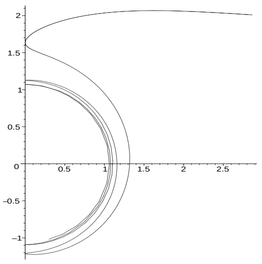
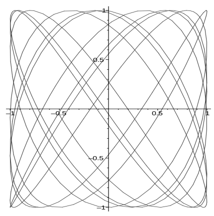
FIMFA ENS Ulm — Lundi 19 novembre 2007 — Durée : 2 heures

Corrigé de l'examen partiel

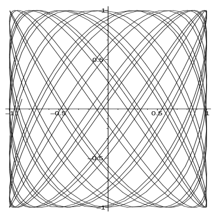
Exercice I (1) Comme $\mathbb{C}$ est un espace métrique, l'ensemble A des valeurs d'adhérence cherchées est l'ensemble des limites des suites de la forme $\Big((1+t_n)\, e^{\frac{i\pi}{2}\sin\frac{1}{t_n}}\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ où $t_n \to 0$. En particulier, comme $1+t_n$ tend vers 1, l'ensemble A est contenu dans le demi-cercle unité droit $A' = \{e^{i\theta} \;:\; \theta \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]\}$. Réciproquement, comme tout élément de $[-1,1]$ est limite d'une suite $\big(\sin\frac{1}{t_n}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ quand t_n tend vers 0, et par composition de limites et d'appilcation continues, tout point de ce demi-cercle est valeur d'adhérence. Donc $A = A'$.



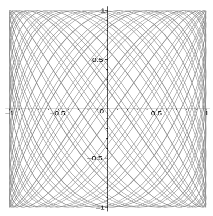
$f([0.06, 2.5])$



$g([100, 150])$



$g([100, 200])$



$g([100, 250])$

(2) Montrons que $A = \mathbb{Z} + \sqrt{2}\,\mathbb{Z}$, qui est un sous-groupe de $\mathbb{R}$, est dense dans $\mathbb{R}$. S'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans A telle que $x_n > 0$ et $x_n \to 0$, alors pour tout t dans $\mathbb{R}$, pour tout $\epsilon > 0$, si $m = E[t/x_n]$, alors $|x - mx_n| \le x_n$, ce qui, comme $mx_n \in A$, entraîne que A est dense dans $\mathbb{R}$. Sinon, soit $a = \inf\{x \in A \;:\; x > 0\}$, qui est strictement positif. Alors pour tout x dans A, soit $m = E[x/a]$, alors $0 \le x - ma < a$. Donc $x = ma$. D'où $A = a\mathbb{Z}$. Comme 1 et $\sqrt{2}$ appartiennent à A, il existe donc deux entiers p et q tels que $\sqrt{2} = ap$ et $1 = aq$. Donc $\sqrt{2} = p/q$, ce qui contredit le fait que $\sqrt{2}$ soit irrationnel.

Soit $A' = \mathbb{Z} + \sqrt{2}\,\mathbb{N}$ Pour tout $\epsilon > 0$, soit $x \in A$ tel que $|x| < \epsilon$. Quitte à changer x en $-x$, on peut supposer que $x \in A'$. Tout point t de $[0, +\infty[$ (resp. $]-\infty, 0]$) est à distance au plus ϵ d'un point de $x\mathbb{N}$ si $x > 0$ (resp. $x < 0$) Donc tout point t de $\mathbb{R}$ (en ajoutant un élément de $\mathbb{R}$ pour rendre t positif ou négatif) est à distance au plus ϵ d'un point de $\mathbb{Z} + x\mathbb{N}$, qui est contenu dans A'. Donc A' est aussi dense.

