x\rangle\|^2 + \|\langle e_2, x\rangle\|^2 + \cdots + \|\langle e_N, x\rangle\|^2.$$

DÉMONSTRATION. En notant $Q(x)$ le membre de droite de la première égalité, on vérifie que $\langle x - Q(x), Q(x)\rangle = 0$ en développant le produit scalaire. on vérifie de la même façon que $\|Q(x)\|^2 = \|\langle e_1, x\rangle\|^2 + \|\langle e_2, x\rangle\|^2 + \cdots + \|\langle e_N, x\rangle\|^2$. La seconde inégalité en découle puisque $\|P\| \leqslant 1$. □

Proposition 11. *Tout espace de Hilbert admet une base orthonormée. De plus, toute famille orthonormée est contenue dans une base orthonormée. Dans le cas d'un Hilbert séparable, toute base orthonormée est dénombrable.*

DÉMONSTRATION. En utilisant le Lemme de Zorn, on voit qu'il existe une famille orthonormée maximale M. Soit F l'adhérence de l'espace engendré par cette famille maximale. Si $F \neq H$, alors il existe un vecteur e de norme 1 orthogonal à F, de sorte que $M \cup \{e\}$ est encore une famille orthonormée, contredisant la maximalité de M.

Donnons une autre preuve plus constructive dans le cas séparable. Il existe alors une suite libre h_i engendrant un sous-espace dense. En notant F_k le sous-espace engendré par les $h_i, 1 \leqslant i \leqslant k$, on va construire par récurrence une famille orthonormée e_i telle les $e_i, 1 \leqslant i \leqslant k$ forment une base orthonormée de F_k pour tout k. On pose pour ceci $e_1 = h_1/\|h_1\|$, $e_2 = (h_2 - \langle e_1, h_2\rangle e_1)/\|h_2 - \langle e_1, h_2\rangle e_1\|$ puis, par récurrence,

$$e_{k+1} = (h_{k+1} - P_k(h_{k+1}))/\|h_{k+1} - P_k(h_{k+1})\|^2$$

où P_k est la projection orthogonale sur F_k, qui s'écrit explicitement $P_k(x) = \langle e_1, x\rangle e_1 + \langle e_2, x\rangle e_2 + \cdots + \langle e_k, x\rangle e_k$. C'est le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. $\square$

Propriété 12. *Soit H un espace de Hilbert séparable, et soit e_i une base orthonormée. Alors, pour tout $x \in H$, on a*

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle e_i, x\rangle e_i$$

et on a l'égalité de Parseval

$$\|x\|^2 = \sum_i \langle e_i, x\rangle^2.$$

Démonstration. Soit $x_n := \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, x\rangle e_i$ le projeté de x sur l'espace F_n engendré par $e_i, 1 \leqslant i \leqslant n$. Comme la réunion des F_n est dense, la suite décroissante $\|x - x_n\| = d(x, F_n)$ tend vers 0, ce qui montre la première égalité. On peut alors passer à la limite dans l'égalité

$$\sum_{i=1}^{n} \langle e_i, x\rangle^2 = \|x_n\|^2 \longrightarrow \|x\|^2.$$

$\square$

Il est naturel d'identifier deux espaces de Hilbert H et H' si il existe un isomorphisme $L : H \longrightarrow H'$ tel que $\langle L(x), L(y)\rangle_{H'} = \langle x, y\rangle_H$ pour tous x et y dans H. On dit alors que L est un isomorphisme unitaire. Il suffit pour ceci que L soit un isomorphisme isométrique, c'est à dire que $\|L(x)\|_{H'} = \|x\|_H$ pour tour $x \in H$. En effet, on a alors

$$2\langle L(x), L(y)\rangle_{H'} = \|L(x)+L(y)\|^2_{H'} - \|L(x)\|^2_{H'} - \|L(y)\|^2_{H'} = \|x+y\|^2_H - \|x\|^2_H - \|y\|^2_H = 2\langle x, y\rangle_H.$$

Corollaire 13. *Tout espace de Hilbert séparable s'identifie à l^2 par un isomorphisme isométrique*

Démonstration. Soit e_i une base orthonormée de H. Alors l'application $x \longmapsto (\langle e_i, x\rangle)_i$ est une isométrie linéaire surjective. Pour montrer la surjectivité, on considère une suite $a_i \in l^2$. La série $\sum a_i e_i$ converge dans H puisque $\|\sum_{i=k}^{n} a_i e_i\| \leqslant \sum_{i=k}^{n} a_i^2$. Alors, $\langle e_i, x\rangle = \sum_j a_i \langle e_i, e_j\rangle = a_i$, donc x est un antécédent de la suite (a_i). $\square$

Il y a donc un seul espace de Hilbert séparable, alors qu'il y a de nombreux espaces de Banach séparables différents (et non équivalents).

3 Espace quotient

Lorsque F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E, on définit l'espace quotient E/F comme l'ensemble des classes d'équivalence de la relation

$$xRy \Leftrightarrow x - y \in F.$$

L'ensemble E/F est lui-même muni d'une structure d'espace vectoriel, telle que la projection canonique

$$\pi : E \longrightarrow E/F$$

(qui a un point x associe sa classe d'equivalence) est linéaire. Si $(E, \|.\|)$ est un espace vectoriel normé, on munit E/F de la semi-norme définie par

$$\|y\|_{E/F} := \inf_{x \in \pi^{-1}(y)} \|x\|.$$

On a alors

$$d(x, F) = \|\pi(x)\|_{E/F} \quad \forall x \in E.$$

On remarque d'ailleurs que $x \longmapsto d(x, F)$ est elle même une semi-norme sur E.

Propriété 14. *1. La projection canonique $\pi : E \longrightarrow E/F$ est continue et ouverte, sa norme est $\|\pi\| = 1$.*

2. La semi-norme $\|.\|_{E/F}$ est une norme si et seulement si F est fermé.

3. L'espace quotient B/F est un Banach si B est un Banach et si F est fermé.

4. Si H est un espace de Hilbert et $F \subset H$ est fermé, alors la projection $\pi : H \longrightarrow H/F$ engendre une ismoétrie de $F^\perp$ dans H/F, et munit H/F d'une structure d'espace de Hilbert.

Comme $\pi : E \longrightarrow E/F$ est continue et ouverte, la topologie de E/F est la plus fine de celles qui rendent π continue.

Démonstration. On a $\|\pi(x)\|_{E/F} \leqslant \|x\|_E$, donc la projection canonique est continue, de norme $\|\pi\| \leqslant 1$. De plus, on voit que $\pi(B_E) = B_{E/F}$, donc π est ouverte et $\|\pi\| = 1$.

Si la semi-norme est un norme, alors $\{0\}$ est fermé dans E/F, donc $F = \pi^{-1}(\{0\})$ l'est aussi. Réciproquement, tout point $y \neq 0$ dans E/F admet un antécédent x non contenu dans F. Si F est fermé, on a alors $\|y\|_{E/F} = d(y, F) > 0$.

On démontre le troisième point en utilisant le critère de la proposition 1. Soit y_n une suite telle que $\sum_{n \geqslant 1} \|y_n\|_{B/F} < \infty$. On considère une suite $x_n \in \pi^{-1}(y_n)$ telle que $\|x_n\| \leqslant \|y_n\|_{B/F} + e^{-n}$. La série x_n est alors normalement convergente dans B, donc convergente puisque B est complet. Comme π est continue, on conclut que la série $\sum y_n$ est convergente.

Le sous-espace $F^\perp$ a la propriété que $d(x, F) = \|x\|$ pour $x \in F^\perp$. La restriction à $F^\perp$ de la projection ser H/F est donc isométrique. Elle est aussi surjective puisque $H = F + F^\perp$. □

Proposition 15. *Soit $L : E \longrightarrow F$ une application linéaire continue nulle sur le sous-espace fermé $N \subset E$. Alors L se factorise en $L = G \circ \pi$,*

$$L : E \xrightarrow{\pi} E/N \xrightarrow{G} F$$

où G est une application linéaire continue vérifiant $\|G\| = \|L\|$. Si $N = \ker L$, alors G est injective.

Démonstration. Si y est un élément de E/N, on constate que l'image $L(x)$ de tous les représentants de y dans E est la même, on la note $G(y)$. Il est facile de vérifier que G est linéaire. On a alors $\|G(y)\| = \|L(x)\| \leqslant \|L\|\|x\|$ pour tout représentant x de y, et donc $\|G(y)\| \leqslant \|L\|\|y\|$. On a donc $\|G\| \leqslant \|L\|$. Réciproquement, $\|L\| \leqslant \|G\|\|\pi\| = \|G\|$. □

La version purement algébrique du résultat obtenue en enlevant les mots *fermé* et *continue* est vraie aussi.

La codimension d'un sous-espace $F \subset E$ est la dimension du quotient E/F. C'est aussi la dimension de tout supplémentaire algébrique de F dans E, c'est à dire de tout sous-espace G tel que $G \oplus F = E$. Un hyperplan est un espace de codimension 1.

Si H est un hyperplan de E, alors l'espace quotient E/H s'identifie à $\mathbb{R}$ et donc la projection canonique $\pi : E \longrightarrow E/H$ s'identifie à une forme linéaire non-nulle dont H est le noyau.

Réciproquement, si $l : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est une forme linéaire non nulle de noyau K, alors on peut factoriser l par E/K en $l = \tilde{l} \circ \pi$, avec $\tilde{l}$ injective, et donc bijective. On conclut que E/K est de dimension 1, et donc que K est un hyperplan.

