Introduction aux marches aléatoires en milieu aléatoire

Laurent Tournier
Sous la direction de Christophe Sabot

Introduction

Les marches aléatoires en milieu aléatoire ont été introduites il y a une trentaine d'années pour comprendre le rôle que pouvait jouer sur une marche aléatoire une perturbation de l'environnement qu'elle traverse, ce modèle étant plus proche de certaines réalités physiques qu'un environnement uniforme. Le premier modèle, voué à l'étude du déplacement d'enzymes le long de brins d'ADN, était unidimensionnel. Il a donné lieu à de multiples développements mathématiques qui ont fait apparaître des comportements légèrement différents de celui des marches aléatoires simples, en particulier d'intéressants phénomènes de ralentissement. La situation en dimension plus grande est encore assez mal comprise. Je présente un rapide survol de quelques résultats marquants en me focalisant sur la question de la balisticité de la marche, qui est au coeur de multiples articles, et de mon sujet de thèse.

1 Le modèle

Le cas étudié ici est celui d'une marche aléatoire aux plus proches voisins et à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 1$; ceci dit, la définition suivante s'étend sans difficulté à des graphes plus généraux.

Notons $(e_1, \ldots, e_d)$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$, $\mathcal{V} = \{\pm e_1, \ldots, \pm e_d\}$ et $\mathcal{P}$ l'ensemble des probabilités sur $\mathcal{V}$. Une façon naturelle et assez générale de définir une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$ consiste à se donner une famille $\omega = (\omega(x, \cdot))_{x \in \mathbb{Z}^d} \in \mathcal{P}^{\mathbb{Z}^d}$, et à introduire alors une chaîne de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ sur $\mathbb{Z}^d$ dont les probabilités de transition sont décrites par ω, c'est à dire : pour $x \in \mathbb{Z}^d$ et $e \in \mathcal{V}$, pour tout n,

$$P(X_{n+1} = X_n + e | X_n = x) = \omega(x, e).$$

La famille $\omega = (\omega(x, \cdot))_{x \in \mathbb{Z}^d} \in \Omega$ est appelée l'*environnement* de la marche, et on notera $P_{x,\omega}$ la loi de la chaîne de Markov issue de $x \in \mathbb{Z}^d$ et de transition définie ci-dessus.

Dans le cas des marches aléatoires en milieu aléatoire, l'environnement ω est lui-même une variable aléatoire. On se donne donc une loi $\mathbb{P}$ sur $\Omega = \mathcal{P}^{\mathbb{Z}^d}$, et le processus $(X_n)_{n \geq 0}$ auquel on s'intéresse est obtenu en tirant d'abord ω selon $\mathbb{P}$ puis la chaîne de Markov selon $P_{x,\omega}$ ($x \in \mathbb{Z}^d$) : chaque tirage de la marche consiste en un tirage de l'environnement et un tirage de la chaîne de Markov sous cet environnement. Ceci se formalise en disant que le processus $(X_n)_{n \geq 0}$ suit la loi :

$$P_x = \mathbb{E}[P_{x,\omega}(\cdot)].$$

On parle alors de loi *moyennée*, ou encore *annealed*, par opposition à la loi $P_{x,\omega}$ à environnement fixé, dite *quenched*[1]. Dans la suite, on notera $(X_n)_{n \geq 0}$ le processus canonique défini sur $(\mathbb{Z}^d)^{\mathbb{N}}$.

[1]Ce vocabulaire vient de la métallurgie : *quenched* se traduit par «trempé» et *annealed* par «recuit». La trempe consiste à

Il est important de noter que, sauf cas dégénéré, sous P_0, $(X_n)_{n\geq 0}$ *n'est pas* une chaîne de Markov. Ceci peut se comprendre intuitivement : conditionner par rapport à $X_0, \dots, X_n$ apporte de l' information sur l'environnement aux points $X_0, \dots, X_{n-1}$ (les points à partir desquels une transition a déjà eu lieu) donc, si $X_n \in \{X_0, \dots, X_{n-1}\}$, $X_{n+1} - X_n$ n'est pas indépendant de $X_0, \dots, X_n$. Dit autrement, conditionnellement au fait qu'une certaine transition $x \to x + e$ a déjà été effectuée par la marche, la loi de l'environnement n'est plus $\mathbb{P}$: cette transition est favorisée, renforcée, et la marche a une probabilité plus grande de l'emprunter lors de ses prochains passages en x.