Comme g est à valeurs dans le carré unité $[-1,1]^2$, qui est compact, toute valeur d'adhérence de g en $+\infty$ appartient à ce carré. Montrons réciproquement que tout point de ce carré est d'adhérence de g en $+\infty$. Soient $(t,t') \in [-1,1]^2$, $\epsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$. Comme l'ensemble des valeurs d'adhérence de $\sin t$ quand t tend vers $+\infty$ est $[-1,1]$, il existe $u, u' \ge N$ tels que $|\sin u - t| < \epsilon/2$ et $|\sin u' - t'| < \epsilon/4$. Posons $u'' = \frac{u' - \sqrt{2}\,u}{2\pi}$. Par densité de $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\,\mathbb{N}$, soient $k \in \mathbb{Z}$ et $k' \in \mathbb{N}$ tels que

$$|u'' - (k + \sqrt{2}\,k')| < \frac{\epsilon}{8\pi} \, .$$

Alors soit $v = u + 2\pi k'$, qui est plus grand que N. On a $|\sin v - t| < \epsilon/2$. Comme sin est 1-lipschitzienne (sa dérivée est cos, et on applique le théorème des accroissements finis),

$$\begin{aligned} |\sin(\sqrt{2}\,v) - \sin u'| &= |\sin(\sqrt{2}\,v + 2\pi k) - \sin u'| \le |\sqrt{2}\,v + 2\pi k - u'| \\ &= |\sqrt{2}\,u + 2\pi(k + \sqrt{2}k') - u'| = 2\pi|u'' - (k + \sqrt{2}k')| < \frac{\epsilon}{4} \, . \end{aligned}$$

D'où
$$|\sin(\sqrt{2}\,v) - t'| \leq |\sin(\sqrt{2}\,v) - \sin u'| + |\sin u' - t'| < \epsilon/4 + \epsilon/4 = \epsilon/2\ .$$
Le résultat en découle.

$\boxed{\text{Exercice II}}$ (1) L'application $||\cdot||_k$ est clairement positive, et vérifie $||\lambda x||_k = |\lambda|\ ||\lambda x||_k$ et $||x+y||_k \leq ||x||_k + ||y||_k$ pour tous x, y dans E et λ dans $\mathbb{R}$, par les propriétés de la valeur absolue et de la borne supérieure. Si $||(x_n)_{n\in\mathbb{N}}||_k = 0$, alors $(n+1)^k\,|x_n| = 0$ pour tout n dans $\mathbb{N}$, donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite nulle.

(2) Pour tous k dans $\mathbb{N}$, et $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E, on a $(n+1)^k|x_{n+1}| \leq ((n+1)+1)^k|x_{n+1}|$, donc $||\sigma(x)||_k \leq ||x||_k$. D'où σ, qui est linéaire, est (1-lipschitzienne donc) continue, pour toute norme $||\cdot||_k$. Donc σ est continue sur E.

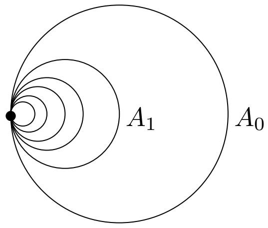
(3) Comme la topologie de E est définie par une famille dénombrable séparante (chaque semi-norme est une norme !) de semi-normes, il découle du cours que E est métrisable pour la distance
$$d(x,y) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^k} \min\{1, ||x-y||_k\}\ .$$
Soit $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans E pour cette distance, et notons $x_{i,n}$ le n-ème terme de la suite réelle x_i. Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour tout i dans $\mathbb{N}$, notons y_i la suite réelle $\big((n+1)^k x_{i,n}\big)_{n\in\mathbb{N}}$. Comme $||x-y||_k \leq 2^k d(x,y)$ si $d(x,y) < \frac{1}{2^k}$, la suite $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans l'espace ℓ_∞, qui est complet par le cours. Donc elle converge vers un élément $z_k = (z_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$. Comme $\lim_{i\to\infty}\ (n+1)^k x_{i,n} = z_{k,n}$, on en déduit que $z_{k,n} = (n+1)^k z_{0,n}$. Donc $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers z_0 dans E muni de la topologie définie par les semi-normes $||\cdot||_k$.