Finalement, si deux formes linéaires continues non nulles l et g ont le même noyau, alors elles sont proportionnelles. En effet, si K est ce noyau, on factorise $l = \tilde{l} \circ \pi$ et $g = \tilde{g} \circ \pi$. Les applications $\tilde{l}$ et $\tilde{g}$ sont alors des applications linéaires de E/K, qui est de dimension 1, dans $\mathbb{R}$. Elles sont donc proportionnelles.

On a montré qu'un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non-nulle, et que deux formes linéaires ayant le même noyau sont proportionnelles.

Ces formes linéaires sont continues si et seulement si l'hyperplan est fermé. En effet, le noyau d'une forme continue est clairement fermé. Réciproquement, comme le facteur $\tilde{l}$ est toujours continu, il suffit pour que l soit continue que la projection $E \longrightarrow E/K$ soit continue, nous avons vu que c'est le cas lorsque K est fermé.

4 Graphe fermé et application ouverte

Dans cette section, on se donne deux espaces de Banach E et F. On discute trois théorèmes essentiels sur les expaces de Banach:

Théorème 2 (de l'inverse de Banach)**.** *Si $L : E \longrightarrow F$ est un isomorphisme continu, alors L^{-1} est continu. On dit que L est un isomorphisme de Banach.*

Théorème 3 (de l'application ouverte)**.** *Si $L : E \longrightarrow F$, linéaire et continue, est surjective, alors elle est ouverte.*

Théorème 4 (du Graphe fermé)**.** *L'application linéaire $L : E \longrightarrow F$ est continue si et seulement si son graphe est fermé dans $E \times F$.*

Dans ce résultat, le produit $E \times F$ est muni de la norme $\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$ qui engendre la topologie produit et munit $E \times F$ d'une structure d'espace de Banach.

Observons dans un premier temps que ces résultats sont tous équivalents. Le théorème de l'application ouverte est a priori plus général que le théorème de l'inverse, mais il s'en déduit en factorisant L par son noyau, (voir la proposition 15). Ces deux résultats sont donc équivalents. Le théorème du Graphe fermé implique le théorème de l'inverse puisque le graphe d'une application est fermé si et seulement si le graphe de son inverse est fermé.

Montrons maintenant le théorème du Graphe fermé à partir du théorème de l'inverse. Soit $B \subset E \times F$ le graphe de L. Si L est continue, alors Γ est fermé (c'est un fait général qui n'utilise pas la linéarité, on le laisse en exercice). Réciproquement, si Γ est fermé, alors c'est un espace de Banach. La restriction à Γ de la projection sur le premier facteur $(x, y) \longmapsto x$ est un isomorphisme continu, son inverse G est donc continue, par le théorème de l'inverse. Comme $L = Y \circ G$, où Y est la projection sur le second facteur, on conclut que L est continue.

Pour démontrer les théorèmes on utilise le

Lemme 16. *Soient E et F des espaces de Banach et soit $L : E \longrightarrow F$ une application linéaire continue. Si $2B_F \subset \overline{L(B_E)}$ alors $B_F \subset L(B_E)$, donc L est une application ouverte.*

Démonstration. Fixons un point $y \in B_F$. Il existe $x_1 \in B_E$ tel que

$$y - Lx_1/2 \in \frac{1}{2} B_F \subset \frac{1}{4} \overline{L(B_E)}.$$

Mais alors il existe $x_2 \in B_E$ tel que

$$y - Lx_1/2 - Lx_2/4 \in \frac{1}{4} B_F \subset \frac{1}{8} \overline{L(B_E)}.$$

On construit ainsi par récurrence une suite $x_n \in B_E$ telle que

$$y - 2^{-1}Lx_1 - \cdots - 2^{-n}Lx_n \in 2^{-(1+n)} B_F \subset \frac{1}{4} \overline{L(B_E(0, 2^{-2-n}))}.$$

En posant $x = \sum_{i \geqslant 1} 2^{-i} x_i$, on a alors $\|x\| \leqslant \sum_{i \geqslant 0} 2^{-i} = 1$ et $Lx = y$. □

Démonstration du théorème 3. Comme L est surjective, on a $F = \cup_{n \in \mathbb{N}} nL(B_E)$ et donc $F = \cup_{n \in \mathbb{N}} n\overline{L(B_E)}$. En appliquant le théorème de Baire dans l'espace complet F, on conlut que l'un des ensembles $n\overline{L(B_E)}$ est d'intérieur non-vide, et donc que l'ensemble $\overline{L(B_E)}$ contient une boule $B_F(y, a)$. Comme l'ensemble $\overline{L(B_E)}$ est symétrique, il contient aussi le point $-y$. Comme il est convexe, il contient aussi la boule $B(0, a/2) = (-y) + B(y, a)$. On a donc montré que

$$2B_F \subset (4L/a)(B_E).$$

On en conclut par le Lemme que $B_F \subset (4L/a)(B_E)$ c'est à dire, en posant $b = a/4$, que $bB_F \subset L(B_E)$. On en conclut facilement que L est ouverte en utilisant la linéarité. □

On donne maintenant une caractérisation très utile des applications linéaires continues d'image fermée.

Proposition 17. *Soient E et F des espaces de Banach, et $L : E \longrightarrow F$ une application linéaire continue. L'image im L est fermée si et seulement si il existe $a > 0$ tel que*

$$\|L(x)\| \geqslant a\, d(x, \ker L) \quad \forall x \in E.$$

En particulier, dans le cas où L est injective, l'image de L est fermée si et seulement si

$$\|L(x)\| \geqslant a\|x\| \quad \forall x \in E.$$

Démonstration. Commençons par le cas où L est injective. Si L'image de L est fermée, alors c'est un espace de Banach (lorsqu'on la munit de la norme de F). Comme L est un isomorphisme sur son image, c'est un isomorphisme de Banach, donc L^{-1} : im $L \longrightarrow E$ est continue, c'est à dire qu'il existe $A > 0$ tel que $\|L^{-1}(y)\| \leqslant A\|y\|$ et, en appliquant ceci à $y = L(x)$ on obtient $\|x\|/A \leqslant \|L(x)\|$. Réciproquement, l'inégalité $\|L(x)\| \geqslant a\|x\|$ implique que L est engendre un homéomorphisme entre les espaces vecrtoriels topologiques E et im L (muni de la norme de F). Comme E est complet, im L l'est donc aussi, il est donc fermé dans F.

Dans le cas général, on factorise L par son noyau,

$$L : E \xrightarrow{\pi} E/\ker L \xrightarrow{G} F.$$

Comme G est injective, on a démontré que l'image de G (qui est aussi l'image de L) est fermée si et seulement si

$$\|G(y)\| \geqslant a\|y\|_{E/\ker L} \quad \forall y \in E/\ker L,$$

ce qui est équivalent à

$$\|L(x)\| = \|G(\pi(x))\| \geqslant a\, \|\pi(x)\|_{E/\ker L} = a\, d(x, \ker L) \quad \forall x \in E.$$

□

5 Dual

Étant donné un espace vectoriel normé E, on considère l'espace $E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, muni de sa norme

$$\|l\| := \sup_{x \in B_E} l(x).$$

Les éléments de E' sont donc les formes linéaires continues sur E. De manière générale, il n'est pas évident que E' est non nul (c'est une conséquence du théorème de Hahn Banach que nous verrons plus bas). Commençons par décrire des cas où E' peut être décrit explicitement.

Théorème 5. *Un espace de Hilbert H est isomorphe à son dual H'. Plus précisément, l'application $D : x \longmapsto (x, .)$ est une isométrie surjective entre H et H'.*

Démonstration. Vérifions d'abord que D est une isométrie. Comme $D(x)(y) = (x, y) \leqslant \|x\|\|y\|$, on voit que $\|D(x)\| \leqslant \|x\|$. Réciproquement, $D(x)(x) = \|x\|^2$, donc $\|D(x)\| = \|x\|$. Vérifions maintenant la surjectivité de D. On fixe pour ceci $l \in H'$, et on construit $x \in H$ tel que $D(x) = l$. Si $l = 0$ il suffit de prendre $x = 0$. On suppose maintenant que $l \neq 0$. Le noyau K de l est alors un hyperplan fermé. Au vu du Théorème 1, il existe un vecteur non nul $y \in H$ orthogonal à K. La forme linéaire $D(y)$ est alors nulle sur K, donc proportionnelle à l, $D(y) = al$, avec $a \in \mathbb{R}$. Le coefficient a est non nul puisque y est non nul et D est injective. On a alors $D(x) = l$ pour $x = y/a$. □

Soit $h^1 \subset l^2$ l'espace des suites telles que $[x]^2 := \sum_i (1 + i^2) x_i^2 < \infty$. C'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $(x, y) = \sum (1 + i^2) x_i y_i$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz (de l^2), on voit que $\sum (1 + i^2)|x_i||y_i| \leqslant [x][y]$, ce qui implique que la somme définissant (x, y) est bien définie pour x et y dans h^1. On peut identifier h^1 à son dual par l'application D qui, à la suite $(a_i) \in h^1$, associe la forme linéaire

$$x \longmapsto \sum (1 + i^2) a_i x_i.$$

Mais on peut aussi constater que toute suite $(b_i) \in l^2$ définit sur h la forme linéaire continue

$$x \longmapsto \sum b_i x_i.$$

On peut alors chercher à caractériser quelles sont le suites qui engendrent par cette expression des formes linéaires continues sur h^1. Pour ceci, on introduit l'espace h^{-1} des suites telles que $\sum_i (1 + i^2)^{-1} x_i^2 < \infty$. C'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\sum (1 + i^2)^{-1} x_i y_i$.