On supposera toujours dans la suite que les variables $\omega(x, \cdot)$, $x \in \mathbb{Z}^d$, sont indépendantes et suivent la même loi :

$$\mathbb{P} = \mu^{\otimes \mathbb{Z}^d}, \text{ où } \mu \text{ est une probabilité sur } \mathcal{P}.$$

Dès lors, la loi *annealed* P_0 est invariante par translation et, sous P_0, si $X_n \notin \{X_0, \dots, X_{n-1}\}$, le pas suivant, $X_{n+1} - X_n$, est **indépendant** de $X_0, \dots, X_{n-1}$, ce qui est essentiel dans l'étude de cette marche aléatoire en milieu aléatoire.

On introduit enfin la notation $d(x, \omega) = E_{x,\omega}[X_1 - X_0] = \sum_{e \in \mathcal{V}} \omega(x, e)e$ pour $x \in \mathbb{Z}^d$ et $\omega \in \Omega$: la dérive en x.

2 Quelques résultats en dimension 1

Le modèle unidimensionnel a été le premier à être étudié, et est maintenant assez bien compris, en particulier grâce à nombre de spécificités qui le rendent beaucoup plus aisé à aborder que les modèles de dimension supérieure. Entre autres, citons : la réversibilité de la chaîne de Markov quel que soit ω, la possibilité d'écrire explicitement les fonctions harmoniques pour $P_{x,\omega}$, la stationnarité sous P_0 de la suite $T_n - T_{n-1}$ où T_n est le temps d'atteinte de l'entier n.

On dispose ainsi d'un théorème dû à Solomon [1] qui caractérise simplement les différents comportements asymptotiques de $(X_n)_n$ sous P_0 :

Théorème – En notant $\rho = \frac{\omega(0,-1)}{\omega(0,1)}$, on a :
- si $\mathbb{E}[\ln \rho] < 0$, P_0-p.s., $\lim_n X_n = +\infty$ (transience vers $+\infty$) ;
- si $\mathbb{E}[\ln \rho] > 0$, P_0-p.s., $\lim_n X_n = -\infty$ (transience vers $-\infty$) ;
- si $\mathbb{E}[\ln \rho] = 0$, P_0-p.s., $\limsup_n X_n = +\infty$ et $\liminf_n X_n = -\infty$ (récurrence).

De plus, P_0-p.s., la suite $\left(\frac{X_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ admet une limite v déterministe, donnée par :
- si $\mathbb{E}[\rho] < 1$, $v = \frac{1-\mathbb{E}[\rho]}{1+\mathbb{E}[\rho]} > 0$;
- si $\mathbb{E}[\rho^{-1}] < 1$, $v = -\frac{1-\mathbb{E}[\rho^{-1}]}{1+\mathbb{E}[\rho^{-1}]} < 0$;
- sinon (c'est à dire si $\frac{1}{\mathbb{E}[\rho^{-1}]} \leq 1 \leq \mathbb{E}[\rho]$), $v = 0$.

On note que c'est la quantité $\mathbb{E}[\ln \rho]$ qui caractérise la transience de la marche, et non $\mathbb{E}[\omega(0,1) - \omega(0,-1)]$ (la dérive moyenne) comme on aurait pu s'y attendre par analogie avec les marches aléatoires simples. En particulier, pour certaines lois μ (rappelons que $\mathbb{P} = \mu^{\otimes \mathbb{Z}^d}$), on peut avoir simultanément $\mathbb{E}[\ln \rho] > 0$ et $\mathbb{E}[\omega(0,1) - \omega(0,-1)] > 0$: la marche est transiente vers la gauche alors que la moyenne des dérives des sites est orientée vers la droite. Ceci se comprend intuitivement par la concentration en 0 de la variable $\omega(0,1)$, traduite par l'hypothèse $\mathbb{E}[\ln \rho] > 0$, qui fait des sites ayant une dérive vers la gauche des «barrières» sur lesquelles la marche se réfléchit et oscille, comme «piégée», jusqu'à dépasser une nouvelle barrière plus à gauche, etc. Dans un tel cas, on a $\frac{X_n}{n} \to_n 0$ P_0-p.s., ce qui témoigne de la lenteur de la transience.

