Partiel, 2h

Sans document, téléphone, ordinateur ou calculatrice.

Exercice 1. Montrer qu'un espace localement compact vérifie la propriété de Baire: Une intersection dénombrable d'ouverts denses est dense.

$\mathbb{Q}$ est-il localement compact?

Exercice 2. Soit X un espace localement compact connexe. Montrer que X est compact ssi son compactifié d'Alexandroff n'est pas connexe.

Exercice 3. Soit X un espace localement compact, et soit x_n une suite de X. Montrer l'équivalence entre :

-La suite x_n n'a pas de valeur d'adherence dans X.

-La suite x_n tend vers le point ∞ dans le compactifié d'Alexandroff.

Exercice 4. Contenait une erreur.

Exercice 5. Soit (X, d) un espace métrique compact. On dit que $f : X \to X$ est une isométrie si c'est un homéomorphisme qui préserve les distances. On dit que la partie $\{x_1, \cdots, x_N\} \subset X$ est ϵ-séparée si $d(x_i, x_j) \geq \epsilon$ pour $i \neq j$; on dit qu'elle est ϵ-dense si $X = \cup_{i=1}^N \bar{B}(x_i, \epsilon)$.

Soit $f : X \to X$ une application qui augmente les distances, $d(f(x), f(y)) \geq d(x, y)$. On veut montrer que f est une isométrie. On considère aussi une application $g : X \to X$ surjective et 1-Lipschitz.

1. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe une partie ϵ-dense $\{x_1, \cdots, x_N\}$ qui minimise la distance totale
$$D(x_1, \ldots, x_N) = \sum_{i,j} d(x_i, x_j)$$
parmi toutes les parties ϵ-denses de cardinal N. Montrer qu'on a alors $d(g(x_i), g(x_j)) = d(x_i, x_j) \forall i, j$.

2. Montrer que g est une isométrie.

3. Soit $M(\epsilon)$ le cardinal maximal d'une partie ϵ-séparée. Montrer que $M(\epsilon)$ est fini pour tout $\epsilon > 0$, et que toute partie ϵ-séparée de cardinal $M(\epsilon)$ est ϵ-dense.

4. Montrer que l'image de f est dense dans X, conclure.

Exercice 6. Soit X un espace topologique compact.

a- On dit que X est totalement discontinu si les composantes connexes de X sont ses points, c'est à dire si toute partie connexe de X est un point.

On dit que les points x_0 et x_1 de X peuvent être détachés si il existe une décomposition $X = X_0 \cup X_1$, en deux fermés disjoints tels que $x_0 \in X_0$ et $x_1 \in X_1$.

b- On dit que X est éclaté si on peut détacher tous points $x_0 \neq x_1$.

c- On dit que X est de dimension 0 si tout point de X admet une base de voisinages ouverts et fermés.

On va montrer que les propriétés a,b et c sont équivalentes.

1. Montrer que $c \Rightarrow b \Rightarrow a$.

2. Montrer que, si $Y \subset X$ est un compact tel que chaque point de Y est détaché de x, alors Y est détaché de x, c'est à dire qu'il existe une partition de X en deux fermés disjoints X_0 et X_1 tels que $x \in X_0$ et $Y \subset X_1$.

3. Montrer que $b \Rightarrow c$.

4. Soit $M(x)$ l'ensemble des points de X qui ne peuvent être détachés de x. Montrer que $M(x)$ est fermé. Montrer que $M(x)$ est connexe. Montrer que $a \Rightarrow b$.