Propriété 18. *L'application $J : h^{-1} \longrightarrow (h^1)'$ qui, a toute suite $b = (b_i)$ de h^{-1} associe la forme linéaire $x \longmapsto \sum b_i x_i$ sur h^1 est un isomorphisme isométrique.*

On peut donc identifier le dual de h^1 à h^1 par l'application D, ou bien à h^{-1} par l'application J, ce qui est parfois plus naturel. Notons que $D \circ J^{-1} : h^1 \longrightarrow h^{-1}$ est simplement l'application $(x_i) \longmapsto (1 + i^2) x_i$.

Démonstration. Pour montrer que J est une isométrie, on commence par constater que

$$\|J(b)(x)\| \leqslant \sum |b_i||x_i| = \sum (1 + i^2)^{-1/2} |b_i| (1 + i^2)^{1/2} |x_i| \leqslant \|b\|_{h^{-1}} [x]$$

où la dernière inégalité découle de l'inégalité de Cauchy-Schwartz (dans l^2). On conclut que $\|J\| \leqslant 1$.

Considérons maintenant un élément $l \in (h^1)'$. On lui associe la suite $b_i = l(e_i)$, où e_i est la suite qui vaut 1 en i et dont tous les autres coéfficients sont nuls. Montrons que $b \in h^{-1}$. Pour tout $n \geqslant 0$, on a

$$\sum_{i=0}^{n} (1 + i^2)^{-1} b_i^2 = l(\sum_{i=0}^{n} (1 + i^2)^{-1} b_i) \leqslant \|l\| \left(\sum_{i=0}^{n} (1 + i^2)^{-1} b_i^2 \right)^{1/2},$$

et donc
$$\sum_{i=0}^{n}(1+i^2)^{-1}b_i^2 \leqslant \|l\|^2.$$
On en déduit que $\|b\|_{h^{-1}} \leqslant \|l\|$, et donc que $b \in h^{-1}$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, la série $\sum b_i x_i$ est donc absolument convergente, et
$$l(x) = \lim l(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = \lim \sum_{i=1}^{n} b_i x_i = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x_i = J(b)(x).$$
On a donc $J(b) = l$. On a montré que tout élément $l \in (h^1)'$ admet un antécédent b tel que $\|b\| \leqslant \|l\|$. Comme $\|J\| \leqslant 1$, on conclut que J est une isométrie surjective. $\square$

Revenons maintenant à l'étude des duaux d'espaces de Banach.

Théorème 6. *Pour tout $p \in [1, \infty)$, le dual de l^p est l^q, avec $1/p + 1/q = 1$. Plus précisément, l'application J qui a $a = (a_n) \in l^q$ associe la forme linéaire*
$$x = (x_n) \longmapsto \langle a, x\rangle := \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n$$
sur l^p est un isomorphisme isométrique.

Dans le cas $p = \infty$, $q = 1$, J est un plongement isométrique non surjectif.

Démonstration. On remarque d'abord au vu de l'inégalité de Hölder $\langle a, x\rangle \leqslant \|a\|_q \|x\|_p$ que J est effectivement une application de l^q dans $(l^p)'$, et de plus que $\|J\| \leqslant 1$.

Démontrons maintenant la surjectivité de J. Si l est une forme linéaire continue sur l^p, on peut lui associer la suite $a_i = l(e^i)$, où $e^i_k = \delta_{i,k}$ est la suite qui vaut 1 en i et dont tous les autres coéfficients sont nuls. On va montrer que $\|a\|_q \leqslant \|l\|$, et donc en particulier que $a \in l^q$. En admettant ce résultat, on constate, pour tout $x \in l^p$, que la suite $(a_i x_i)$ est dans l_1 (par l'inégalité de Hölder), et donc que
$$\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \longrightarrow x, \quad l(x) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i l(e_i) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i a_i = J(a)(x).$$
On conclut que $J(a) = l$, donc que $\|J(a)\| \geqslant \|a\|_q$. J est donc une isométrie (surjective).

Montrons maintenant l'inégalité $\|a\|_q \leqslant \|l\|$. Dans le cas $q = \infty$, on constate juste que $|a_i| = |l(e_i)| \leqslant \|l\|\|e_i\|_1 = \|l\|$ pour tout i, et donc $\|a_i\|_\infty \leqslant \|l\|$.

Considérons maintenant le cas $p \in]1, \infty)$, $q < \infty$. Pour tout n,
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} |a_i|^q = \sum_{i=1}^{n} a_i |a_i|^{q-2} l(e_i) = l\left(\sum_{i=1}^{n} a_i |a_i|^{q-2} e_i\right) \\ \leqslant \|l\| \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^{p(q-1)}\right)^{1/p} \leqslant \|l\| \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^{q}\right)^{q/p}.\end{aligned}$$
On en déduit que $\sum_{i=1}^{n} |a_i|^q \leqslant \|l\|^{1/q}$. Comme ceci est vrai pour tout n, on conclut que $\|a\|_q \leqslant \|l\|$. $\square$

Exercice 19. *Soit $a \in l_q, q < \infty$. En considérant la suite $b_i = a_i |a_i|^{q-2}$, montrer que $J(a)(b) = \|a\|_q \|b\|_p$. Conclure que toute forme linéaire continue sur $l^p, p \in]1, \infty[$ atteint son maximum sur la boule unité.*

Soit maintenant une suite $a \in l^\infty$ telle que $|a_i| < \|a\|_\infty$ pour tout i. Montrer que la forme linéaire $J(a)$ n'atteint pas son maximum sur la boule unité de l^1.

Théorème 7 (Hahn Banach)**.** *Soit E un espace vectoriel, F un sous-espace de E et p une fonctions convexe sur E à valeurs dans $\mathbb{R} \cup +\infty$. Si $l : F \longrightarrow \mathbb{R}$ est une forme linéaire sur F telle que $l \leqslant p_{|F}$, alors il existe une forme linéaire $\tilde{l}$ sur E qui prolonge l et telle que $\tilde{l} \leqslant p$.*

Il faut noter qu'aucune norme ni topologie n'est présente dans ce résultat, même si on l'appliquera souvent dans le cas où p est une norme ou une semi-norme. On peut aussi prendre $p \equiv +\infty$, et l'énoncé implique alors que toute forme linéaire se prolonge, ce qui est un résultat classique d'algèbre linéaire.

Démonstration. Fixons $x \notin F$, et montrons dans un premier temps que l'on peut étendre l à $F \oplus \mathbb{R}x$. Il suffit pour ceci de choisir la valeur $\alpha = \tilde{l}(x)$ et de poser $\tilde{l}(f + tx) = l(f) + t\alpha$ pour tout $x \in F$ et $t \in \mathbb{R}$. Il faut donc vérifier que l'on peut choisir α de sorte que la majoration $\tilde{l} \leqslant p$ soit satisfaite sur $F \oplus \mathbb{R}x$. Il suffit pour ceci que

$$-l(f) - \frac{p(-tf - tx)}{t} \leqslant \alpha \leqslant \frac{p(tf + tx)}{t} - l(f)$$

pour tout $t > 0$ et tout $f \in F$. Pour vérifier qu'il est possible de choisir une telle valeur de α, nous allons montrer que

$$-l(f_1) - \frac{p(-t_1 f_1 - t_1 x)}{t_1} \leqslant \alpha \leqslant \frac{p(t_2 f_2 + t_2 x)}{t_2} - l(f_2)$$

pour tous $t_1, t_2 > 0$ et tous $f_1, f_2 \in F$. On utilise pour ceci la convexité de p, en remarquant que

$$\frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2}(f_2 - f_1) = \frac{t_2}{t_1 + t_2}(-t_1 f_1 - t_1 x) + \frac{t_1}{t_1 + t_2}(t_2 f_2 + t_2 x)$$

ce qui implique que

$$\frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2} l(f_2 - f_1) \leqslant p\left(\frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2}(f_2 - f_1)\right) \leqslant \frac{t_2}{t_1 + t_2} p(-t_1 f_1 - t_1 x) + \frac{t_1}{t_1 + t_2} p(t_2 f_2 + t_2 x),$$

dont l'inégalité désirée découle directement. On a donc démontré qu'il est possible d'étendre l à $F \oplus \mathbb{R}x$. Dans le cas ou E est de dimension finie, le théorème en découle par récurrence.