Des résultats précisent la faible vitesse de la convergence de X_n/n vers 0 (dernier cas du théorème) : (sous quelques hypothèses sur la loi,) dans le cas transient, le théorème de Kesten-Kozlov-Spitzer [2] montre la convergence en loi de la suite $\frac{X_n}{n^s}$ où $\mathbb{E}[\rho^s] = 1$ et dans le cas récurrent le théorème de Sinai [3] montre la convergence en loi de $\frac{X_n}{(\ln n)^2}$ (à comparer avec le théorème central limite usuel).

plonger un matériau chaud dans un fluide plus froid ; c'est un refroidissement brutal de la pièce qui a pour objectif de figer la structure obtenue lors de la mise en solution. Par analogie, on utilise le même terme pour qualifier la situation sous la loi $P_{x,\omega}$ c'est à dire à environnement fixé («figé»). Par opposition, le recuit est une opération de chauffage de pièces métalliques, et c'est sous ce nom que l'on désigne la situation en moyenne, sous P_x.

3 Notion de transience en dimension supérieure

Suite à l'impossibilité d'appliquer les méthodes précédentes, la situation est loin d'être aussi bien connue en dimension $d \geq 2$ qu'en dimension 1. Le phénomène le plus étudié est la *transience dans une direction* : pour $l \in \mathbb{S}^{d-1}$, $(X_n)_n$ est transiente dans la direction l si $X_n \cdot l \to_n \infty$. Les premiers résultats dans ce domaine sont dus à Kalikow [4].

On constate que dans certains cas la transience P_0-p.s. est presque évidente : s'il existe $l \in \mathbb{S}^{d-1}$ et $\eta > 0$ tel que, P_0-p.s., $d(0,\omega) \cdot l > \eta$, alors des arguments de sous-martingale suffisent à conclure. La condition évoquée signifie que 0 n'appartient pas à l'enveloppe convexe $\mathcal{K}$ du support de la loi de $d(0,\omega)$ (la dérive) ; la difficulté est donc de trouver des situations dans lesquelles 0 appartient à $\mathcal{K}$ (voire à l'intérieur de $\mathcal{K}$) et où la marche est P_0-p.s. transiente dans une direction l.

Dans la suite, on supposera toujours que μ, la loi de $\omega(x,\cdot)$ (x quelconque), vérifie une condition d'*ellipticité stricte* : il existe $\kappa \in (0,1)$ tel que, $\mathbb{P}$-p.s.,

$$\text{pour tout } e \in \mathcal{V},\ \omega(x,e) \geq \kappa.$$

Pour exploiter les particularités de $\mathbb{P}$, on introduit un découpage de la trajectoire par une suite de temps d'arrêt : on note d'abord

$$\begin{aligned}
&T^l_u = \inf\{n \geq 0 \mid X_n \cdot l \geq u\} \text{ pour } l \in \mathbb{S}^{d-1} \text{ et } u > 0,\\
&D = \inf\{n \geq 0 \mid X_n \cdot l < X_0 \cdot l\}
\end{aligned}$$

puis, pour $l \in \mathbb{S}^{d-1}$ et $a > 0$, on définit les suites $(S_k)_{k\geq 0}$ et $(R_k)_{k\geq 1}$, et la suite $(M_k)_{k\geq 0}$ des maxima successifs par (voir figure 1) :

