FIMFA ENS Ulm — Lundi 24 novembre 2008 — Durée : 2 heures

Corrigé de l'examen partiel

(et de quelques questions auxquelles vous avez échappé !)

Exercice I (1) a) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, comme $P \mapsto P(k)$ est une forme linéaire sur l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}[X]$, sa valeur absolue est une semi-norme.

b) La famille de semi-normes $\big(||\cdot||_k\big)_{k\in\mathbb{Z}}$ est dénombrable et séparante, car un polynôme non nul n'a qu'un nombre fini de racines. Donc par un résultat du cours, l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ muni de la topologie $\mathcal{T}_1$ est un espace vectoriel topologique, métrisable par exemple par la distance

$$d(P,Q) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-|k|} \min\{1, ||P-Q||_k\} \ .$$

Le sous-ensemble $\mathbb{Q}[X]$ des polynômes à coefficients rationnels est dénombrable, et dense dans cet espace topologique, car pour tous $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in \mathbb{R}[X]$, $N \in \mathbb{Z}$ et $\epsilon > 0$, il existe $Q = \sum_{i=0}^n b_i X^i \in \mathbb{Q}[X]$ tel que pour tout $k \in \mathbb{Z} \cap [-N,N]$, nous ayons $||P-Q||_k < \epsilon$: il suffit de prendre, pour tout $i \in \mathbb{N} \cap [0,n]$, un b_i dans $\mathbb{Q}$ tel que $|a_i - b_i| < \frac{\epsilon}{(n+1)N^n}$. [Une autre manière d'énoncer cela est que pour tout $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in \mathbb{R}[X]$, et tout $i \in \mathbb{N} \cap [0,n]$, en choisissant $(a_{i,p})_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de rationnels convergeant vers a_i, et en posant $Q_p = \sum_{i=0}^n a_{i,p} X^i \in \mathbb{Q}[X]$, nous avons, pour tout $k \in \mathbb{Z}$ (quelconque, fixé), $||P - Q_p||_k = |P(k) - Q_p(k)|$ qui tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$, et donc la suite $(Q_p)_{p\in\mathbb{N}}$ qui converge vers P dans $\mathcal{T}_1$]. Donc $(\mathbb{R}[X], \mathcal{T}_1)$ est séparable.

Si $P_n = \sum_{i=0}^n \frac{X^i}{i!}$, alors l'application $x \mapsto P_n(x)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ converge simplement (et même uniformément sur les compacts) vers l'application $x \mapsto e^x$. Donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $\big(P_n(k)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$, donc pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n, m \geq N$, alors $||P_n - P_m||_k = |P_n(k) - P_m(k)| < \epsilon$. Donc la suite $(P_n)_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(\mathbb{R}[X], d_1)$. Mais elle ne converge pas dans cet espace, car si elle convergeait vers un polynôme P, alors par continuité pour $\mathcal{T}_1$ de l'évaluation en un élément $k \in \mathbb{Z}$, ce polynôme P prendrait en k la valeur $e^k = \lim_{n\to+\infty} P_n(k)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, ce qui n'est pas possible (par exemple parce que $P(k)$ est équivalent, quand $k \to +\infty$, à ck^m, où $m \in \mathbb{N}$ est le degré de P (qui n'est pas le polynôme nul) et où $c \neq 0$ son coefficient dominant, et donc n'est pas équivalent à e^k).

c) Puisque $|P(k) - P_0(k)| = ||P - P_0||_k$ pour tous $k \in \mathbb{Z}$ et $P, P_0 \in \mathbb{R}[X]$, l'application d'évaluation en un élément $k \in \mathbb{Z}$ est continue [cette application étant linéaire, et $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{R}$ des espaces vectoriels topologiques, on pouvait se contenter de vérifier la continuité en $P_0 = 0$, mais c'est aussi long de justifier correctement que de prendre P_0 quelconque]. L'application $P \mapsto \big(P(0), P(1), \dots, P(n)\big)$ est continue car chacune de ses composantes l'est, par les propriétés de la topologie produit.

