FIMFA ENS Ulm — Mardi 27 janvier 2009 — Durée : 3 heures

Corrigé de l'examen d'Analyse I

$\boxed{\text{I}}$ Pour tout x dans U, par le théorème d'inversion locale, il existe des voisinages ouverts V_x de x et W_x de $f(x)$ tels que $f : V_x \to W_x$ soit un C^∞-difféomorphisme. En particulier, $f(U)$ contient un voisinage de chacun de ses points, donc est ouvert. L'application $f : U \to f(U)$ est bijective, et sa réciproque est encore C^∞, car elle l'est sur le voisinage ouvert W_x de chaque point $f(x)$ de $f(U)$.

$\boxed{\text{II}}$ (1) Pour tout α dans $\mathscr{A}$, l'application $x \mapsto ||f_\alpha(x)||$ est continue, comme composée d'applications continues. Comme toute borne supérieure de fonctions (semi-)continues inférieurement est semi-continue inférieurement, le résultat en découle.

(2) Supposons par l'absurde que l'intérieur de F_n soit non vide. Soient $x_0 \in E$ et $\epsilon > 0$ tels que $B(x_0, 2\epsilon) \subset F_n$. Alors pour tout x dans E et tout α dans $\mathscr{A}$,

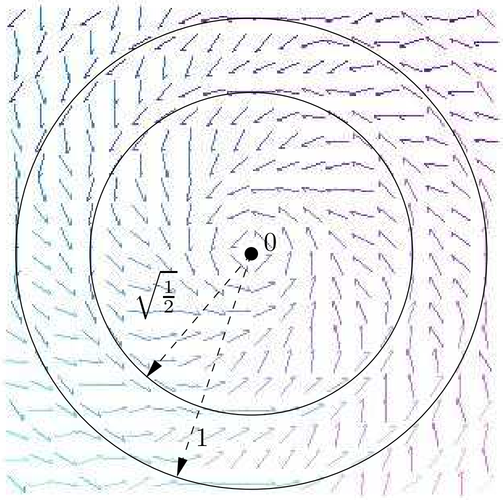
$$||f_\alpha(x)|| = \frac{1}{\epsilon}||f_\alpha(\epsilon x + x_0 - x_0)|| \leq \frac{1}{\epsilon}||f_\alpha(x_0 + \epsilon x)|| + ||f_\alpha(x_0)|| \leq \frac{n}{\epsilon} + ||f_\alpha(x_0)|| \,.$$

Donc pour tout x dans E, $\sup_{\alpha\in\mathscr{A}} ||f_\alpha(x)|| < +\infty$. Par le théorème de Banach-Steinhaus, nous avons donc $\sup_{\alpha\in\mathscr{A}} ||f_\alpha|| < +\infty$, ce qui contredit l'hypothèse.

(3) Le sous-espace $F_n = \{x \in E \;:\; g(x) \leq n\}$ est fermé, car g est semi-continue inférieurement. Donc ${}^cF_n$ est un ouvert dense de l'espace métrique complet E. Par le théorème de Baire, $G = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} {}^cF_n$ est donc dense.

$\boxed{\text{III}}$ Notons tout d'abord que le champ de vecteurs X est défini et de classe C^∞ (car $|z|^2 = x^2 + y^2$) sur $\mathbb{R}^2$, donc satisfait les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz.

(1) Si z est comme dans l'énoncé, l'application $f : t \mapsto e^{it}z$ est définie sur $\mathbb{R}$, dérivable, vérifie $f(0) = z$, et sa dérivée vaut $f'(t) = ie^{it}z = if(t) = X(f(t))$ car $\cos(2n\pi|f(t)|^2) = \cos(2k\pi) = 1$. Par unicité locale dans le théorème de Cauchy-Lipschitz, nous avons donc $\phi_t(z) = f(t)$ dès que ces applications sont définies en t, et par maximalité, $\phi_t(z)$ est défini, et vérifie cette propriété, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

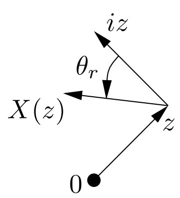


(2) Le champ de vecteurs X, étant continu sur $\mathbb{R}^2$, est en particulier borné sur un voisinage d'adhérence compacte U de $\overline{\mathbb{D}}$. Montrons que toute courbe intégrale maximale γ de X, de position initiale (au temps $t = 0$) dans $\mathbb{D}$, reste dans $\mathbb{D}$ aussi longtemps que définie. En effet, le cercle unité $\mathbb{S}_1$ de $\mathbb{R}^2$, qui est le bord de $\mathbb{D}$, est l'image d'une courbe intégrale par (1). Par le théorème des valeurs intermédiaires, si γ sortait de $\mathbb{D}$, alors γ devrait rencontrer $\mathbb{S}_1$ en au moins un point. Mais par unicité des solutions maximales d'une équation différentielle autonome, deux courbes intégrales maximales, dont les images se rencontrent en un point, diffèrent par translation du temps. Donc l'image de γ devrait être contenue dans $\mathbb{S}_1$, et la position initiale de γ ne pourrait pas être dans $\mathbb{D}$.