$$\begin{aligned}
&S_0 = 0,\\
&M_0 = l \cdot X_0,\\
\\
&S_1 = T^l_{M_0+a} = \inf\{n \geq 0 \mid X_n \cdot l \geq M_0 + a\},\\
&R_1 = S_1 + D \circ \Theta_{S_1} = \inf\{n \geq S_1 \mid X_n \cdot l < X_{S_1} \cdot l\},\\
&M_1 = \sup\{X_n \cdot l \mid 0 \leq n \leq R_1\}
\end{aligned}$$

et, pour $k \geq 1$, par récurrence :

$$\begin{aligned}
&S_{k+1} = T^l_{M_k+a} = \inf\{n \geq 0 \mid X_n \cdot l \geq M_k + a\},\\
&R_{k+1} = S_{k+1} + D \circ \Theta_{S_{k+1}} = \inf\{n \geq S_{k+1} \mid X_n \cdot l < X_{S_{k+1}} \cdot l\},\\
&M_{k+1} = \sup\{X_n \cdot l \mid 0 \leq n \leq R_{k+1}\}.
\end{aligned}$$

Dans cette construction, toutes les variables peuvent *a priori* être infinies, et on a bien sûr $0 = S_0 \leq S_1 \leq R_1 \leq S_2 \leq R_2 \leq \cdots$, avec des inégalités strictes tant que les variables sont finies.

Les portions de trajectoire entre S_k et R_k dépendent de sites distincts des sites visités avant S_k, ce qui permet de montrer l'inégalité $P_0(R_k < \infty) \leq P_0(D < \infty)^k$. Si $P_0(D < \infty) < 1$, il existe donc P_0-p.s. un entier k tel que $R_k = \infty$. Ceci permet de montrer la loi du 0-1 suivante :

Proposition. – Pour tout $l \in \mathbb{S}^{d-1}$, $P_0(A_l \cup A_{-l}) \in \{0,1\}$ où $A_l = \{X_n \cdot l \underset{n}{\to} +\infty\}$.

Il est intéressant de noter que la loi du 0-1 pour l'événement A_l lui-même a été démontrée en dimension 2 par Zerner et Merkl [5], mais qu'elle n'est que conjecturée au-delà.

Dans son article, Kalikow introduit des chaînes de Markov auxilliaires qui ont la particularité de posséder la même distribution de points de sortie de certains ensembles que $(X_n)_{n\geq 0}$ sous P_0, ramenant le problème à des méthodes markoviennes. Il en déduit un critère qui, sous une forme faible (mais pratique), s'écrit :

Proposition. – Soit $l \in \mathbb{S}^{d-1}$. On suppose $\mathbb{E}[(d(0,\omega)\cdot l)_+] > \frac{1}{\kappa}\mathbb{E}[(d(0,\omega)\cdot l)_-]$ (κ étant le paramètre apparaissant dans la condition d'ellipticité). Alors : P_0-p.s., $\lim_n X_n = +\infty$.

Cette proposition fournit les premiers exemples non évidents de transience. En particulier, elle permet de traiter des cas en apparence évidents et pourtant difficiles à justifier rigoureusement : en dimension 2, lorsque 99,99% des sites présentent une forte dérive vers la droite et 0,01% ont une dérive nulle (ou légèrement vers la gauche), est-ce que la marche est transiente vers la droite ?

Bien plus tard, Sznitman et Zerner [6] ont démontré que la même condition suffit en fait à avoir une loi forte des grands nombres : $\frac{X_n}{n} \to_n v$ avec $v \neq 0$ (déterministe).

4 Conditions de balisticité

La marche $(X_n)_n$ est *balistique* s'il existe un vecteur $v \neq 0$ tel que P_0-p.s., $\frac{X_n}{n} \to_n v$. En particulier, bien sûr, la marche est alors transiente dans toute direction l telle que $l \cdot v > 0$.

Structure de renouvellement

Pour obtenir un tel résultat, on se ramène à la loi forte des grands nombres usuelle en définissant une *structure de renouvellement*, c'est à dire un découpage de la trajectoire en tronçons indépendants et identiquement distribués (ou presque). Les tronçons en question vont être obtenus à partir de la suite de temps d'arrêt introduite dans la partie précédente.