Pour le cas général, on utilise le Lemme de Zorn. On considère pour ceci l'ensemble $\mathcal{G}$ des couples (G, g), où G est un sous-espace de E contenant F et g est une extension de l à G vérifiant $g \leqslant p$ sur G. On munit $\mathcal{F}$ de la relation d'ordre $\preceq$ telle que $(G_1, g_1) \preceq (G_2, g_2)$ si et seulement si $G_1 \subset G_2$ et si $g_{2|G_1} = g_1$. Si (G_i, g_i) est totalement ordonné, alors $\cup_i G_i$ est un sous-espace de E contenant F sur lequel on définit l'unique forme lineaire g telle que $g_{G_i} = g_i$. le couple (G, g) est alors un majorant de la famille (G_i, g_i). On a constaté que toute partie totalement ordonnée de $\mathcal{F}$ admet un majorant, on peut donc appliquer le lemme de Zorn qui donne l'existence d'un élément maximal (H, h). On a alors $H = E$, sinon on pourrait étendre h à un sous-espace $H \oplus \mathbb{R}x$, ce qui contredirait la maximalité. □

Certains corollaires immédiats de ce résultat seront utilisés souvent dans la suite:

Corollaire 20. *Si E est un espace vecoriel normé, F est un sous-espace de E, et l est une forme linéaire continue sur F, alors on peut étendre l en une forme linéaire continue $\tilde{l}$ sur E telle que $\|\tilde{l}\|_{E'} = \|l\|_{F'}$.*

DÉMONSTRATION. On applique le théorème de Hahn Banach avec $p(x) = \|l\|_{F'}\|x\|$. On trouve alors une extension $\tilde{l}$ telle que $\|\tilde{l}\|_{E'} \leqslant \|l\|_{F'}$. Comme pour tout $a < \|l\|_{F'}$ il existe $x \in F$ tel que $\|x\| = 1$ et $\tilde{l}(x) = l(x) \geqslant a$, on conlut que $\|\tilde{l}\|_{E'} \geqslant \|l\|_{F'}$ et donc $\|\tilde{l}\|_{E'} = \|l\|_{F'}$. □

Corollaire 21. *Soit E un espace vectoriel normé, et x un point de E. Il existe une forme linéaire non-nulle $l \in E'$ telle que $l(x) = \|l\|\|x\|$.*

DÉMONSTRATION. On pose $F = \mathbb{R}x$, et on considère sur F la forme linéaire g telle que $g(x) = \|x\|$. On a alors $g(y) \leqslant \|y\|$ pour tout $y \in F$. Par le théorème de Hahn Banach, il existe une forme linéaire l sur E, qui prolonge g (et donc telle que $l(x) = \|x\|$) et telle que $l(y) \leqslant \|y\|$ pour tout $y \in E$. On a donc $\|l\| = 1$. □

Corollaire 22. *Soit E un espace vectoriel normé, F un sous-space vectoriel fermé de E, et x un point de $E - F$. Alors il existe une forme linéaire continue l sur E telle que $l(x) \neq 0$ et $l_{|F} = 0$.*

DÉMONSTRATION. On considère la projection $\pi : E \longrightarrow E/F$. Le point $y = \pi(x)$ est non nul, donc il existe une forme linéaire continue g sur E/F telle que $g(x) \neq 0$ (on peut même avoir $g(y) = \|g\|\|y\| = \|g\|d(x, F)$). La forme linéaire $l := g \circ \pi$ convient. Elle vérifie de plus $l(x) = \|g\|d(x, F) = \|l\|d(x, F)$. □

Corollaire 23. *Soit C un convexe de E et x un point de $E - C$. Alors il existe une forme linéaire non nulle l sur E et un réel a telle que $l(x) = a$ et $l_{|C} \leqslant a$.*

Si E est un espace vectoriel normé, et si C est d'intérieur non-vide, la forme linéaire l est continue.

Si E est un espace vectoriel normé et si C est fermé, on peut trouver l continue et $b > a$ tel que $l(x) = b$ et $l_{|C} \leqslant a$.

Il faut interpréter ici que l'hyperplan affine d'équation $l = a$ sépare (au sens large) le convexe C du point x.

DÉMONSTRATION. On peut supposer que $0 \in C$. On applique alors le théorème de Hahn-Banach à la forme linéaire $l : \mathbb{R}x \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $l(x) = 1$ et à la fonction convexe p qui vaut 1 sur C et $+\infty$ hors de C.

Dans le cas où C est d'intérieur non-vide, la majoration $l \leqslant 1$ sur C implique la continuité de l.

Dans le cas où C est fermé, on pose $r = d(x, C)/2$ et on a $r > 0$. On peut remplacer C par le convexe ouvert $\tilde{C} = C + B(r)$ constitué de la réunion des boules ouvertes de rayon r centrées sur C. On trouve alors une forme linéaire continue l telle que $l(x) = b$ et $\sup_{\tilde{C}} l \leqslant b$. Comme $\sup_{\tilde{C}} l = \sup_C l + \sup_{B(r)} l \leqslant b$ et que $\sup_{B(r)} l > 0$ (sinon l serait nulle), on a $\sup_C l < b$. □

Corollaire 24. *L'application $J : l^1 \longrightarrow (l^\infty)'$ n'est pas surjective.*

DÉMONSTRATION. Soit $E \subset l^\infty$ le sous-espace des suites convergentes. La limite est une forme linéaire sur E, qui est continue pour la norme l_∞. Il existe donc une forme linéaire continue L sur l^∞ telle que $L(x) = \lim x_i$ pour toute suite convergente x_i. Montrons qu'elle n'est pas dans l'image de J. On considère, pour tout n, la suite $x^n \in l^\infty$ qui vaut 0 jusqu'au rang n et 1 ensuite. Pour chacune de ces suites, $L(x^n) = 1$. Pour tout $a \in l^1$, $J(a)(x^n) = \sum_{i=n}^{\infty} a_i$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Donc $J(a)(x^n) \neq L(x^n)$ pour n assez grand. Donc $J(a) \neq l$. □

Proposition 25. *Soit E un espace vectoriel normé. Si E' est séparable, alors E est séparable.*

Démonstration. Soit L une partie dénombrable dense dans E'. Pour chaque $l \in L$, on choisit $x_l \in E$ de norme 1 tel que $l(x_l) \geqslant \|l\|/2$ et on note V l'espace vectoriel engendré par $x_l, l \in L$. Montrons que l'espace vectoriel engendré par les x_l est dense. Si ce n'était pas le cas, il existerait une forme linéaire $g \neq 0$ dans E' telle que $g(x_l) = 0$ pour tout l. Soit alors $l \in L$ tel que $\|l - g\| \leqslant \|g\|/5$, ce qui implique que $\|g\| \leqslant 5\|l\|4$. On a

$$2\|g\|/5 \leqslant \|l\|/2 \leqslant l(x_l) = (l - g)(x_l) \leqslant \|l - g\| \leqslant \|g\|/5,$$

ce qui est une contradiction. □

Soit E un espace vectoriel normé, et soit E'' le bidual de E (qui est donc complet). On définit l'injection canonique

$$J : E \longrightarrow E''$$

par $J(x)(l) = l(x)$.

Propriété 26. *L'injection canonique est un isométrie sur son image.*

Dans le cas où E est un espace de Banach, cette image est donc fermée.
Démonstration. On a $J(x)(l) \leqslant \|l\|\|x\|$, donc $\|J(x)\| \leqslant \|x\|$. Réciproquement, pour tout $x \in E$, le théorème de Hahn-Banach donne l'existence d'un forme linéaire non-nulle $l \in E'$ telle que $l(x) = \|l\|\|x\|$. On conclut que $\|J(x)\| \geqslant \|x\|$ et donc que $\|J(x)\| = \|x\|$. □

L'adhérence de $J(E)$ dans E'' est donc un complété de E. Un espace vectoriel normé est dit réflexif si J est surjective (il est alors complet). On montrera plus tard (proposition 36) qu'un espace de Banach est reflexif si et seulement si son dual est reflexif.

Dans un espace de Banach reflexif B, toute forme linéaire atteint son maximum sur la boule unité. En effet, étant donnée $l \in B'$ le théorème de Hahn Banach donne l'existence d'un point $\omega \in B''$ tel que $\|\omega\| = 1$ et $\|\omega(l)\| = \|l\|$. Comme B est reflexif, il existe alors un point $x \in B$, avec $\|x\| = 1$, tel que $l(x) = \omega(l) = \|l\|$.

6 Projections et Supplémentaires fermés.

Tout sous-espace vectoriel E d'un espace B admet un supplémentaire algébrique, c'est à dire qu'il existe un sous espace F de B tel que $B = E \oplus F$. On note alors π_E la projection d'image E et de noyau F, et π_F la projection d'image F et de noyau E, de sorte que $\pi_F + \pi_E = Id$. Nous discutons ici l'existence d'un supplémentaire fermé. Un sous-espace est dit facteur direct si il est fermé et si il admet un supplémentaire fermé.

Propriété 27. *Soit B un espace de Banach, et soient E et F des sous-espaces fermés tels que $B = E \oplus F$. Alors*

- *L'application $(e, f) \longmapsto e + f$ est un isomorphisme de Banach entre $E \times F$ et B.*
- *Les projections π_E et π_F associées à cette décomposition sont continues.*
- *E est isomorphe à B/F, et F à B/E.*

Démonstration. L'application $(e, f) \longmapsto e + f$ est un bijection linéaire continue, donc un isomorphisme. Son inverse $b \longmapsto (\pi_E(b), \pi_F(b))$ est donc continue. L'application linéaire continue et surjective π_E se factorise en un isomorphisme entre B/F et E. □

Les projections associées à la décomposition fermée $B = E \oplus F$ du Banach B sont donc continues, on a aussi $\pi_E \circ \pi_E = \pi_E$. Réciproquement, on appelle projection continue un opérateur linéaire continu $P : B \longrightarrow B$ tel que $P \circ P = P$.

Proposition 28. *Toute projection continue P a une image fermée et $B = \ker P \oplus$ im P.*

Démonstration. Notons $E =$ im P, $F = \ker P$. Comme $(P - I)P = 0$, on a $E \subset \ker(P - I)$. De plus, Si $x = Py$ est dans F, alors $x = P \circ P(y) = P(x)$, donc $x \in \ker(P - I)$. On conclut que $F = \ker(P - I)$ est fermé. Finalement il est classique que $B = E \oplus F$. En effet, si $x \in E \cap F$, alors $P(x) = x = 0$, donc $E \cap F = 0$. De plus, tout point $x \in B$ s'écrit $x = P(x) + (I - P)(x)$, avec $P(x) \in E$ et $(I - P)(x) \in F$. □

Un sous espace est donc facteur direct si et seulement si il est l'image (ou le noyau) d'un projecteur. On a la généralisation suivante:

Proposition 29. *Le sous espace E du Banach B est facteur direct si et seulement si c'est l'image d'un opérateur inversible à gauche.*

Le sous espace E du Banach B est facteur direct si et seulement si c'est le noyau d'un opérateur inversible à droite.