Toute valeur d'adhérence du graphe d'une courbe intégrale de position initiale dans $\mathbb{D}$ est donc contenue dans $\overline{\mathbb{D}}$, donc dans U. Par le théorème d'explosion en temps fini des solutions maximales d'une équation différentielle, ceci implique que toute courbe intégrale de position initiale dans $\mathbb{D}$ est définie sur $\mathbb{R}$, ce qui montre le résultat.

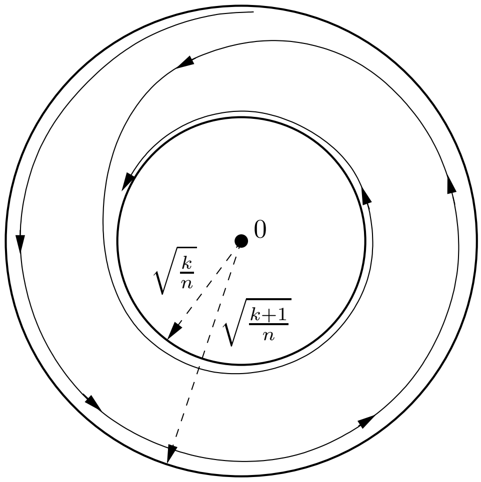
(3) Pour $k = 0, \dots, n-1$, notons C_k la couronne ouverte $\{z \in \mathbb{C} \;:\; \sqrt{\frac{k}{n}} < |z| < \sqrt{\frac{k+1}{n}}\}$, et $\overline{C}_k$ son adhérence. Comme les deux cercles du bord de $\overline{C}_k$ sont des images de courbes intégrales de X par la question (1), par le même raisonnement que pour la question (2), toute courbe intégrale de X de position initiale z dans C_k reste dans C_k, donc toute valeur d'adhérence de $\phi_t(z)$ en $\pm\infty$ appartient au compact $\overline{C}_k$.

Pour tout $r \in \,]\sqrt{\frac{k}{n}}, \sqrt{\frac{k+1}{n}}[$, si $|z| = r$, alors l'angle orienté θ_r entre iz et $X(z)$ ne dépend que de r et vaut $\frac{1}{2}\big(1 - \cos(2n\pi r^2)\big) \in \,]0, 1] \subset \,]0, \frac{\pi}{2}[$.



On a
$$\frac{d}{dt}\;|\phi_t(z)|^2 = 2\,\mathrm{Re}\big(\varphi_t(z)\overline{X(\varphi_t(z))}\big) = 2\cos\Big(\frac{\pi}{2} + \theta_{|\phi_t(z)|}\Big) < 0\ .$$
Donc si $z \in C_k$, alors l'application $t \mapsto |\phi_t(z)|$ est strictement décroissante. Elle est bornée inférieurement par $\sqrt{\frac{k}{n}}$, et supérieurement par $\sqrt{\frac{k+1}{n}}$. Donc $|\phi_t(z)|$ converge vers une limite

$\ell_\pm \in [\sqrt{\frac{k}{n}}, \sqrt{\frac{k+1}{n}}]$ quand t tend vers $\pm\infty$. Comme $\theta_r \neq 0$ si $r \in]\sqrt{\frac{k}{n}}, \sqrt{\frac{k+1}{n}}[$, nous avons nécessairement $\ell_- = \sqrt{\frac{k+1}{n}}$ et $\ell_+ = \sqrt{\frac{k}{n}}$.



Par continuité et la propriété de flot, si w est une valeur d'adhérence de $\phi_t(z)$ quand t tend vers $\pm\infty$, alors $\phi_s(w)$ est aussi une valeur d'adhérence pour tout s dans $\mathbb{R}$. Donc l'ensemble des valeurs d'adhérence de $\phi_t(z)$ quand t tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) est le cercle de centre 0 et de rayon $\sqrt{\frac{k}{n}}$, réduit à un point si $k = 0$, (respectivement $\sqrt{\frac{k+1}{n}}$). Les courbes intégrales dans la couronne C_k spiralent donc entre ces deux cercles, en s'en rapprochant à l'infini. En particulier, quand le temps converge vers $+\infty$, toute courbe intégrale de position initiale dans C_0 converge vers 0.