Supposons la marche transiente dans la direction l sous P_0. Alors $P_0(D < \infty) < 1$ et, pour tout k, si $R_k < \infty$, alors $S_k < \infty$ également. Obtient alors l'existence presque-sûre sous P_0 d'un entier $K \geq 0$ tel que $S_K < \infty$ et $R_K = \infty$. On note $\boxed{\tau_1 = S_K}$. Bien sûr, τ_1 ***n'est pas un temps d'arrêt*** puisqu'il dépend de toute la trajectoire. Par construction, cet instant, lorqu'il est fini, est tel que, pour tout $n < \tau_1$, $X_n \cdot l < X_{\tau_1} \cdot l$, et $D \circ \Theta_{\tau_1} = \infty$: pour tout $n \geq \tau_1$, $X_n \cdot l \geq X_{\tau_1} \cdot l$. Les sites visités avant et après τ_1 sont donc distincts et par suite associés à des probabilités de transitions indépendantes, ce qui permet de démontrer :

Proposition. – On définit la tribu : $\mathcal{G}_1 = \sigma(\tau_1, (X_{n\wedge\tau_1})_{n\geq 0}, (\omega(y,\cdot))_{y\cdot l < X_{\tau_1}\cdot l})$.
La variable aléatoire $((X_{\tau_1+n} - X_{\tau_1})_{n\geq 0}, (\omega(X_{\tau_1}+y,\cdot))_{y\cdot l\geq 0})$ est indépendante de $\mathcal{G}_1$ sous P_0, et sa loi sous P_0 est celle de $((X_n)_{n\geq 0}, (\omega(y,\cdot))_{y\cdot l\geq 0})$ sous $P_0(\cdot|D=\infty)$.

On itère alors cette construction. Considérant τ_1 comme une fonction de $X.$, on définit, sur $\{\tau_1 < \infty\}$ (voir figure 2), par récurrence :

$$\tau_{k+1} = \tau_1(X.) + \tau_k(X_{\tau_1+\cdot} - X_{\tau_1}).$$

Tous ces temps sont finis P_0-p.s., et on a enfin :

Théorème – Propriété de renouvellement
On suppose $P_0(A_l) = 1$. Sous P_0, les variables aléatoires $(X_{\tau_1}, \tau_1), (X_{\tau_2} - X_{\tau_1}, \tau_2 - \tau_1), \ldots, (X_{\tau_{k+1}} - X_{\tau_k}, \tau_{k+1} - \tau_k), \ldots$ sont indépendantes. De plus, sous P_0, $(X_{\tau_2} - X_{\tau_1}, \tau_2 - \tau_1), \ldots, (X_{\tau_{k+1}} - X_{\tau_k}, \tau_{k+1} - \tau_k), \ldots$ ont même loi que (X_{τ_1}, τ_1) sous $P_0(\cdot|D=\infty)$.

Grâce à ce théorème, on peut appliquer la loi forte des grands nombres usuelle lorsque certaines quantités sont intégrables, et obtenir :

Proposition. – On suppose $P_0(A_l) = 1$. Notons $X_n^* = \max\{|X_1|, \ldots, |X_n|\}$ pour $n \geq 0$.
– Si $E_0[X_{\tau_1}^*|D=\infty] < \infty$, alors $(X_n)_n$ admet p.s. une direction asymptotique :

$$P_0\text{-p.s.}, \ \frac{X_n}{|X_n|} \underset{n}{\longrightarrow} \widehat{v} = \frac{E_0[X_{\tau_1}|D=\infty]}{|E_0[X_{\tau_1}|D=\infty]|}.$$

– Si $E_0[\tau_1|D=\infty] < \infty$, alors la marche $(X_n)_n$ est p.s. balistique :

$$P_0\text{-p.s.}, \ \frac{X_n}{n} \underset{n}{\longrightarrow} v = \frac{E_0[X_{\tau_1}|D=\infty]}{E_0[\tau_1|D=\infty]} \neq 0.$$

L'inconvénient des hypothèses ci-dessus est de faire intervenir τ_1, qui dépend de toute la trajectoire, et est donc difficile à évaluer. Comme signalé à la fin de la partie précédente, le critère de Kalikow suffit à obtenir $E_0[\tau_1|D=\infty] < \infty$ et donc la balisticité. L'article de Sznitman [7] introduit une condition plus générale :