Démonstration. Soit $L \in \mathcal{L}(B', B)$ un opérateur inversible à gauche, c'est à dire qu'il existe $G \in \mathcal{L}(B, B')$ tel que $GL = I$. On a alors

$$\text{im } LG \subset \text{im } L = \text{im } LGL \subset \text{im } LG$$

et donc im $L =$ im LG, et on vérifie que LG est un projecteur.

De la même façon, si $LG = I$, alors

$$\ker GL \subset \ker LGL = \ker L \subset \ker GL$$

donc $\ker GL = \ker L$, et GL est un projecteur. □

Proposition 30. *Tout sous-espace de dimension finie d'un Banach est facteur direct.*

Tout sous-espace fermé de codimension finie d'un Banach est facteur direct.

Tout sous-espace fermé d'un espace de Hilbert H est facteur direct.

Démonstration. On commence par constater qu'un sous-espace de dimension finie est complet donc fermé.

Tout sous-espace de codimension finie admet un supplémentaire de dimension finie, qui est donc fermé. Un sous-espace de codimension finie est donc facteur direct.

Considérons maintenant un sous-espace $E \subset B$ de dimension n. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $(l_1, \cdots, l_n)$ la base duale. Par le théorème de Hahn Banach, on peut étendre les formes linéaires l_i en des formes linéaires $g_i \in B'$. On considère alors l'application

$$P(x) = l_1(x)e_1 + \cdots + l_n(x)e_n.$$

C'est un projecteur continu d'image E, donc E est facteur direct.

Dans un espace de Hilbert, on a vu que l'orthogonal $F^\perp$ du sous-espace fermé F en est un supplémentaire fermé. □

7 Relations d'orthogonalité

Si $X \subset H$ est un partie de l'espace de Hilbert H, on a défini

$$X^{\perp} := \{h \in H : (h, x) = 0 \; \forall x \in X\}.$$

$X^{\perp}$ est un sous-espace fermé de H.

Dans le cas général des espaces vectoriels normés, on note plutot

$$X^{\perp} := \{l \in E' : l(x) = 0 \; \forall x \in X\} \subset E',$$

pour toute partie X de B, et, symétriquement

$$Y^{\circ} := \{x \in E : y(x) = 0 \; \forall y \in Y\} \subset E.$$

pour tout $Y \subset E'$. On peut bien sur aussi définir $Y^{\perp}$, qui est une partie de E''. Lorsque E est reflexif, Y° et $Y^{\perp}$ s'identifient.

Propriété 31. *Soit E un espace vectoriel normé. Pour toute partie $X \subset E$, $Y \subset E'$, $X^{\perp}$ et Y° sont des sous-espaces vectoriels fermés de E' et E. On a*

$$\overline{Vect(X)} = X^{\perp\circ}$$

pour toute partie $X \subset E$, mais l'inclusion

$$\overline{Vect(Y)} \subset Y^{\circ\perp}$$

n'est pas forcément une égalité pour $Y \subset E'$.

Démonstration. Les ensembles $X^{\perp}$ et Y° sont définis comme intersections d'hyperplans fermés, ce sont donc des sous espaces fermés.

Pour tout $x \in X$ et $l \in X^{\perp}$, on a $l(x) = 0$, donc $x \in X^{\perp\circ}$. On a donc $X \subset X^{\perp\circ}$, et, comme $X^{\perp\circ}$ est un sous-espace fermé, $\overline{Vect(X)} \subset X^{\perp\circ}$. La preuve de l'inclusion $\overline{Vect(Y)} \subset Y^{\circ\perp}$ est similaire.

Finallement, pour prouver l'égalité, on utilise le corollaire 22 du théorème de Hahn-Banach. Pour tout $x \in E - \overline{Vect(X)}$, il existe une forme linéaire $l \in E'$ nulle sur X et non-nulle en x. Cette forme est alors un élément de $X^{\perp}$, et donc $x \notin X^{\perp\circ}$. □

On donne maintenant un critère très utile pour montrer que certains opérateurs sont des isomorphismes.

Théorème 8 (Lax-Milgram). *Soit B un Banach et soit $L : B' \longrightarrow B$ une application linéaire continue. Si il existe $a > 0$ tel que*

$$l(L(l)) \geqslant a\|l\|^2 \quad \forall l \in B',$$

alors L est un isomorphisme de Banach.

Démonstration. On a $\|l\|\|L(l)\| \geqslant l(L(l)) \geqslant a\|l\|^2$, et donc $L(l) \geqslant a\|l\|$, ce qui implique que L est injective et d'image fermée. Pour montrer que L est surjective, il suffit donc de vérifier que $L(B')^{\perp} = 0$. Pour $l \in L(B')^{\perp}$, on constate que $0 = l(L(l)) \geqslant a\|l\|^2$, et donc $l = 0$. □

Les deux corollaires suivants sont immédiats, le second est l'énoncé en général appelé Théorème de Lax-Milgram.

Corollaire 32. *Soit B un Banach reflexif et soit $L : B \longrightarrow B'$ une application linéaire continue. Si il existe $a > 0$ tel que*

$$L(x)(x) \geqslant a\|l\|^2 \quad \forall l \in B',$$

alors L est un isomorphisme.

Corollaire 33. *Soit H un Hilbert et soit $L : H \longrightarrow H$ une application linéaire continue. Si il existe $a > 0$ tel que*

$$\langle L(x), x\rangle \geqslant a\|x\|^2 \quad \forall l \in E',$$

alors L est un isomorphisme.

On remarque que ce dernier corollaire étend le théorème de Riesz. Dans le cas où L est symétrique, c'est à dire que $\langle L(x), y\rangle = \langle L(y), x\rangle$ pour tous x et y dans H, il s'en déduit en considérant le produit scalaire $(x, y) := \langle L(x), y\rangle$.

8 Adjoints

L'adjoint de l'opérateur $L \in \mathcal{L}(E, F)$ est l'opérateur $L^* \in \mathcal{L}(F', E')$ défini par

$$L^*(l) = l \circ L.$$

Lorsque E et F sont des espaces pré-Hilbertiens, on identifie en général L^* à un opérateur de H, caractérisé par $\langle Lx, y\rangle = \langle x, L^*y\rangle$.

Propriété 34. $\|L^*\| = \|L\|$
Si L est inversible, alors L^* l'est aussi, et $L^{*-1} = L^{-1*}$.

Démonstration. On a $\|L^*l\| = \|l \circ L\| \leqslant \|L\|\|l\|$, donc $\|L^*\| \leqslant \|L\|$. Réciproquement, pour tout $x \in B_E$, il existe $l \in F'$, de norme 1, telle que $l(L(x)) = \|L(x)\|$ (par le théorème de Hahn Banach). On a donc

$$\|L^*\| = \sup_{\|l\|\leqslant 1, \|x\|\leqslant 1} l \circ L(x) \geqslant \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|L(x)\| = \|L\|.$$

La seconde affirmation découle du fait que $(L\circ G)^* = G^* \circ L^*$. Si G est l'inverse de L, alors on déduit des expressions $L\circ G = Id = G\circ L$ que $G^* \circ L^* = Id = L^* \circ G$, et donc que G^* est l'inverse de L^*. □

Nous allons étudier les relations entre le noyau et l'image de L et ceux de son conjugué. On commence par des remarques élémentaires:

Propriété 35. *Soient E et F des espaces vectoriels normés et soit $L \in \mathcal{L}(E, F)$. On a alors*

$$\ker L = (\textit{im } L^*)^\circ \quad , \quad \ker L^* = (\textit{im } L)^\perp \quad , \quad \overline{\textit{im } L} = (\ker L^*)^\circ \quad , \quad \overline{\textit{im } L^*} \subset (\ker L)^\perp$$

mais la dernière inclusion n'est pas nécessairement une égalité.

Démonstration. $l \in \ker L^* \Leftrightarrow L^*(l) = 0 \Leftrightarrow l(L(x)) = 0\ \forall x \in E \Leftrightarrow l \in (\text{im } L)^\perp$,
$x \in \ker L \Leftrightarrow l(L(x)) = 0\ \forall l \in F' \Leftrightarrow L^*(l)(x) = 0\ \forall l \in F' \Leftrightarrow x \in (\text{im } L^*)^\circ$.

La troisième égalité découle de la seconde puisque $\overline{\text{im } L} = (\text{im } L)^{\perp\circ}$. Finalement, l'inclusion im $L^* \perp \ker L$ est évidente. □

Proposition 36. *Un espace de Banach B est réflexif si et seulement si son dual B' est reflexif.*

DÉMONSTRATION. Soit $J : B \longrightarrow B''$ le plongement canonique de B dans B''. On considère son adjoint $J^* : B''' \longrightarrow B'$, et on considère le plongement canonique J' de B' dans B'''. On a alors $J^* \circ J'(l)(x) = J'(l)(J(x)) = J(x)(l) = l(x)$, et donc $J^* \circ J' = Id$.

Si J est un isomorphisme, alors J^* en est un aussi, et on conclut que J' en est un. L'espace B' est donc reflexif.