(4) Le fait que $\mathscr{R}$ soit une relation d'équivalence découle, en utilisant le fait que le champ de vecteurs X soit complet dans $\mathbb{D}$, des propriétés de flot : la propriété $\phi_0 = \mathrm{id}$ implique la réflexivité, $(\phi_t)^{-1} = \phi_{-t}$ implique la symétrie, et $\phi_s \circ \phi_t = \phi_{s+t}$ implique la transitivité de $\mathscr{R}$.

[Une autre manière de dire cela est que, par les propriétés du flot d'un champ de vecteurs complet, l'application de $\mathbb{R} \times \mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$, définie par $(t, z) \mapsto \phi_t(z)$, est une action du groupe $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{D}$; puisque $\mathscr{R}$ est la relation « être dans la même orbite » pour cette action, $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.]

Notons $p : \mathbb{D} \to \mathbb{D}/\mathscr{R}$ la projection canonique. Remarquons que la courbe intégrale d'image $\{0\}$ et celle de position initiale $\frac{1}{2\sqrt{n}}$ sont d'images disjointes, donc les images par p de ces trajectoires sont des points u et v distincts de $\mathbb{D}/\mathscr{R}$. Comme $\phi_t(\frac{1}{2\sqrt{n}})$ converge vers 0 quand t tend vers $+\infty$, et par continuité de p, $v = p\big(\phi_t(\frac{1}{2\sqrt{n}})\big)$ converge vers $p(0) = u$. Donc $u \in \overline{\{v\}}$, et $\mathbb{D}/\mathscr{R}$ n'est pas séparé.

[Une autre manière de raisonner est de dire, par cet argument de convergence, que $\mathscr{R}$ n'est pas fermé dans $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$, donc $\mathbb{D}/\mathscr{R}$ ne peut être séparé.]

$\boxed{\text{IV}}$ (1) La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!}u^n$ est normalement convergente, par les propriétés de la norme d'opérateur, donc elle converge dans l'espace de Banach $\mathscr{L}(E)$. Si u et v commutent, alors $(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k v^{n-k}$ par récurrence, donc le fait que $\exp(u+v) = (\exp u)(\exp v)$

se démontre comme pour l'exponentielle réelle, en utilisant le théorème de Fubini pour permuter les sommes.

(2) Notons $f : \mathbb{R} \to E$ l'application $t \mapsto \exp((t-t_0)u) \cdot x_0$, qui vérifie $f(t_0) = x_0$. Pour montrer que f est solution, il s'agit de montrer que f est dérivable et que $f'(t) = u(f(t))$ pour tout t dans $\mathbb{R}$. L'application d'évaluation en x_0 étant linéaire continue, par le théorème de dérivation des fonctions composées, il suffit de vérifier que si $g : \mathbb{R} \to E$ est l'application $t \mapsto \exp(tu)$, alors g est dérivable et $g'(t) = u \circ g(t)$. Pour tout $h \in]-1, 1[$,

$$g(t+h) = \big(\exp(hu)\big)\big(\exp(tu)\big) = \big(\,\mathrm{id} + hu + h^2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{h^{n-2}}{n!}\, u^n\big) \circ g(t)\ .$$

Or $||\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{h^{n-2}}{n!}\, u^n||$ est borné uniformément en h par $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n!}\, ||u||^n < +\infty$. Donc $g(t+h) = g(t) + h\; u \circ g(t) + o(h)$, ce qui montre le résultat.

[On peut aussi utiliser, en en vérifiant toutes les hypothèses, le théorème **??** de dérivation terme à terme des séries.]

Comme le domaine de définition de f est $\mathbb{R}$, la solution f est maximale.

(3) a) Soient $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ et $Q \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P - P(\lambda) = (X - \lambda)Q$. Alors $P(u) - P(\lambda)\,\mathrm{id} = (u - \lambda\,\mathrm{id}) \circ Q(u) = Q(u) \circ (u - \lambda\,\mathrm{id})$. Comme $u - \lambda\,\mathrm{id}$ est non surjective ou non injective, $P(u) - P(\lambda)\,\mathrm{id}$ l'est aussi, et donc $P(\lambda) \in \mathrm{Sp}(P(u))$.