d) L'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ définie par $P \mapsto \big(P(0), P(1), \dots, P(n)\big)$ est linéaire, injective entre espaces vectoriels réels de même dimension finie, donc est un isomorphisme linéaire, continu par c) et par restriction d'application continue. Sa réciproque est l'application (utilisant les polynômes d'interpolation de Lagrange)

$$(a_0, a_1, \dots, a_n) \mapsto \sum_{i=0}^n a_i \frac{\prod_{1\leq j\leq n,\, j\neq i}(X-j)}{\prod_{1\leq j\leq n,\, j\neq i}(i-j)} \ ,$$

qui est continue par les propriétés des topologies finales, car pour tout $k \in \mathbb{Z}$, l'application de $\mathbb{R}^{n+1}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$(a_0, a_1, \dots, a_n) \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i \frac{\prod_{1 \leq j \leq n,\, j \neq i}(k-j)}{\prod_{1 \leq j \leq n,\, j \neq i}(i-j)}$$

est continue. La topologie induite par $\mathcal{T}_1$ sur $\mathbb{R}_n[X]$ est donc la topologie usuelle d'un espace vectoriel réel de dimension finie. Par le théorème de Riesz, celle-ci est localement compacte.

e) L'application ϕ de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ définie par $P \mapsto \big(P(0), P(1), \dots, P(n)\big)$ est linéaire, surjective, et continue par l'assertion c). Deux polynômes ont la même image par Ψ si et seulement si leur différence admet $0, 1, \dots, n$ pour racines, donc, celles-ci étant deux à deux distinctes, si et seulement si leur différence est divisible par Q_n. Donc ϕ passe au quotient en une application $\overline{\phi} : \mathbb{R}[X]/Q_n\mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}^{n+1}$ linéaire bijective continue entre des espaces vectoriels de même dimension $n+1$. Son inverse est la composée de l'application de $\mathbb{R}^{n+1}$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ inverse de celle considéré en c), donc continue, de l'inclusion de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$, continue par définition de la topologie de sous-espace topologique, et de la projection canonique $\mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]/Q_n\mathbb{R}[X]$, continue par définition de la topologie quotient. Donc $\overline{\phi}$ est un homéomorphisme.

f) Montrons que l'ensemble M des monômes est (séquentiellement) fermé. Soit $P_n = (a_n X^{m_n})_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans M convergeant vers un polynôme P pour $\mathcal{T}_1$. Par continuité de l'évaluation en 1, la suite $(a_n = P_n(1))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $P(1)$. Si la suite $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante, égale à N, notons $Q = P(1)X^N$. Alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$, par continuité de l'évaluation en k, nous avons $Q(k) = \lim_{n \to +\infty} P_n(k) = P(k)$, donc P et Q ayant une infinité de racines en commun, coïncident, et $P = Q \in M$. Sinon, quitte à extraire, nous pouvons supposer que la suite $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $+\infty$. Si $P = 0$, alors $P \in M$. Sinon, il existerait $k \in \mathbb{Z}$ tel que $P(k) \neq 0$. Mais alors, par continuité des évaluations en k et $k+1$, la suite des $\left(\frac{k+1}{k}\right)^{m_n} = \frac{P_n(k+1)}{P_n(k)}$ convergerait (vers $\frac{P(k+1)}{P(k)}$), ce qui n'est pas possible.

g) Pour montrer que l'application de $\mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par $(P, Q) \mapsto PQ$ est continue, il suffit de montrer, par les propriétés des topologies initiales, que pour tout $R \in \mathbb{R}[X]$ et tout $k \in \mathbb{Z}$, l'application $f : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ définie par $f(P, Q) = ||PQ - R||_k$ est continue en tout point (P_0, Q_0). Comme $\big|\, ||PQ - R||_k - |P_0Q_0 - R||_k \big| \leq |P(k)Q(k) - P_0(k)Q_0(k)|$, ceci découle de la continuité de l'application d'évaluation en k et du produit dans $\mathbb{R}$.