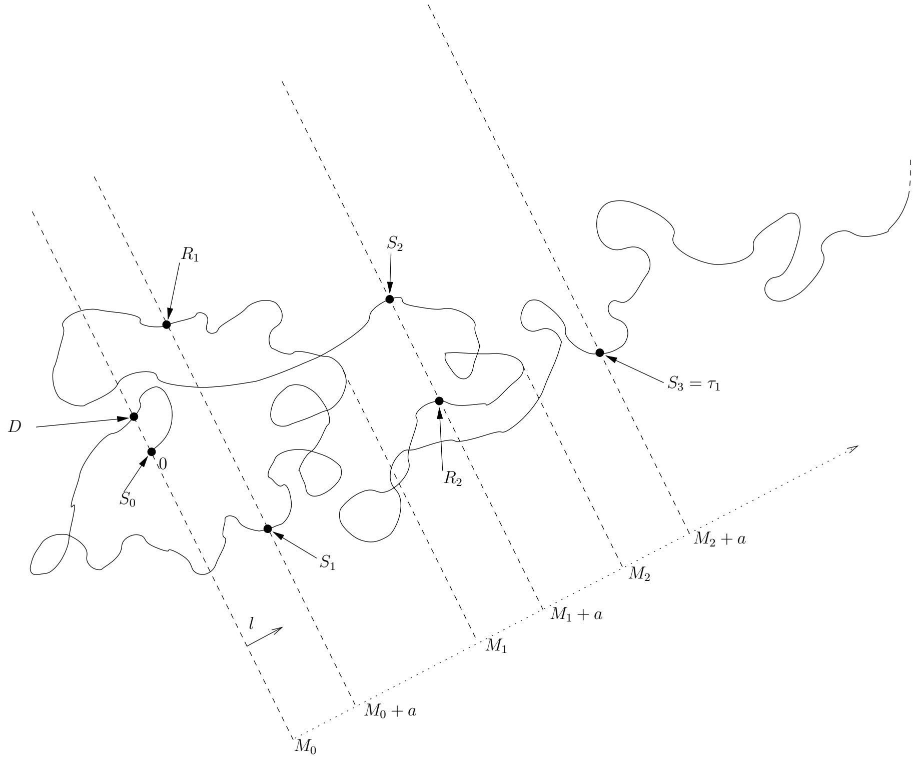

Fig. 1 – Définition de la structure de renouvellement.

