FIMFA ENS Ulm — Mardi 27 janvier 2009 — Durée : 3 heures

Examen de topologie, analyse et calcul différentiel

Documents et calculatrices interdits

Les quatre exercices sont indépendants.

Exercice I   Soient E et F deux espaces de Banach réels, U un ouvert de E et $f : U \to F$ une application injective C^∞, dont la différentielle en tout point de U est une bijection. Montrer que $f(U)$ est un ouvert de F et que $f : U \to f(U)$ est un C^∞-difféomorphisme.

Exercice II   Soient E et F deux espaces de Banach réels, et $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{A}}$ une famille d'applications linéaires continues de E dans F.

(1) Montrer que l'application g de E dans $[0, +\infty]$ définie par $x \mapsto \sup_{\alpha\in\mathscr{A}} ||f_\alpha(x)||$ est semi-continue inférieurement.

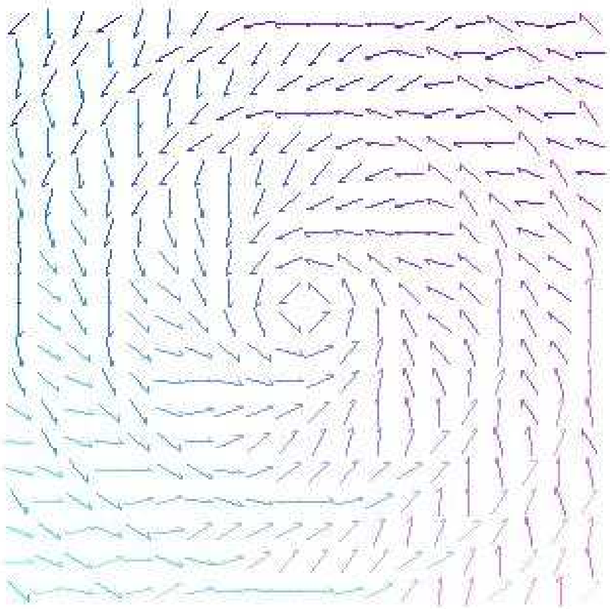
On suppose dans la suite de l'exercice II que $\sup_{\alpha\in\mathscr{A}} ||f_\alpha|| = +\infty$.

(2) Pour tout n dans $\mathbb{N}$, montrer que l'intérieur de $F_n = \{x \in E \ : \ g(x) \leq n\}$ est vide.

(3) Montrer que $G = \{x \in E \ : \ \sup_{\alpha\in\mathscr{A}} ||f_\alpha(x)|| = +\infty\}$ est dense dans E.

Exercice III   Identifions le plan euclidien usuel $\mathbb{R}^2$ avec le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, de manière usuelle par $(x, y) \mapsto z = x + iy$. Notons $\mathbb{D}$ le disque unité ouvert de $\mathbb{R}^2$, et fixons $n \in \mathbb{N} - \{0\}$. Définissons l'application $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ par

$$X : z \mapsto iz\, e^{\frac{i}{2}\left(1-\cos(2n\pi|z|^2)\right)} .$$



$n = 2$

Pour tout z dans $\mathbb{R}^2$, soit $t \mapsto \phi_t(z)$ la solution maximale de l'équation différentielle $u' = X(u)$ valant z à l'instant $t = 0$.

(1) Montrer que pour tout $k = 0, 1, \ldots, n$, si $|z| = \sqrt{\frac{k}{n}}$ (et en particulier si $|z| = 1$), alors $\phi_t(z) = e^{it}z$ pour tout t dans $\mathbb{R}$.

(2) Montrer que pour tout z dans $\mathbb{D}$, l'image de l'application $t \mapsto \phi_t(z)$ est contenue dans $\mathbb{D}$. En déduire que l'application $t \mapsto \phi_t(z)$ est définie sur $\mathbb{R}$, pour tout z dans $\mathbb{D}$.