Si $Q \in \mathbb{R}[X]$ prend des valeurs entières sur $\mathbb{Z}$, alors l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par $P \mapsto P \circ Q$ est continue, car pour tout $k \in \mathbb{Z}$, l'application d'évaluation en $Q(k) \in \mathbb{Z}$ est continue.

Réciproquement, si $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $k_0 \in \mathbb{Z}$ sont tels que $Q(k_0)$ n'appartienne pas à $\mathbb{Z}$, alors en notant P_n le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré $2n+1$ valant 0 en tout point de $\mathbb{Z} \cap [-n, +n]$ et 1 en $Q(k_0)$, alors $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 pour $\mathcal{T}_1$ (car, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $P_n(k)$ vaut 0 si n est assez grand, donc converge vers 0). Mais la suite $(P_n \circ Q)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers $0 \circ Q = 0$, car $P_n \circ Q(k_0) = 1$ pour tout n. Donc l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par $P \mapsto P \circ Q$ n'est pas continue.

(2) a) Soit $P_n = X^n$. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, si n est assez grand $(n > i)$, alors $a_i(P) = 0$. Donc par les propriétés de la topologie produit, la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le polynôme

nul pour la topologie $\mathcal{T}_2$. Mais $P_n(1) = 1$ ne converge pas vers 0 quand n tend vers l'infini, donc par continuité de l'évaluation en 1 pour la topologie $\mathcal{T}_1$, la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers le polynôme nul pour la topologie $\mathcal{T}_1$.

b) Soit $P_n = \prod_{i=-n}^{n}(X-i)$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, si n est assez grand ($n > |k|$), alors $||P_n||_k = |P_n(k)| = 0$. Donc par définition de la topologie $\mathcal{T}_1$, la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le polynôme nul pour $\mathcal{T}_1$. Mais $a_1(P_n) = (-1)^n(n!)^2$ ne converge pas vers 0 quand n tend vers l'infini, donc par continuité des projections pour la topologie produit, la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers le polynôme nul pour la topologie $\mathcal{T}_2$.

c) Si A est l'ensemble des $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $|a_i(P)| \leq i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, alors $\Phi(A)$ est contenu dans $\prod_{i\in\mathbb{N}}[-i,i]$. Comme $\prod_{i\in\mathbb{N}}[-i,i]$ est compact par le théorème de Tychonov, donc fermé car $\mathbb{R}\mathbb{N}$ est séparé, l'adherence de $\Phi(A)$ est contenue dans $\prod_{i\in\mathbb{N}}[-i,i]$. Comme tout fermé d'un compat est compact, le résultat s'en déduit.

[En fait, on peut montrer, même si c'est inutile, que $\overline{\Phi(A)} = \prod_{i\in\mathbb{N}}[-i,i]$. En effet, pour tout $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, l'image par l'application Φ de la suite de polynômes $(P_n = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$, car pour tout $i \in \mathbb{N}$, si n est assez grand ($n \geq i$), alors $a_i(P) = a_i$].

d) Comme les coefficients de PQ et de $P \circ Q$ sont des polynômes en les coefficients de P et de Q, et par les propriétés des topologies produits, les applications de multiplication et de composition de deux polynômes sont continues pour $\mathcal{T}_2$.

$\boxed{\text{Exercice II}}$ (1) Soit F un sous-groupe fermé de $\mathbb{R}^N$. Soit F_1 un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^N$, contenu dans F, de dimension maximale (éventuellement nulle). En particulier, F_1 est isomorphe (en tant que groupe topologique additif) à $\mathbb{R}^q$, pour un $q \in \mathbb{N}$. Soit F_2 l'intersection de F et de l'orthogonal de F_1 (pour le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^N$). Alors F_2 est un sous-groupe de F, et F est isomorphe (en tant que groupe topologique) au groupe produit $F_1 \times F_2$, par l'application, où $\pi : \mathbb{R}^N \to F_1$ est la projection orthogonale (qui est linéaire), définie par $x \mapsto (\pi(x), x - \pi(x))$.