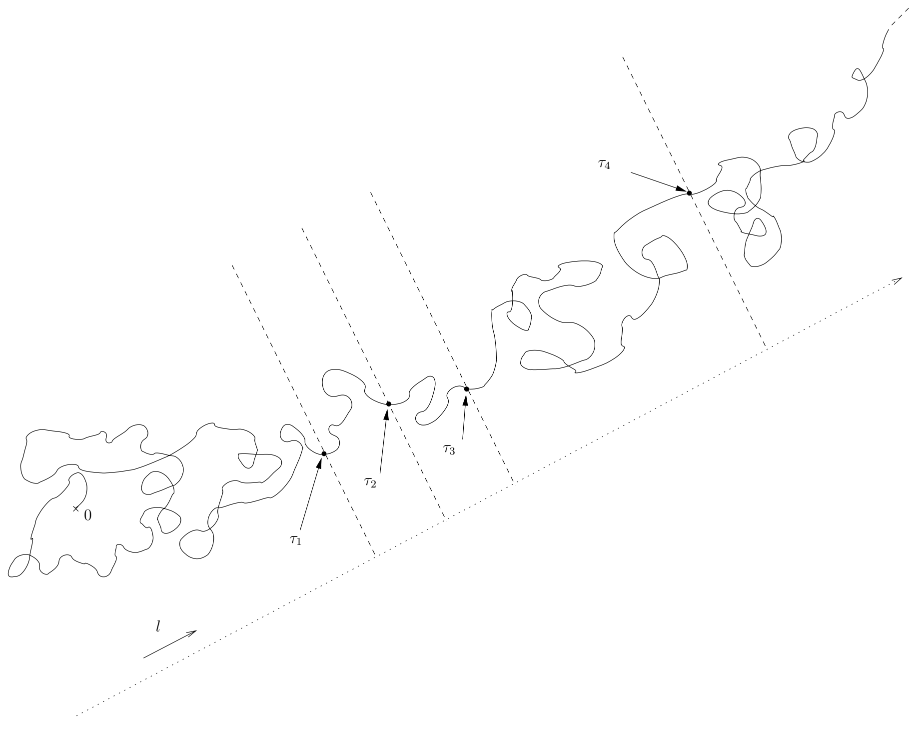

Fig. 2 – Itération de la construction

Condition (T)

Définition. – Soit $l \in \mathbb{S}^{d-1}$ et $a > 0$. La marche aléatoire $(X_n)_n$ *satisfait la condition (T) relativement à la direction* l *et au réel* $a > 0$, que l'on abrège en (T)$|l, a$, si les deux propriétés suivantes sont satisfaites :

(i) P_0-presque sûrement, $\lim_n X_n \cdot l = \infty$;

(ii) il existe $c > 0$ tel que $E_0[\exp(cX^*_{\tau_1})] < \infty$,

τ_1 étant défini selon la direction l et à l'aide du paramètre a. On rappelle que $X^*_{\tau_1} = \max\{|X_1|, \ldots, |X_{\tau_1}|\}$.

Apparemment, τ_1 apparaît toujours dans cette condition ; on a cependant une expression équivalente en terme de temps de sortie d'une bande :

Théorème – Soit $l_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$, $a > 0$. Pour $L > 0$ on définit la bande $U^l_{b,L} = \{x \in \mathbb{Z}^d \,|\, -bL \leq x \cdot l \leq L\}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) la condition (T) relative à l_0 et a est vérifiée ;

(ii) pour tout l dans un voisinage de l_0, pour tout $b > 0$, on a : $\limsup_{L\to\infty} \frac{1}{L} \ln P_0 \left(X_{T_{U^l_{b,L}}} \cdot l < 0 \right) < 0$.

On peut démontrer que la condition de Kalikow de la partie précédente implique (T). Le théorème essentiel sur la condition (T) est le suivant :

Théorème – On suppose $d \geq 2$. Sous la condition (T), on a, pour tout $\alpha < 1 + \frac{d-1}{d+1}$,

$$\limsup_{u\to\infty} \frac{1}{(\ln u)^\alpha} \ln P_0(\tau_1 > u) < 0.$$

Ceci assûre l'intégrabilité de τ_1 sous P_0 et donc sous $P_0(\cdot|D = \infty)$, et même d'ailleurs que τ_1 a des moments de tous ordres, ce qui permet d'obtenir en particulier un théorème central limite. La preuve du théorème ci-dessus, assez technique, passe par des estimations sur la probabilité de sortir de certaines boîtes par certains de leurs côtés (à l'aide de grandes déviations sur la suite $(X_{\tau_k})_k$) et par des arguments de renormalisation (empilement de petites boîtes dans une grande boîte).

Grandes déviations

On s'intéresse aux grandes déviations sous P_0 pour la suite $(\frac{X_n}{n})_n$ sous l'hypothèse (T). Voici tout d'abord une classification importante (on rappelle que l'on note $\mathcal{K}$ l'enveloppe convexe du support de la loi de $d(0, \omega)$) :

Définitions. – On dit que l'on se trouve dans le cas :
- *non-nestling*[2] si $0 \notin \mathcal{K}$;
- *marginal nestling* si $0 \in \partial\mathcal{K}$;
- *plain nestling* si 0 appartient à l'intérieur de $\mathcal{K}$,

la réunion des deux derniers cas formant le cas dit *nestling*, caractérisé par $0 \in \mathcal{K}$.