b) Par le théorème de d'Alembert, il existe n dans $\mathbb{N}$ et $a, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ dans $\mathbb{C}$ tels que $P(X) - \mu = a \prod_{k=1}^{n} (X - \lambda_k)$, donc $P(u) - \mu\,\mathrm{id} = a(u - \lambda_1\,\mathrm{id}) \circ \dots \circ (u - \lambda_n\,\mathrm{id})$. Si aucun λ_i n'est dans $\mathrm{Sp}(u)$, alors $P(u) - \mu\,\mathrm{id}$ est inversible, ce qui contredit le fait que $\mu \in \mathrm{Sp}(P(u))$. Donc, par exemple, $\lambda_1 \in \mathrm{Sp}(u)$, et $P(\lambda_1) - \mu = 0$. Nous avons montré que

$$P(\mathrm{Sp}(u)) = \mathrm{Sp}(P(u))\ .$$

(4) Il est immédiat que toute puissance d'un opérateur autoadjoint est encore autoadjoint, et que l'adjoint d'une combinaison linéaire d'opérateurs autoadjoints est la combinaison linéaire à coefficients conjugués de ces opérateurs (en particulier, toute combinaison linéaire à coefficients réels d'opérateurs autoadjoints est encore autoadjoint). Le résultat en découle.

(5) En utilisant, pour la seconde égalité, le fait que le rayon spectral d'un opérateur autoadjoint est égal à sa norme ; pour la troisième égalité, l'assertion (1) ; pour la quatrième égalité, l'assertion (3) ; et pour la dernière égalité, le fait que le spectre d'un opérateur autoadjoint soit réel, nous avons

$$\begin{aligned} ||P(u)||^2 = ||P(u)P(u)^*|| &= \sup_{\lambda \in \mathrm{Sp}(P(u)P(u)^*)} |\lambda| = \sup_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,\left((P\overline{P})(u)\right)} |\lambda| = \sup_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} |(P\,\overline{P})(\lambda)| \\ &= \sup_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} |P(\lambda)|^2\ . \end{aligned}$$

(6) Notons $\mathscr{A}$ l'algèbre des restrictions des polynômes complexes au compact $\mathrm{Sp}(u)$ de $\mathbb{C}$, qui sépare les points et est stable par passage à la partie réelle et à la partie complexe. L'application de $\mathscr{A}$ dans $\mathscr{L}(E)$ définie par $P \mapsto P(u)$ est un morphisme d'algèbres, qui est 1-lipschitzien par la question (5). Par le théorème de Stone-Weiertrass, $\mathscr{A}$ est dense dans $\mathscr{C}(\mathrm{Sp}(u), \mathbb{C})$. Par le théorème de prolongement, puisque $\mathscr{L}(E)$ est complet, l'application uniformément continue $P \mapsto P(u)$ s'étend de manière unique en un morphisme d'algèbres continu $\Psi : \mathscr{C}(\mathrm{Sp}(u), \mathbb{C}) \to \mathscr{L}(E)$.

(7) Si $\lambda \notin f\big(\mathrm{Sp}(u)\big)$, alors l'application continue $t \mapsto f(t) - \lambda$ ne s'annule pas sur $\mathrm{Sp}(u)$, donc son inverse g appartient à $\mathscr{C}(\mathrm{Sp}(u), \mathbb{C})$. Comme $g(t)(f(t) - \lambda) = (f(t) - \lambda)g(t) = 1$ pour tout $t \in \mathrm{Sp}(u)$, et puisque Ψ est un morphisme d'algèbres, nous avons $\Psi(g) \circ (\Psi(f) - \lambda\,\mathrm{id}) = (\Psi(f) - \lambda\,\mathrm{id}) \circ \Psi(g) = \mathrm{id}$, donc $\Psi(f) - \lambda\,\mathrm{id}$ est inversible, et $\lambda \notin \mathrm{Sp}\,\big(\Psi(f)\big)$. Le résultat en découle, par contraposée.

(8) Par continuité du produit scalaire, l'ensemble des opérateurs autoadjoints est fermé. Par (1) et puisque f est limite uniforme de polynômes réels, $\Psi(f)$ est autoadjoint.

Il découle du cours que si E est de dimension infinie, alors 0 est une valeur spectrale de tout opérateur autoadjoint compact. Comme 0 n'est pas dans l'image de f, le résultat découle donc de la question (7).

[Autre solution : Si $\Psi(f)$ est compact, alors son spectre consiste, outre éventuellement 0, en une suite (infinie car E est de dimension infinie et $\Psi(f)$ n'est pas l'opérateur nul) $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'éléments non nuls (ce sont en fait des valeurs propres de multiplicités finies, réelles car $\Psi(f)$ est autoadjoint, mais ceci n'est pas utile) convergeant vers 0. Par la question (7), $\lambda_i = f(\mu_i)$, avec μ_i une valeur spectrale de u. Or λ_i tendant vers 0, ceci contredit le fait que $f(\mathrm{Sp}(u))$ est fermé (par compacité de $\mathrm{Sp}(u)$ et continuité de f) et ne contient pas 0.]