Montrons que F_2 est discret. Sinon, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans F_2 tendant vers 0. Quitte à extraire, $\big(x_n/||x_n||\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un vecteur v non nul, et la droite vectorielle D passant par v est contenue dans l'adhérence de F (chacun des points de D étant limite de multiples entiers de x_n). Donc $F_1 + D$ serait un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^N$, contenu dans F, de dimension strictement supérieure à celle de F_1, contradiction.

Montrons que le groupe F_2 est isomorphe à $\mathbb{Z}^p$ avec $p \in \mathbb{N} \cap [0, N-q]$, ce qui conclut. Si $F = F_1$, le résultat est clair. Si $F \neq F_1$, soit e_1 un élément non nul de norme minimale dans F_2 (qui existe, car l'intersection d'un compact de $\mathbb{R}^n$ et d'une partie discrète de $\mathbb{R}^n$ est finie). Construisons par récurrence sur $i \in \mathbb{N} - \{0\}$, tant que c'est possible, un vecteur e_i, tel que $e_1, \dots, e_i$ soient linéairement indépendants et que $\mathbb{Z}e_1 + \cdots + \mathbb{Z}e_i$ soit contenu dans F_2 (donc en particulier i est au plus la dimension de l'orthogonal de F_1, c'est-à-dire $N - q$). Supposons $e_1, \dots, e_i$ construits. Soit V_i le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^N$ engendré par $e_1, \dots, e_i$.

Si F_2 n'est pas contenu dans V_i, soit e_{i+1} un élément de F_2, n'appartenant pas à V_i, tel que

$$||e_{i+1}|| = \min_{x\in F_2 - V_i} \min_{v\in V_i} ||x + v|| \ .$$

Ceci existe, car l'application $f : x \mapsto d(v, V_i) = \min_{v\in V_i} ||x - v||$ est continue, strictement positive en dehors de V_i qui est fermé, et sa borne inférieure sur $F_2 - V_i$ est à chercher dans une partie finie de $F_2 - V_i$, par discrétude de F_2 et par invariance par $\mathbb{Z}e_1 + \cdots + \mathbb{Z}e_i$ de $F_2 - V_i$. Alors e_{i+1} convient.

Si F_2 est contenu dans V_i, montrons que $F_2 = \mathbb{Z}e_1 + \cdots + \mathbb{Z}e_i$, ce qui termine la récurrence, et montre le résultat. Sinon, soit $x \in F_2$ tel que $x \notin \mathbb{Z}e_1 + \cdots + \mathbb{Z}e_i$. Alors, quitte à enlever à x un élément de $\mathbb{Z}e_1 + \cdots + \mathbb{Z}e_i$, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_i \in \mathbb{R}$ tels que $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_k e_k$ et $\lambda_k \neq 0$, $|\lambda_k| \leq \frac{1}{2}$. Mais alors $x \in F_2 - V_{k-1}$ (en posant par convention $V_0 = \{0\}$), et $\min_{v \in V_{k-1}} ||x+v|| \leq ||\lambda_k e_k|| < ||e_k||$, ce qui contredit la propriété de minimalité de e_k.

(2) Notons que δ est bien définie, car pour $\epsilon > 1$, $V_\epsilon(B_\epsilon) = \mathbb{R}^N$ (et en particulier $\delta \leq 1$). L'application $\delta : X \times X \to \mathbb{R}$ est clairement positive ou nulle, nulle sur la diagonale et symétrique. Elle s'annule seulement sur la diagonale : si $\delta(F, F') = 0$, alors pour tout $x \in F$, pour tout $\epsilon > 0$ suffisamment petit, $d(x, F') \leq \epsilon$, donc $x \in F'$ puisque F' est fermé, et $F \subset F'$; d'où, par symétrie, si $\delta(F, F') = 0$, alors $F = F'$.