Cette classification traduit en particulier la capacité de l'environnement à créer des «pièges» : des parties de $\mathbb{Z}^d$ dans lesquelles la marche passe un temps relativement long avec grande probabilité. Ceci transparaît dans le théorème suivant, qui témoigne d'une tendance de la marche au ralentissement dans le cas *nestling* et plus particulièrement *plain nestling* :

Théorème – On suppose (T) et $d \geq 2$. Pour tout voisinage ouvert $\mathcal{O}$ du segment $[0, v]$, on a :

$$\limsup_n \frac{1}{n} \ln P_0 \left(\frac{X_n}{n} \notin \mathcal{O} \right) < 0. \qquad (*)$$

De plus :

[2] Le mot *nestling*, introduit par M. Zerner, se traduit par «oisillon». Dans son article, M. Zerner montre que la propriété *nestling* équivaut à : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \geq 2$ tel que $\mathbb{P}(P_{0,\omega}(X_n = 0) > e^{-\varepsilon n}) > 0$, et en fait le commentaire suivant : «The term "nestling property" is supposed to describe figuratively the behavior of a random walker who in the sense of [this equivalent statement] sticks to the starting point roughly comparable to a young bird that often returns to its nest before if finally leaves it.»

– dans le cas *non-nestling*, cette inégalité $(*)$ reste vraie pour tout voisinage ouvert $\mathcal{O}$ de v ;
– dans le cas *nestling*, pour tout ouvert $\mathcal{U}$ rencontrant $[0, v]$, $\lim_n \frac{1}{n} \ln P_0\left(\frac{X_n}{n} \in \mathcal{U}\right) = 0$, donc $(*)$ n'est plus vérifiée si l'on remplace $[0, v]$ par l'une de ses parties fermées strictes.

Plus précisément (dans le cas *nestling*), pour tout voisinage $\mathcal{O}$ de v, on a :

$$\text{pour tout } \alpha < \frac{2d}{d+1}, \ \limsup_n \frac{1}{(\ln n)^\alpha} \ln P_0\left(\frac{X_n}{n} \notin \mathcal{O}\right) < 0.$$

et, dans le cas *plain nestling*, pour tout ouvert $\mathcal{U}$ rencontrant $[0, v]$,

$$\liminf_n \frac{1}{(\ln n)^d} \ln P_0\left(\frac{X_n}{n} \in \mathcal{U}\right) > -\infty.$$

Pour en revenir aux «pièges», la dernière minoration du théorème s'obtient en considérant des événements sur lesquels l'environnement présente des «pièges naïfs» : en chaque point x d'une certaine boule de centre 0, la dérive est dirigée du côté du centre de la boule (c'est à dire $d(x, \omega) \cdot x < 0$). Obtenir la majoration précédente avec $\alpha = d$ montrerait ainsi que ce type de piège suffit à capter la vitesse du ralentissement de $(X_n)_n$: il n'y aurait pas de piège sensiblement plus efficace. Ceci a été démontré en dimension 1 mais reste conjectural au-delà.

Références

[1] F. Solomon. *Random walk in a random environment.* Ann. Probab. 3, 1-31, 1975.

[2] H. Kesten, M.V. Kozlov et F.Spitzer. *A limit law for random walk in a random environment.* Comp. Math., 30, 145-168, 1975.

[3] Ya. G. Sinai *The limiting behavior of a one-dimensional random walk in random environment.* Theor. Prob. and Appl., 27, 256-268, 1982.

[4] S. A. Kalikow *Generalized random walk in a random environment.* Ann. Probab., 9 (5), 753-768, 1981.

[5] M. P. W. Zerner et F. Merkl *A zero-one law for planar random walks in random environment.* Ann. Probab. 29, 1716-1732, 2001.

[6] A.-S. Sznitman et M. P. W. Zerner *A law of large numbers for random walks in random environment.* Ann. Probab. 27, 1851-1869, 1999.

[7] A.-S. Sznitman *On a class of transient random walks in random environment.* Ann. Probab. 29 (2), 723-764, 2001.

[8] A.-S. Sznitman *An effective criterion for ballistic random walks in random environment.* Probab. Theory Relat. Fields, 122(4), 509-544, 2002.