$\boxed{\text{Exercice III}}$ Notons $A_k = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ \big(x - \frac{1}{k+1}\big)^2 + y^2 = \frac{1}{(k+1)^2}\big\}$, qui est un cercle de centre $(\frac{1}{k+1}, 0)$ et de rayon $\frac{1}{k+1}$, donc en particulier est compact. L'ensemble A est borné, car contenu dans le disque de centre 1 et de rayon 1. Montrons qu'il est fermé. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans A qui converge vers un élément x de $\mathbb{R}^n$. Montrons que $x \in A$, ce qui conclut. Soit $n_k \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in A_{k_n}$. Quitte à extraire, ou bien à k_n est constant, et alors $x \in A_{k_n} \subset A$. Sinon, $\lim_{n\to+\infty}\ k_n = +\infty$, et alors $x = (0,0)$, car pour tout $\epsilon > 0$, si k est assez grand, alors A_k est contenu dans le disque de centre 0 et de rayon ϵ.

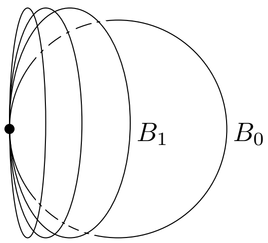
Comme A_k est connexe (par arcs), et que les A_k se rencontrent tous en $(0,0)$, le sous-espace A est aussi connexe (par arcs). Tout point de $A - \{(0,0)\}$ admet un système fondamental de voisinages homéomorphes à un intervalle, donc connexes. L'intersection avec A de la boule de rayon ϵ et de centre $(0,0)$, qui est un voisinage de $(0,0)$, est connexe, car réunion d'arcs de cercles (connexes) et de cercles (connexes) se rencontrant en $(0,0)$. Donc A est localement connexe.

(2) Par le théorème de Tychonov, l'espace produit $\overline{\mathbb{B}}^{\mathbb{N}}$ est compact. Comme tout fermé d'un compact est compact, il suffit de montrer que C est fermé, et un raisonnement analogue au précédent conclut, car par les propriétés de la topologie produit, si une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de C converge vers $x \in \overline{\mathbb{B}}^{\mathbb{N}}$, de sorte que $x_n \in C_{k_n}$ où $\lim_{n\to+\infty}\ k_n = +\infty$, alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la suite constante en x_*, donc $x = x_* \in C$.

Notons que les C_k sont homéomorphes à des cercles, qui ne se rencontrent deux à deux qu'en x_0. Soit f_k un homéomorphisme de A_k sur C_k envoyant $(0,0)$ sur x_*. Soit $f : A \to C$ l'application qui à x associe $f_k(x)$ si $x \in A_k$. Alors f est bien définie, et est une bijection, clairement continue en dehors du point $(0,0)$, et continue en $(0,0)$ aussi par ce qui précède. Comme A est compact et C séparé, on en déduit que f est un homéomorphisme.



anneaux hawaïens



bouquet de cercles

(3) Il est immédiat que $\mathcal{R}$ est bien une relation d'équivalence. Montrons que l'espace topologique quotient $\widetilde{\mathcal{B}}_I/\mathcal{R}$ est séparé. Comme $\widetilde{\mathcal{B}}_I$ est compact si I est fini (comme produit de deux compacts), par continuité (et surjectivité) de la projection canonique de $\widetilde{\mathcal{B}}_I$ dans $\mathcal{B}_I = \widetilde{\mathcal{B}}_I/\mathcal{R}$, ceci montrera que ce dernier espace est aussi compact. Il est facile de montrer que si x et y sont des points non équivalents de $\widetilde{\mathcal{B}}_I$, alors il existe deux ouverts saturés disjoints les contenant (en discutant suivant que x ou y soit égal à x_* ou pas). Donc $\widetilde{\mathcal{B}}_I/\mathcal{R}$ est séparé.