Si J' est un isomorphisme, alors J^* est un isomorphisme. Comme J est un isométrie, son image est fermée, et on a donc $J(B) = (\ker J^*)^\circ = B''$, donc B est réflexif. On verra aussi plus tard de manière générale qu'une applications linéaire continue dont l'adjoint est un isomorphisme est un isomorphisme (théorème 9). □

Si F est un sous-espace fermé de l'espace vectoriel normé E, il existe des isométries canoniques

$$(E/F)' \approx F^\perp \quad , \quad E'/F^\perp \approx F'.$$

Plus précisement,

Proposition 37. *Soit F un sous-espace vectoriel fermé d'un espace vectoriel normé E.*

L'adjoint π^* de la projection $\pi : E \longrightarrow E/F$ est un plongement isométrique de $(E/F)'$ dans E', d'image $F^\perp$.

L'adjoint i^* de l'inclusion $i : F \longrightarrow E$ a pour noyau $F^\perp$ et se factorise en $i^* = J \circ \Pi$, où $\Pi : E' \longrightarrow E'/F^\perp$ est la projection et où $J : E'/F^\perp \longrightarrow F'$ est une isométrie. Il est donc surjectif.

Le biadjoint $i^{**} = \Pi^* \circ J^*$ a donc pour image im $i^{**} =$ im $\Pi^* = F^{\perp\perp}$.

DÉMONSTRATION. On a $\pi^*(F') \subset (\ker \pi)^\perp = F^\perp$, et $\ker \pi^* = \pi(E)^\perp = 0$. Il suffit donc de constater que toute forme linéaire $g \in F^\perp$ s'écrit $g = l \circ \pi$ pour une forme linéaire $l \in F'$ telle que $\|l\|_{F'} = \|g\|_{E'}$, par la Proposition 15.

Concernant i^*, on note d'abord que $\ker i^* = F^\perp$. On applique à nouveau la Proposition 15 pour factoriser i^* par son noyau:

$$i^* : E' \xrightarrow{\pi} E'/F^\perp \xrightarrow{j} F',$$

avec j injective, et $\|j\| = \|i^*\| = \|i\| = 1$. Étant donné $g \in F'$, on peut prolonger g en $l \in E'$ tel que $\|l\| = \|g\|$ par le théorème de Hahn Banach. On a alors $g = i^*(l) = j(\pi(l))$. On conclut que j est un isomorphisme, et, comme $\|j^{-1}(g)\| = \|\pi(l)\| \leqslant \|l\|$, on a $\|j^{-1}\| = \|j\| = 1$, et donc j est une isométrie. □

Corollaire 38. *Si F est un sous-espace fermé de l'espace vectoriel normé E, alors*

$$\dim F^\perp = \text{codim } F \quad , \quad \text{codim } F^\perp = \dim F.$$

Proposition 39. *Tout sous-espace fermé d'un Banach réflexif est réflexif.*

DÉMONSTRATION. Soit $i : F \longrightarrow E$ l'inclusion de F dans le Banach reflexif E. Considérons le biadjoint $i^{**} : F'' \longrightarrow E''$. On a $J_E \circ i(x)(l) = l \circ J_E \circ i(x) = l(i(x)) = i^*(l)(x) = J_F(x)(i^*(l)) = i^{**}(J_F(x))(l)$ donc $J_E \circ i = i^{**} \circ J_F$. De plus, la proposition 37 implique que i^{**} est un plongement isométrique dont l'image est $F^{\perp\perp}$. On rappelle aussi que $J_E^{-1}(F^{\perp\perp}) = F^{\perp\circ} = F$.

Si E est reflexif, on a donc $F^{\perp\perp} = J_E(F)$, et im $i^{**} =$ im $(J_E \circ i) =$ im $(i^{**} \circ J_F)$. Comme i^{**} est injective, ceci implique que J_F est surjective. □

Théorème 9. *Soit $L : E \longrightarrow F$ une applications linéaires continue entre les espaces de Banach E et F. Il y a équivalence entre*

1. *$L(E)$ fermé dans F.*

2. *$L^*(F')$ fermé dans E'.*

3. *$L(E) = (kerL^*)^\circ$.*

4. *$L^*(F') = (kerL)^\perp$.*

On utilisera le

Lemme 40. *Soit $L \in \mathcal{L}(E, F)$. Si L^* est injective et d'image fermée, alors L est surjective.*

Démonstration. Comme L^* est injective et d'image fermée, il existe une constante $a > 0$ telle que $\|L^*(g)\| \geqslant a\|g\|$ pour tout $g \in F'$. On va montrer que

$$B_F(0, a) \subset \overline{L(B_E)}.$$

On a vu dans la preuve du théorème de l'application ouverte que ceci implique la surjectivité de L.

On onsidère un point $y \notin \overline{L(B_E)}$, on va chercher à minorer $\|y\|$. Comme $\overline{L(B_E)}$ est un convexe fermé, le corollaire géométrique du théorème de Hahn Banach donne l'existence d'une forme linéaire continue l sur F telle que $l(y) = 1$ et $l \leqslant 1$ sur $\overline{L(B_E)}$. Cette seconde condition implique que $\|l \circ L\| \leqslant 1$, et donc que $a\|l\| \leqslant \|l \circ L\| \leqslant 1$. La condition $l(y) = 1$ implique alors $\|y\| \geqslant a$. □

Démonstration du Théorème 9.
On a déjà vu que 1 et 3 sont équivalents, et que $4 \Rightarrow 2$.
On note N le noyau de L et R la fermeture de son image. On décompose L en $L = i \circ G \circ \pi$,

$$L : E \xrightarrow{\pi} E/N \xrightarrow{G} R \xrightarrow{i} F.$$

On obtient

$$L^* : F' \xrightarrow{i^*} R' \xrightarrow{G^*} (E/N)' \xrightarrow{\pi^*} E',$$

où i^* est surjective et π^* injective et d'image $N^\perp$. De plus $\ker G^* = (\text{im } G)^\perp = 0$ puisque im G est dense dans R.

Si L est d'image fermée, alors G est un isomorphisme, donc G^* est aussi un isomorphisme et donc $L^*(F') = \text{im } \pi^* = N^\perp$, qui est fermé. On a donc $1 \Rightarrow 2, 4$.

Si l'image de L^* est fermée, alors G^* est injective et d'image fermée, donc par le Lemme 40 G est surjective. L'image de L est donc fermée. Donc $2 \Rightarrow 1$. □

9 Opérateurs compacts, Opérateurs de Fredholm

Dans toute cette section, E et F sont des espaces de Banach. Un opérateur continu $L \in \mathcal{L}(E, F)$ est dit compact si $L(B_E)$ est relativement compacte, ou de manière équivalente, précompacte.

Propriété 41. 1. *Si L est de rang fini ($L(E)$ de dimension finie) alors il est compact.*

2. *Si L est compact et d'image fermée, alors il est de rang fini.*

3. *Si L est compact alors $L \circ G$ et $G \circ L$ le sont aussi si G est continue.*

4. *L'ensemble $\mathcal{K}(E, F) \subset \mathcal{L}(E, F)$ des opérateurs compacts est un sous-espace vectoriel fermé.*

DÉMONSTRATION. L'ensemble $L(B_E)$ est borné. Si l'image de L est de dimension finie, il est donc relativement compact.

Soit maintenant $L : E \longrightarrow F$ compacte et $G \in \mathcal{L}(F, B)$. Alors $G \circ L(B_E) = G(L(B_E)) \subset G(\overline{L(B_E)})$. Comme G est continue, l'image $G(\overline{L(B_E)})$ du compact $\overline{L(B_E)}$ est compacte, donc $G \circ L(B_E)$ est relativement compact.

Si $G \in \mathcal{L}(B, E)$, alors $L \circ G(B_B) \subset L(\|G\| B_E) \subset \|G\| \overline{L(B_E)}$, donc $L \circ G(B_B)$ est relativement compact.

Pour montrer que $L + G$ est compact si L et G le sont, on écrit $L + G = s \circ (L, G)$, où $s : F^2 \ni (x, y) \longmapsto x + y \in F$. Il suffit alors de constater que (L, G) est compacte car $(L, G)(B_E) \subset L(B_E) \times G(B_E)$, et d'appliquer le point 3. On en déduit que $\mathcal{K}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel.

Considérons L dans la fermeture de $\mathcal{K}(E, F)$, et montrons que $L(B_E)$ est précompact. On fixe $\epsilon > 0$, et on considère $G \in \mathcal{K}(E, F)$ tel que $\|L - G\| \leqslant \epsilon/2$. Comme $G(B_E)$ est précompact, il est recouvert par un nombre fini de boules de rayon $\epsilon/2$. Mais alors les boules de mêmes centres et de rayon ϵ recouvrent $L(B_E)$ puisque $\|y - L(x)\| \leqslant \|y - G(x)\| + \|G - L\|$ pour tout $x \in B_E$. L'image $L(B_E)$ est donc précompacte, donc $L \in \mathcal{K}(E, F)$.

□

Proposition 42. *Soient E et F des espaces de Banach. L'operateur $L \in \mathcal{L}(E, F)$ est compact si et seulement si son conjugué L^* est compact.*

DÉMONSTRATION. Soit L un opérateur compact, et soit $K = \overline{L(B_E)}$. Soit i l'application de F' dans $C(B, \mathbb{R})$ consistant à restreindre à K. On remarque que $\|i(l)\| = \|L^*(l)\|$ pour tout $l \in F'$. En effet $\|i(l)\| = \sup_{y \in K} |l(y)| = \sup_{y \in L(B_E)} |l(y)| = \sup_{x \in B_E} |l \circ L(x)| = \|l \circ L\| = \|L^*(l)\|$.