Soient A, B des parties de $\mathbb{R}^N$ et $\epsilon, \eta > 0$; remarquons que

$$V_\epsilon(A) = \{x \in \mathbb{R}^N \ : \ \exists\, y \in A,\ d(x,y) < \epsilon\}\ ,$$

donc $V_\epsilon(V_\eta(A)) \subset V_{\epsilon+\eta}(A)$, par inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}^N$ [si $x \in V_\epsilon(V_\eta(A))$, alors il existe $y \in V_\eta(A)$ tel que $d(x,y) < \epsilon$, donc il existe $z \in A$ tel que $d(y,z) < \epsilon$, d'où $d(x,z) < \epsilon+\eta$ et $x \in V_{\epsilon+\eta}(A)$] ; de plus, si $\epsilon \leq \eta$ et $A \subset A'$, alors $B_\epsilon \subset B_\eta$ et $V_\epsilon(A) \subset V_\eta(B)$; enfin, $V_\epsilon(A \cup B) = V_\epsilon(A) \cup V_\epsilon(B)$.

Montrons que δ vérifie l'inégalité triangulaire. Soient $F, F', F'' \in X$ et $\epsilon, \eta > 0$ tels que $F \subset V_\epsilon(F' \cup B_\epsilon)$, $F' \subset V_\epsilon(F \cup B_\epsilon)$, $F' \subset V_\eta(F'' \cup B_\eta)$ et $F'' \subset V_\eta(F' \cup B_\eta)$. Donc

$$\begin{aligned} F \subset V_\epsilon(F' \cup B_\epsilon) &= V_\epsilon(F') \cup V_\epsilon(B_\epsilon) \subset V_\epsilon(V_\eta(F'' \cup B_\eta) \cup V_\epsilon(B_\epsilon) \\ &\subset V_{\epsilon+\eta}(F'') \cup V_{\epsilon+\eta}(B_\eta) \cup V_\epsilon(B_\epsilon) \subset V_{\epsilon+\eta}(F'' \cup B_{\epsilon+\eta})\ . \end{aligned}$$

De manière symétrique, $F'' \subset V_{\epsilon+\eta}(F \cup B_{\epsilon+\eta})$. Donc $\delta(F, F'') \leq \epsilon + \eta$. En prenant la borne inférieure sur tous les tels ϵ et η, nous avons donc bien

$$\delta(F, F'') \leq \delta(F, F') + \delta(F', F'')\ .$$

(3) Supposons tout d'abord que $(F_i)_{i \in \mathbb{N}}$ converge vers F pour la distance δ.

a) Soit $x \in F$. Par définition de la distance δ, pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $N_p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $i \geq N_p$, il existe $x_{i,p} \in F_i$ tel que $d(x, x_{i,p}) < \frac{1}{p+1}$. Nous pouvons supposer que la suite $(N_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante, et nous posons alors $x_i = 0$ si $i < N_0$, et $x_i = x_{i,p}$ si $N_p \leq i < N_{p+1}$. Alors clairement $x_i \in F_i$ et $x_i \to_{i \to +\infty} x$.

b) Soit $(i_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite strictement croissante dans $\mathbb{N}$, soit x_{i_k} un élément de F_{i_k} pour tout $k \in \mathbb{N}$. Supposons que x_{i_k} converge vers un élément x de $\mathbb{R}^N$ quand $k \to +\infty$. En particulier, la suite $(x_{i_k})_{k \in \mathbb{N}}$ reste bornée, donc pour tout $\epsilon > 0$, pour k assez grand, il existe par définition de δ un point $x_{k,\epsilon}$ dans F tel que $d(x_{i_k}, x_{k,\epsilon}) \leq \epsilon$. Donc x est limite de points de F. Mais comme F est fermé, ceci implique que $x \in F$.

Maintenant, supposons que les assertions a) et b) soient vérifiées, et montrons que $(F_i)_{i \in \mathbb{N}}$ converge vers F pour la distance δ.