(4) Nous avons déjà vu que A et C sont homéomorphes.

L'espace $\mathcal{B}_{\mathbb{N}}$ n'est pas compact, car si x_n est l'image par la projection canonique $\pi : \widetilde{\mathcal{B}}_{\mathbb{N}} \to \mathcal{B}_{\mathbb{N}} = \mathcal{B}_{\mathbb{N}}/\mathcal{R}$ de $((-1,0),n)$, alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de valeur d'adhérence ℓ : on exclut séparément les deux cas $\ell = \pi(x_*,0)$ (la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne rentre pas dans le voisinage ouvert saturé $\{z \in \mathbb{S}_1 \ : \ \mathrm{Re}\ z > 0\} \times \mathbb{N}$) et $\ell \neq \pi(x_*,0)$ (si $\ell = \pi(x_\ell, n_\ell)$, alors pour $n > n_\ell$, x_n n'appartient pas au voisinage ouvert saturé $\big(\mathbb{S}_1 - \{x_*\}\big) \times \{n_\ell\}$ de x_ℓ). Donc A et $\mathcal{B}_{\mathbb{N}}$ ne sont pas homéomorphes.

$\boxed{\text{Exercice IV}}$ (1) La topologie produit sur E^k est la topologie induite par n'importe quelle norme sur l'espace vectoriel de dimension finie E^k, par exemple $||(x_1,\dots,x_n)||_\infty = \max_{1\le i\le k} \ ||x_i||$. Donc il suffit de montrer que $B_k(E)$ est fermé borné. L'ensemble $B_k(E)$ est contenu dans la boule unité de $||\cdot||_\infty$. La fermeture découle de la continuité de la norme et du produit scalaire.

(2) Il est immédiat que l'action $\mathrm{O}(n) \times B_k(E) \to \times B_k(E)$ est à valeurs dans $B_k(E)$, et que c'est une action. Comme l'action est restriction d'une application polynomiale (donc continue) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times E^k$ dans E^k, le résultat en découle. Comme $\mathrm{O}(n)$ agit transitivement sur les bases orthonormées de E (et en complétant un k-uplet orthonormé en une base orthonormée, $\mathrm{O}(n)$ agit transitivement sur $B_k(E)$.

(3) Comme H est défini par l'égalité à 1 ou à 0 de certains des coefficients matriciels, H est fermé. Soit $(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Comme H est le stabilisateur du k-uplet $(e_1,\dots,e_k)$ dans $\mathrm{O}(n)$, l'action continue transitive précédente induit par passage au quotient une bijection continue de $\mathrm{O}(n)/H$ sur $B_k(E)$. L'image est séparée (car métrisable). Le but est séparé (car H est fermé), donc compact (car $\mathrm{O}(n)$ est compact, et la projection canonique est continue surjective). Donc cette bijection continue est un homéomorphisme.

(4) a) Ceci découle des propriétés de la distance de Hausdorff sur les fermés de l'espace métrique $\overline{\mathbb{B}_n}$, avec le fait qu'un sous-espace de dimension k est déterminé par son intersection avec cette boule.

b) Si $(v_1,\dots,v_k)$ est proche de $(v'_1,\dots,v'_k)$, alors toute combinaison linéraire à coefficients dans $[-1,1]$ de $(v_1,\dots,v_k)$ est proche de la combinaison linéraire correspondante de $(v'_1,\dots,v'_k)$, et donc la distance d_H entre les espaces engendrés est petite.

c) La transitivité découle de la transitivité de $\mathrm{O}(n)$ sur $B_k(E)$ en prenant des bases. Deux sous-espaces vectoriels de dimension k de $\mathbb{R}^n$, proches pour d_H, ont des bases proches, donc la continuité de l'action découle de celle sur $B_k(E)$.

d) L'argument est le même que celui pour (3).