En particulier, ces deux applications ont le même noyau $N \subset F'$. On peut donc les factoriser toutes les deux par $\pi : F' \longrightarrow F'/K$ en $i = I \circ \pi$ et $L^* = G \circ \pi$. De plus, l'application $J := I \circ G^{-1} : L^*(F') \longrightarrow C(K, \mathbb{R})$ est un plongement isométrique.

Les espaces $i(B_{F'})$ et $L^*(B_{F'})$ sont donc isométriques. Les éléments f de $i(B_{F'})$ sont des restrictions de formes linéares de norme 1, ils sont donc 1-Lipschitz, et vérifient de plus la borne $|f(x)| = |f(x) - f(0)| \leqslant \|x\| \leqslant \|L\|$ pour tout $x \in K$. Par le théorème d'Ascoli, $i(B_{F'})$ est donc précompact, et donc $L^*(B_{F'})$ aussi.

Si L^* est compact, alors L^{**} l'est aussi, et donc l'application $L = L^{**}_{|E}$ l'est aussi. □

Avant de continuer, il est utile de définir les operateurs de Fredholm.

Definition 43. *L'operateur $L \in \mathcal{L}(E, F)$ est un operateur de Fredholm si*

- $\ker(L)$ *est de dimension finie* $\alpha(L)$.
- $L(E)$ *est fermé et de codimension finie* $\beta(L)$.

L'indice de L est alors l'entier $i(L) = \alpha(L) - \beta(L)$.

Théorème 10. *Si $K \in \mathcal{K}(E, E)$, alors $I - K$ est un operateur de Fredholm d'indice nul.*

La démonstration de ce résultat important s'effectue en plusieurs étapes. On commence par un Lemme qui motive l'introduction des opérateurs de Freholm.

Lemme 44. *Si $K \in \mathcal{K}(E, E)$, alors $I - K$ est un opérateur de Fredholm.*

DÉMONSTRATION. Soit $N = \ker(I - K)$. On a $B_N = K(B_N) \subset K(B_E)$. Donc B_N est compacte, donc N est de dimension finie.

Montrons que $R = (I-K)(E)$ est fermé. On considère pour ceci un supplémentaire fermé E_1 de $\ker K$ dans E. L'image $L(E) = L(E_1)$ est fermée si et seulement si il existe $a > 0$ telle que $\|(I-K)(x)\| \geqslant a\|x\|$ pour tout $x \in E_1$. Si ce n'était pas le cas, il existerait une suite x_n telle que $\|x_n\| = 1$ et telle que $\|(I-K)(x_n)\| \longrightarrow 0$. Comme K est compact, on peut de plus supposer que la suite $K(x_n)$ converge vers y dans E. On a alors $x_n \longrightarrow y$, et donc $y = K(y)$, c'est à dire que $y \in N \cap E_1$, et donc $y = 0$, ce qui contredit l'hypothèse $\|x_n\| = 1$.

Comme K^* est compact, $\ker(I-K^*)$ est aussi de dimension finie, et comme $\ker(I-K^*) = ((I-K)(E))^{\perp}$, on conclut que $(I-K)(E)$ est de codimension finie (égale à la dimension de $\ker(I-K^*)$) . □

Lemme 45. *Si L est Fredholm, alors son adjoint L^* l'est aussi et $i(L^*) = -i(L)$.*

Démonstration. Notons N, N^*, R, R^* les noyaux et images de L et L^*. Comme R est fermé, R^* l'est aussi, et on a $N^* = R^{\perp}$ et $R^* = N^{\perp}$. Ceci implique que $\dim N^* =$ codim R, et que codim $R^* = \dim N$. □

La caractérisation suivante des opérateurs de Fredholm sera utilisée à plusieurs reprises:

Proposition 46. *L'opérateur L est Fredholm si et seulement si il existe un sous-espace $E_1 \subset E$ de codimension finie k, et une projection continue P de corang fini c tels que $P \circ L_{|E_1}$ est un isomorphisme. On a alors $i(L) = k - c$.*

Démonstration. Si L est Fredholm, on peut prendre un supplémentaire fermé de son noyau et une projection sur son image. Réciproquement, on considère un supplémentaire fermé G de E_1 dans E, et on note F_1 l'image de P et N son noyau (qui est de dimension c). On a donc

$$E = E_1 \oplus G \quad , \quad F = F_1 \oplus N.$$

On décompose L par blocs $A \in \mathcal{L}(E_1, F_1), B \in \mathcal{L}(G, F_1), C \in \mathcal{L}(E_1, N), D \in \mathcal{L}(G, N)$, où $A = P \circ L_{|E_1}$ est un isomorphisme, $B = P \circ L_{|G}$, $C = (I-P) \circ L_{|E_1}$, $D = (I-P) \circ L_{|G}$. L'élément $x = e + g$ est dans le noyau de L si et seulement si

$$Ae + Bg = 0 \quad , \quad Ce + Dg = 0$$

ce qui est équivalent à

$$e = -A^{-1}Bg \quad , \quad (D - CA^{-1}B)g = 0.$$

Le noyau de L est donc de la même dimension que le noyau de la matrice

$$M = D - CA^{-1}B : G \longrightarrow N.$$

L'élément $y = Py + (I-P)y$ de F est dans l'image de L si et seulement si il existe $x = e + g$ tel que

$$Ae + Bg = Py \quad , \quad Ce + Dg = (I-P)y$$

ce qui est équivalent (toujours en notant $M = D - CA^{-1}B$) à

$$e = A^{-1}Py - A^{-1}Bg \quad , \quad Mg = (I - P - CA^{-1}P)y.$$

L'image de L est donc la préimage de $M(G)$ par l'application linéaire continue

$$\Pi = I - P - CA^{-1}P : F \longrightarrow N.$$

On constate que cette application linéaire fixe son image N, c'est donc une projection sur N. L'image de L est donc fermée, et sa codimension dans F est égale à celle de $M(G)$ dans F_1, c'est donc

$$\beta(L) = \text{codim } L(E) = \dim F_1 - \dim G + \dim \ker(M) = \alpha(L) + \dim F_1 - \dim G.$$

On conclut que $i(L) = \dim G - \dim F_1$. $\square$

On rappelle l'important :

Théorème 11. *Soit $L \in \mathcal{L}(E, F)$ un isomorpisme et $G \in \mathcal{L}(E, F)$. Si $\|G\| < \|L^{-1}\|^{-1}$, alors $L - G$ est un isomorphisme, et*

$$\|L - G\|^{-1} \leqslant \frac{\|L^{-1}\|}{1 - \|L^{-1}\|\|G\|}.$$

Démonstration. En écrivant $L - G = L(I - L^{-1}G)$, on se ramène au cas où $E = F$, $L = I$, et $\|G\| < 1$. Dans ce cas, puisque $\|G^n\| \leqslant \|G\|^n$, la série $\sum_{i \geqslant 0} G^i$ est convergente dans le Banach $\mathcal{L}(E, E)$. Comme

$$(I - G) \sum_{i=0}^{n} G^i = (\sum_{i=0}^{n} G^i)(I - G) = I - G^{n+1}$$

on conclut à la limite que $\sum_{i \geqslant 0} G^i$ est l'inverse de $I - G$. Finalement, on a

$$\|(I - G)^{-1}\| \leqslant \| \sum_{i \geqslant 0} G^i\| \leqslant \sum_{i \geqslant 0} \|G^i\| = (1 - \|G\|)^{-1}.$$

$\square$

Théorème 12. *L'ensemble $\Phi(E, F)$ des opérateurs Fredholms est ouvert dans $\mathcal{L}(E, F)$, et l'indice est localement constant sur $\Phi(E, F)$.*

Démonstration. Soient N et R le noyau et l'image de L. Soient E_1 et F_1 des supplémentaires fermés de ces espaces, et soit P la projection sur R parallèlement à F_1. Si G est proche de L, alors $P \circ G_{|N}$ est proche de $P \circ L_{|N}$, et c'est donc un isomorphisme. On conclut par la proposition 46. $\square$

Le théorème 10 est un cas particulier du résultat suivant:

Théorème 13. *Si L est Fredholm et K compact, alors $L + K$ est Fredholm et $i(L + K) = i(L)$.*

Démonstration. Montrons pour commencer que $L + K$ est Fredholm.

Dans le cas où L est un isomorphisme, on écrit $L + K = L(I + L^{-1}K)$ et on conclut par le lemme 44. Dans le cas général, on considère un supplémentaire E_1 du noyau de L dans E et une projection P sur $L(E)$. L'opérateur $A \in \mathcal{L}(E_1, R)$ défini par

$$A = P \circ (L + K)_{|E_1} = P \circ L_{|E_1} + P \circ K_{|E_1},$$

est la somme d'un isomorphisme et d'un opérateur compact, il est donc Fredholm. Soit E_2 un supplémentaire du noyau de A, et π une projection sur son image. L'operateur

$$\pi \circ A_{|E_2} = (\pi \circ P) \circ (L + K)_{|E_2}$$

est alors un isomorphisme, et $\pi \circ P$ est un projecteur de corang fini. On conclut par la proposition 46 que G est Fredholm.

Pour vérifier que $i(L+K) = i(L)$, on considère la famille d'opérateurs $L + aK, a \in \mathbb{R}$. Ces opérateurs sont tous Fredholm (car aK est compact), et ils ont tous le même indice, celui de L, par le Théorème 12. □

On remarque, pour $K \in \mathcal{K}(E, E)$, l'égalité

$$\dim \ker(I - K) = \dim \ker(I - K^*) = \text{codim}(I - K)(E) = \text{codim}(I - K^*)(E').$$

Étant donné un opérateur $L \in \mathcal{L}(E, E)$ on appelle spectre de L l'ensemble des valeurs propres de L, qui sont les réels (ou les complexes) λ tels que $\lambda I - K$ n'est pas un isomorphisme. Le théorème 11 implique que le spectre de L est compact.