(3) Pour tout $k = 0, 1, \ldots, n-1$, si $|z| \in \left]\sqrt{\frac{k}{n}}, \sqrt{\frac{k+1}{n}}\right[$, déterminer l'ensemble des valeurs d'adhérence de $\phi_t(z)$ quand t tend vers $+\infty$, et quand t tend vers $-\infty$.

(4) On considère la relation $\mathscr{R}$ sur $\mathbb{D}$ définie par $z \mathrel{\mathscr{R}} w$ si et seulement s'il existe t dans $\mathbb{R}$ tel que $w = \phi_t(z)$. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence, et que l'espace topologique quotient $\mathbb{D}/\mathscr{R}$ n'est pas séparé.

$\boxed{\text{Exercice IV}}$ Soient E un espace de Banach complexe, $\mathscr{L}(E)$ l'algèbre des endomorphismes linéaires continus de E, muni de la norme d'opérateurs usuelle, et $u \in \mathscr{L}(E)$. Soit $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme complexe en une variable. Notons $\overline{P} = \sum_{i=0}^n \overline{a_i} X^i \in \mathbb{C}[X]$ et $P(u) = \sum_{i=0}^n a_i u^i \in \mathscr{L}(E)$. Remarquons que $(PQ)(u) = P(u)Q(u) = Q(u)P(u)$.

(1) Montrer que la série $\exp(u) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!} u^n$ converge dans $\mathscr{L}(E)$. Montrer que si $v \in \mathscr{L}(E)$ commute avec u (i.e. si $uv = vu$), alors $\exp(u + v) = (\exp u)(\exp v)$.

(2) Pour tous x_0 dans E et t_0 dans $\mathbb{R}$, montrer que l'unique solution maximale de l'équation différentielle $y' = u(y)$ valant x_0 à l'instant t_0 est l'application de $\mathbb{R}$ dans E définie par $t \mapsto \exp((t - t_0)u) \cdot x_0$.

(3) a) Montrer que si $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, alors $P(\lambda) \in \mathrm{Sp}(P(u))$.

b) Réciproquement, si $\mu \in \mathrm{Sp}(P(u))$, montrer qu'il existe $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ tel que $P(\lambda) - \mu = 0$.

Dans la suite de l'exercice IV, nous supposons que E est un espace de Hilbert complexe et que u est autoadjoint.

(4) Montrer que l'adjoint de $P(u)$ est $\overline{P}(u)$.

(5) Montrer que $||P(u)||^2 = \sup_{\lambda \in \mathrm{Sp}\left((P\overline{P})(u)\right)} |\lambda| = \sup_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} |P(\lambda)|^2$.

(6) Considérons $\mathscr{C}(\mathrm{Sp}(u), \mathbb{C})$, l'algèbre des applications continues de $\mathrm{Sp}(u)$ dans $\mathbb{C}$, muni de la norme uniforme. Montrer qu'il existe un unique morphisme d'algèbres continu $\Psi : \mathscr{C}(\mathrm{Sp}(u), \mathbb{C}) \to \mathscr{L}(E)$ tel que $\Psi(P) = P(u)$ pour tout P dans l'algèbre $\mathbb{C}[X]$ des polynômes complexes.

(7) Montrer que si $f \in \mathscr{C}(\mathrm{Sp}(u), \mathbb{C})$ et $\lambda \notin f\big(\mathrm{Sp}(u)\big)$, alors $g : t \mapsto \frac{1}{f(t)-\lambda}$ appartient à $\mathscr{C}(\mathrm{Sp}(u), \mathbb{C})$. En déduire que $\mathrm{Sp}(\Psi(f))$ est contenu dans $f(\mathrm{Sp}(u))$.

(8) Soit $f \in \mathscr{C}(\mathrm{Sp}(u), \mathbb{C})$. En déduire que si E est de dimension infinie et si f est à valeurs réelles non nulles, alors l'opérateur $\Psi(f)$ est autoadjoint, mais n'est pas compact.