Fixons $\epsilon > 0$. Puisque $K = F \cap \overline{B}(0, \frac{1}{\epsilon})$ est fermé dans un compact, donc est compact et métrisable, il existe une suite finie $(x_j)_{1 \leq j \leq m}$ dans K telle que pour tout x dans K, nous ayons $d(x, x_j) < \frac{\epsilon}{2}$. Par l'assertion a), pour tout $j \in \mathbb{N} \cap [1, m]$, il existe une suite $(x_{i,j})_{i \in \mathbb{N}}$ telle que $x_{i,j} \in F_i$ et $x_{i,j} \to_{i \to \infty} x_j$. Par finitude de m, il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $i \geq N'$, pour tout $j \in \mathbb{N} \cap [1, m]$, nous ayons $d(x_{i,j}, x_j) \leq \frac{\epsilon}{2}$. Donc par inégalité triangulaire, $K \subset V_\epsilon(F_i)$, et donc, pour tout $i \geq N$, nous avons $F \subset V_\epsilon(F_i \cup B_\epsilon)$.

Montrons par l'absurde qu'il existe aussi $N'' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $i \geq N''$, nous avons $F_i \subset V_\epsilon(F \cup B_\epsilon)$, ce qui conclut. Sinon, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $i_n \geq n$ et $x_{i_n} \in F_{i_n}$ tel que $x_{i_n} \notin V_\epsilon(F \cup B_\epsilon)$. Nous pouvons supposer que la suite $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante. En particulier, la suite $(x_{i_n})_{n\in\mathbb{N}}$ reste dans le compact $\overline{B}(0, \frac{1}{\epsilon})$, donc converge quitte à extraire vers $x \in \mathbb{R}^N$. Mais $d(x_{i_n}, F) \geq \epsilon$, et donc par passage à la limite, $d(x, F) \geq \epsilon > 0$, et x n'appartient pas à F, ce qui contredit l'assertion b).

(4) Puisque tout est métrisable, nous pouvons utiliser des suites pour montrer la continuité. Soit donc (g_i, F_i) une suite convergeant vers (g, F) dans $G \times X$. Montrons que g_iF_i converge vers gF en utilisant la question 3).

Pour tout $y \in gF$, posons $x = g^{-1}y \in F$. Alors puisque F_i converge vers F et par a), il existe x_i dans F_i convergeant vers x. Posons $y_i = g_ix_i \in g_iF_i$. Alors par continuité de l'action de $\mathrm{GL}_N(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^N$, nous avons $y_i = g_ix_i \to gx = y$, ce qui montre a).

Soit y_{i_k} un élément de $g_{i_k}F_{i_k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, convergeant vers $y \in \mathbb{R}^N$. Posons $x_{i_k} = g_{i_k}^{-1}y_{i_k} \in F_{i_k}$, qui converge vers $x = g^{-1}y$ par continuité de l'inverse et de l'action de $\mathrm{GL}_N(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^N$. Puisque F_i converge vers F et par b), nous avons $x \in F$, et donc $y = gx \in gF$, ce qui montre b).

(5) Si $N = 2$, le groupe $\mathrm{SO}(2)$, compact, homéomorphe à un cercle, agit transitivement sur le sous-espace Z de X formé des sous-groupes isomorphes à $\mathbb{R}$, car ce sont les droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$. Le noyau de l'action est $\{\pm\mathrm{Id}\}$. L'application orbitale $\mathrm{SO}(2) \to Z$ définie par $g \mapsto g(\mathbb{R} \times \{0\})$, continue, surjective, induit par passage au quotient une application $\mathrm{SO}(2)/\{\pm\mathrm{Id}\}$, continue, bijective, de source compacte (car $\{\pm\mathrm{Id}\}$ est un sous-groupe fermé de $\mathrm{SO}(2)$, donc $\mathrm{SO}(2)/\{\pm\mathrm{Id}\}$ est séparé et image d'un compact par une application continue) et de but séparé, donc est un homéomorphisme. De plus, l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathrm{SO}(2)$ qui à $\theta \in \mathbb{R}$ associe la rotation d'angle θ, induit un homéomorphisme de $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ dans $\mathrm{SO}(2)/\{\pm\mathrm{Id}\}$. Donc Z est homéomorphe à un cercle.