Théorème 14. *Si L est compact, le spectre de L est la réunion de 0 et d'une suite tendant vers 0 (qui peut n'avoir qu'un nombre fini de termes non-nuls).*

Démonstration. Si la conclusion du théorème était fausse, il existerait une suite λ_n de valeurs propres deux a deux distinctes telles que $\lambda_n > a > 0$. Les espaces propres $\ker(L - \lambda_n I)$ sont alors de dimension positive et finie, puisque $L - \lambda_n I = \lambda_n(L/\lambda_n - I)$ est Fredholm d'indice 0. On pose alors

$$E_n = \ker(L - \lambda_1 I) \oplus \ker(L - \lambda_2 I) \oplus \cdots \oplus \ker(L - \lambda_n I).$$

On a donc $E_n \subsetneq E_{n+1}$, et $(L - \lambda_n I)(E_n) \subset E_{n-1}$. Il existe une suite $x_n \in E_n$ telle que $\|x_n\| = 1$ et $d(x_n, E_{n-1}) \geqslant 1/2$, et de plus

$$(L - \lambda_n I)x_n \in E_{n-1}.$$

Alors, pour $n > m \geqslant 1$, on a $Lx_n - Lx_m = \lambda_n x_n + z_n$ avec $z_n \in E_{n-1}$. Comme $d(x_n, E_{n-1}) \geqslant 1/2$ on en déduit que

$$\|Lx_n - Lx_m\| \geqslant \lambda_n/2 \geqslant a/2.$$

Ceci contredit la compacité de L. □

Finissions par une propriété naturelle des opérateurs de Fredholm:

Propriété 47. *Si L et G sont Fredholm, alors $L \circ G$ l'est aussi, et $i(L \circ G) = i(L) + i(G)$.*

Démonstration. Considérons dans un premier temps le cas où im $G \cap \ker L = 0$. On a alors $\ker(L \circ G) = \ker G$, et donc $\alpha(L \circ G) = \alpha(G)$. De plus, il existe un supplémentaire fermé H de $\ker L$ contenant im G. La restriction de L à H est un isomorphisme sur son image im L. Le sous-espace $L(\text{im } G) = L_H(\text{im } G)$ est donc fermé, et sa codimension dans im L est égale à la codimension de im G dans H, c'est à dire à $\beta(G) - \alpha(L)$. La codimension de im $(L \circ G)$ est donc $\beta(L \circ G) = \beta(G) - \alpha(L) + \beta(L)$. Finalement, on a $i(L \circ G) = \alpha(L \circ G) - \beta(L \circ G) = \alpha(G) + \alpha(L) - \beta(G) - \beta(L) = i(L) + i(G)$.

Pour réduire le cas général au cas où im $G \cap \ker L = 0$, on utilise le Lemme ci-dessous: il existe un opérateur K de rang fini tel que im $(G + K) \cap \ker L = 0$. Comme $G + K$ est fredholm d'indice $i(G)$, on déduit que $L \circ (G + K) = L \circ G + L \circ K$ est Fredholm d'indice $i(L) + i(G)$. Comme $L \circ K$ est compact, on conclut que $L \circ G$ est Fredholm d'indice $i(G) + i(L)$. □

Lemme 48. *Si $L \in \Phi(E, F)$ et $N \subset F$ est de dimension finie, alors il existe un opérateur K de rang fini tel que im $(L + K) \cap N = 0$.*

Démonstration. Soit $I =$ im $L \cap N$, soit R un supplémentaire fermé de I dans im L, et soit E_1 un supplémentaire fermé de $\ker L$. L'opérateur L engendre un isomorphisme A entre E_1 et im $L = I \oplus R$.

Posons $K = L \circ P$, où P est la projection d'image $A^{-1}(I)$ et de noyau $\ker L \oplus A^{-1}(R)$. Comme I est de dimension finie, K est de rang fini. On a $L - K = L(I - P) = LQ$, où Q est la projection sur $\ker L \oplus A^{-1}(R)$ de noyau $A^{-1}(I)$. On a im $LQ = R$. □

10 Opérateurs symétriques compacts

On travaille ici dans un espace de Hilbert H. Une application linéaire continue $L : H \longrightarrow H$ est dite symétrique si $\langle L(x), y\rangle = \langle x, L(y)\rangle$ pour tous x et y dans H. En fait, la continuité est une conséquence de la symétrie. En effet, si L est symétrique, son graphe est fermé, donc L est continue. Pour montrer que le graphe de L est fermé, on considère une suite $x_n \longrightarrow x$ dans H, telle que $L(x_n) \longrightarrow y$. Comme L est symétrique, on a

$$\langle y - L(x), z\rangle = \lim\langle L(x_n), z\rangle - \langle x, L(z)\rangle = \lim\langle x_n - x, L(z)\rangle = 0$$

pour tout $z \in H$, et donc $y = L(x)$, ce qui implique que le graphe de L est fermé. En identifiant H à son dual, L est symétrique si et seulement si $L = L^*$. On parle donc aussi d'opérateur autoadjoint.

Théorème 15. *Soit $L : H \longrightarrow H$ un opérateur autoadjoint compact. Alors il existe une base orthonormée de H constituée de vecteurs propres de L.*

Démonstration. Appelons valeurs propres de L les réels λ tels que $L - \lambda I$ n'est pas un isomorphisme de Banach. A chaque valeur propre λ, on associe son espace propre $\ker(L - \lambda I)$, qui est de dimension positive et, pour $\lambda \neq 0$, finie. Le lemme suivant implique qu'on obtient une famille orthonormée dans H en prenant l'union de bases orthonormées des espaces propres.

Lemme 49. *Deux espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.*

Démonstration. On pose $F = \ker(L - \lambda I)$, $F' = \ker(L - \lambda' I)$, on suppose que $\lambda \neq \lambda'$, et on suppose de plus que $\lambda \neq 0$ (sinon, on inverse λ et λ'). Pour $f \in F, f' \in F'$, on a

$$\langle f, f'\rangle = \lambda^{-1}\langle Lf, f'\rangle = \lambda^{-1}\langle f, Lf'\rangle = \frac{\lambda'}{\lambda}\langle f, f'\rangle,$$

donc $\langle f, f'\rangle = 0$. $\square$

Soit e_α la famille orthonormée obtenue comme union des bases orthonormées des espaces propres. Il nous reste à montrer qu'elle engendre un sous-espace dense. On note E l'espace vectoriel engendré par les e_α. Comme E est engendré par des vecteurs propres, il est stable bar L, $L(E) \subset E$. Pour $h \perp E$, on a $\langle Lh, x\rangle = \langle h, Lx\rangle = 0$ pour tout $x \in E$, donc $L(h) \perp E$. La restriction $\tilde{L}$ de L à $E^\perp$ est une application linéaire continue compacte et symétrique de l'espace de Hilbert $E^\perp$. Au vu de la proposition ci-dessous, $\tilde{L}$ admet une valeur propre (et donc un vecteur propre f) si $E^\perp$ est non nul. Mais alors f est aussi un vecteur propre de L, donc il est contenu dans l'adhérence de E, ce qui est en contradiction avec le fait que $f \perp E$. On conclut que $E^\perp$ est nul, et donc que E est dense. $\square$

Proposition 50. *Étant donnée une application linéaire compacte symétrique L de l'espace de Hilbert H (non réduit à 0), on pose*

$$m = \inf_B \langle Lx, x\rangle \quad , \quad M = \inf_B \langle Lx, x\rangle,$$

où B est la boule unité de H. Le spectre de L est contenu dans $[m, M]$, il contient $\{m, M\}$. En particulier, il n'est pas vide.

Démonstration. Soit x un vecteur propre unitaire de valeur propre λ. Alors $\lambda = \langle Lx, x\rangle \in [m, M]$.

Réciproquement, montrons que M est valeur propre. La preuve pour m est identique. On constate que l'opérateur symétrique $MI - L$ est positif, donc, par le Lemme ci-dessous,

$$\|Mx - Lx\|^2 \leqslant \|MI - L\|\langle Mx - Lx, x\rangle.$$

En considérant une suite x_n telle que $\|x_n\| = 1$ et $\langle Lx_n, x_n\rangle \longrightarrow M$, on voit que $\langle Mx_n - Lx_n, x_n\rangle \longrightarrow 0$ et donc $(MI - L)x_n \longrightarrow 0$. Ceci implique que $MI - L$ n'est pas un isomorphisme de Banach, et donc que M est une valeur propre de L. □

Lemme 51. *Si A est un opérateur symétrique positif (c'est à dire que $\langle Ax, x\rangle \geqslant 0$ pour tout x), alors $\|A\|A - A^2$ est aussi un opérateur symétrique positif, c'est à dire que*

$$\|Ax\|^2 \leqslant \|A\|\langle Ax, x\rangle$$

pour tout x.

DÉMONSTRATION. On considère d'abord le cas où A est strictement positif, c'est à dire que $\langle Ax, y\rangle$ est un produit scalaire. On applique alors l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour ce produit scalaire,

$$\langle Ax, y\rangle^2 \leqslant \langle Ax, x\rangle\langle Ay, y\rangle.$$

L'inégalitée désirée s'obtient en prenant le supremum sur les y de norme 1.

Si A n'est pas strictement positive, on applique ce qui précède à $A + \epsilon I$, $\epsilon > 0$ et on passe à la limite $\epsilon \longrightarrow 0$. □