FIMFA ENS Ulm Lundi 28 janvier 2008 Durée : 3 heures

Examen de topologie, analyse et calcul différentiel

Documents et calculatrices interdits

Les exercices et le problème sont deux à deux indépendants.

Exercice I (1) Soit X un espace topologique. On définit une relation $\mathcal{R}$ sur X par $x \,\mathcal{R}\, y$ si et seulement si pour tout espace topologique séparé Y et pour toute application continue $f : X \to Y$, on a $f(x) = f(y)$. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

On note $X_{\rm sep}$ l'espace topologique quotient $X/\mathcal{R}$, et $\pi_X : X \to X_{\rm sep}$ la projection canonique.

(i) Montrer que si Z est un espace topologique séparé et si $g : X \to Z$ est une application continue, alors il existe une unique application continue $g_{\rm sep} : X_{\rm sep} \to Z$ telle que $g_{\rm sep} \circ \pi_X = g$.

(ii) Montrer que $X_{\rm sep}$ est séparé.

(iii) Montrer que si de tout recouvrement ouvert de X, on peut extraire un sous-recouvrement fini, alors $X_{\rm sep}$ est compact.

(iv) Montrer que X est connexe si et seulement si $X_{\rm sep}$ est connexe.

(2) Soient G un groupe topologique séparé, H un sous-groupe de G, et $\overline{H}$ l'adhérence de H dans G. Notons $p_H : G \to G/H$ et $p_{\overline{H}} : G \to G/\,\overline{H}$ les projections canoniques. Montrer qu'il existe un homéomorphisme $\phi : (G/H)_{\rm sep} \to (G/\,\overline{H})$ tel que $\phi \circ \pi_{G/H} \circ p_H = p_{\overline{H}}$.

(3) Dans l'espace euclidien usuel $\mathbb{R}^3$, on note Ox, Oy, Oz les axes de coordonnées usuelles, r_x, r_y les rotations d'axes Ox, Oy et d'angles égaux à 1 (modulo 2π), et Γ_x, Γ_{xy} les sous-groupes du groupe $\mathrm{SO}(3)$ des rotations de $\mathbb{R}^3$ engendrés respectivement par les parties $\{r_x\}$ et $\{r_x, r_y\}$.

(i) Montrer que Γ_{xy} est un sous-groupe dense du groupe topologique $\mathrm{SO}(3)$.

(ii) Déterminer (à homéomorphisme près) les espaces topologiques $(\mathrm{SO}(3)/\Gamma_{xy})_{\rm sep}$ et $(\mathrm{SO}(3)/\Gamma_x)_{\rm sep}$.

Exercice II Soient E un espace de Hilbert réel et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de E. Notons A (respectivement B) le plus petit sous-espace vectoriel fermé contenant l'ensemble $\{a_n = e_{2n} \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ (respectivement $\{b_n = e_{2n} + \frac{1}{n+1}\, e_{2n+1} \ : \ n \in \mathbb{N}\}$).

(1) Montrer que A et B, munis de la restriction du produit scalaire de E, sont des espaces de Hilbert, dont on déterminera une base hilbertienne. En déduire que $A \cap B = \{0\}$.

(2) Montrer que l'application de l'espace de Banach produit $A \times B$ dans E définie par $(x, y) \mapsto x + y$ n'est pas un homéomorphisme sur son image $A + B$ (regarder $b_n - a_n$).

(3) Montrer que $A + B$ est un sous-espace vectoriel dense dans E, mais qu'il n'est pas fermé.

Problème Soit E un espace de Banach réel.

(I) Soient v un vecteur de E non nul, et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E tel que $F \cap \mathbb{R}v = \{0\}$.

Montrer qu'il existe un hyperplan fermé H de E supplémentaire à $\mathbb{R}v$, et contenant F. Montrer que l'application de l'espace de Banach produit $\mathbb{R} \times H$ dans E, qui à (t, x) associe $tv + x$, est un homéomorphisme.

Dans la suite du problème, U est un ouvert de E et $X : U \to E$ est une application de classe C^∞. Pour tout x dans U, nous notons $t \mapsto \varphi^t(x)$ (et $t \mapsto \varphi^t_X(x)$ lorsqu'il faut préciser X) la solution maximale de l'équation différentielle $z' = X(z)$ valant x à l'instant $t = 0$.

(II) (1) Soient V un ouvert d'un espace de Banach F, $f : V \to U$ une application C^∞ telle que pour tout y dans V, l'application $df_y : F \to E$ soit une bijection. Notons $f^*X : V \to F$ l'application définie par

$$\forall\, y \in V, \quad f^*X(y) = (df_y)^{-1}\Big(X\big(f(y)\big)\Big)\ .$$

(i) Montrer que f^*X est de classe C^∞.

(ii) Pour tout y dans V, montrer que l'application $t \mapsto f \circ \varphi^t_{f^*X}(y)$ est une solution de l'équation différentielle $z' = X(z)$ valant $x = f(y)$ à l'instant $t = 0$.

(2) Soit $a \in U$ tel que $X(a) \neq 0$.

(i) Si H est un hyperplan fermé de E supplémentaire à $\mathbb{R}X(a)$, montrer que l'application f de l'espace de Banach produit $\mathbb{R} \times H$ dans E définie par $(\lambda, x) \mapsto \lambda X(a) + x + a$ est un C^∞-difféomorphisme, tel que si $Y = f^*X : f^{-1}(U) \to \mathbb{R} \times H$, alors $Y(0,0) = (1,0)$.

(ii) Montrer qu'il existe des voisinages ouverts W, W' de $(0,0)$ dans $\mathbb{R} \times H$ tels que l'application $\Phi : W \to W'$ définie par $(t, x) \mapsto \varphi^t_Y(0, x)$ soit un C^∞-difféomorphisme tel que $d\Phi_{(0,0)}$ soit l'identité de $\mathbb{R} \times H$ et Φ^*Y soit l'application constante valant $(1,0)$.

(3) Dans toute la suite de ce problème, nous supposons que $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ et que E est l'espace vectoriel euclidien usuel $\mathbb{R}^n$. Soit $a \in U$ tel que $X(a) = 0$. Soit $L : U \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1 telle que a soit un minimum strict de L (i.e. $L(x) > L(a)$ pour tout $x \in U - \{a\}$), et $dL_x(X(x)) \leq 0$ pour tout x dans U. Soit $r > 0$ tel que la boule fermée B de centre a et de rayon r soit contenue dans U.

(i) Montrer que $dL_a = 0$.

(ii) Montrer que $\big\{V_s = B \cap L^{-1}(]-\infty, s]) \ :\ s > L(a)\big\}$ est un système fondamental de voisinages compacts de a dans E.

(iii) Montrer que si $m = \inf_{x \in S(a,r)} L(x)$, alors $m > L(a)$ et que pour tout $s \in\,]L(a), m[$, pour tout x dans V_s, pour tout t dans $[0, +\infty[$, le point $\varphi^t(x)$ existe et appartient à V_s.

(iv) Supposons de plus que $dL_x(X(x)) < 0$ pour tout x dans $U - \{a\}$. Montrer qu'il existe alors un voisinage W de a dans E tel que pour tout x dans W,

$$\lim_{t \to +\infty} \varphi^t(x) = a\ .$$