(6) Rappelons que par le théorème de Bolzano-Weierstrass, pour tout $\epsilon > 0$, tout espace métrique compact X admet une partie A finie ϵ-dense (i.e. telle que tout point de X soit à distance au plus ϵ d'un point de A). Comme X est un espace métrique, montrons que de toute suite $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dans X, on peut extraire une sous-suite convergente.

Nous pouvons supposer que F_i est non nul, donc infini, pour tout i. Pour tous $i, k \in \mathbb{N}$, soit $K_{i,k}$ une partie finie $\frac{1}{k+1}$-dense de $F_i \cap \overline{B}(0, k)$. Nous pouvons supposer que $K_{i,k} \subset K_{i,k+1}$. Numérotons $(x_{i,j})_{j\in\mathbb{N}}$ les éléments de $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} K_{i,k}$, de manière à ce que les éléments de $K_{i,k+1} - K_{i,k}$ soient de numéro supérieurs à ceux de $K_{i,k}$. Ainsi, pour tout $j \in \mathbb{N}$, la suite $(x_{i,j})_{i\in\mathbb{N}}$ reste dans un compact de $\mathbb{R}^N$, donc converge quitte à extraire. Par extraction diagonale, nous pouvons supposer que pour tout $j \in \mathbb{N}$, la suite $(x_{i,j})_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers $x_j \in \mathbb{R}^N$. Notons F l'adhérence de $\{x_j \ : \ j \in \mathbb{N}\}$. Alors F est un fermé de $\mathbb{R}^N$. De plus, pour tout $y \in F$, il existe $y_i \in F_i$ tel que y_i converge vers y. Et si $y_{i_n} \in F_{i_n}$ converge vers y, alors les y_{i_n} restent dans un compact, donc sont proches d'éléments $x_{i_n,j}$ avec j borné, donc y appartient à F (qui est fermé). Enfin, si $y, z \in F$, alors soient $y_i, z_i \in F_i$ tels que y_i converge vers y et z_i converge vers z. Alors $y_i - z_i \in F_i$ converge vers $y - z$, donc $y - z \in F$, et F est un sous-groupe. Par 3), la suite $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge donc vers F dans X.

(7) Soit Y l'ensemble des sous-groupes fermés de $\mathbb{R}^N$ isomorphes à $\mathbb{Z}^N$. La preuve de (1) montre de plus qu'un élément de Y est discret, et engendré (comme groupe abélien) par des vecteurs $(e_1, \ldots, e_N)$ linéairement indépendants. Considérons l'application orbitale $\widetilde{\Theta} : G \to Y$ définie par $g \mapsto g(\mathbb{Z}^N)$. Cette application est continue, surjective par ce qui

précède, et passe au quotient en une application continue $\Theta : G/\mathrm{GL}_N(\mathbb{Z}) \to X$ qui est bijective, car le stabilisateur de $\mathbb{Z}^N$ sous l'action de G est exactement $\mathrm{GL}_N(\mathbb{Z})$. Si F est un élément de Y, engendré (comme groupe abélien) par des vecteurs $(e_1, \dots, e_N)$ linéairement indépendants, et si $F' \in Y$ est suffisamment proche de F pour la distance δ, alors en prenant des vecteurs $e'_1, \dots, e'_N$ de F' proches de $e_1, \dots, e_N$, la suite $(e'_1, \dots, e'_N)$ sera linéairement indépendante, et engendre F', ce qui montre que Y est ouvert. La matrice de passage de la base vectorielle $(e_1, \dots, e_N)$ à la base vectorielle $(e'_1, \dots, e'_N)$ est donc proche de l'identité. Donc par continuité de la projection canonique $G \to G/\mathrm{GL}_N(\mathbb{Z})$, cela montre la continuité de la réciproque de Θ.