
Séparateur de graphe planaire

Exposé de 1ère année d'ENS, sous la direction de
Pierre Pansu et Éric Colin de Verdière.

Nicolás Matte Bon, Florent Urrutia

23 juin 2011

Table des matières

1	Une approche algorithmique	4
1.1	Quelques résultats préliminaires sur les graphes planaires	4
1.2	Le théorème	10
1.2.1	Énoncé	10
1.2.2	Démonstration	12
1.3	L'algorithme	20
2	Une approche géométrique	24
2.1	Graphes d'empilements de sphères	24
2.2	Rappels et notions préliminaires	26
2.2.1	La projection stéréographique et les applications qui préservent les sphères	26
2.2.2	Les <i>centerpoints</i>	26
2.3	L'algorithme	27
2.3.1	Les étapes de l'algorithme	27
2.3.2	Description de l'étape 3	28
2.3.3	Description de l'étape 4	29
2.4	Centerpoints	30
2.4.1	L'existence	31
2.4.2	La dimension de Vapnik-Chervonenkis	32
2.5	Le théorème de Koebe-Andreev-Thurston	34
2.5.1	Triangulations et structures polyédrales sur la sphère	34
2.5.2	La preuve du théorème	35

Résumé

Notre but est de montrer de manière constructive l'existence de *séparateurs* pour certaines classes de graphes, et notamment pour les graphes *planaires*, c'est à dire qui peuvent être représentés dans le plan sans que surviennent de problèmes de superposition d'arête. Un séparateur est un ensemble raisonnablement petit de sommets qui, lorsqu'on le supprime, déconnecte le graphe en deux composantes non reliées et de tailles équilibrées. Plus précisément, si G est un graphe à n sommets, on dit qu'un ensemble de sommets S est un α -séparateur de taille $f(n)$ si $|S| \leq f(n)$ et toutes les composantes connexes du graphe G' que l'on obtient à partir de G en supprimant S ont au plus αn sommets.

Un premier résultat est annoncé par Ungar en 1951 ([1]), montrant pour les graphes planaires l'existence pour tout α d'un α -séparateur de taille $f(\alpha)n$. En 1977, Lipton et Tarjan publient un résultat similaire ([2]), construisant un $\frac{2}{3}$ -séparateur de taille en $O(\sqrt{n})$, et donnant un algorithme le calculant en temps $O(n)$. La constante du $O(\sqrt{n})$, égale à $2\sqrt{2}$ dans le résultat de Lipton et Tarjan, a été par la suite améliorée. On peut citer par exemple le résultat dû à Djidjev en 1982 ([4]), montrant l'existence d'un $\frac{2}{3}$ -séparateur de taille $\sqrt{6}\sqrt{n}$. Alors que la démonstration de Lipton et Tarjan est élémentaire et ne fait appel à aucun outil élaboré, d'autres approches ont été proposées plus tard. C'est par exemple le cas du résultat de Miller, Teng, Thurston et Vavasis en 1997 ([5] et [6]), qui ont montré l'existence pour les graphes planaires d'un $\frac{3}{4}$ -séparateur de taille en $O(\sqrt{n})$ en utilisant des techniques géométriques. Leur travail se généralise à une classe plus générale de graphes.

L'intérêt pratique des séparateurs se pose surtout dans les applications aux algorithmes du type *diviser pour régner*. On peut citer par exemple des applications aux problèmes de plus court chemin et de plus court cycle, ainsi qu'au *Pebbling problem*. L'utilisation des séparateurs permet aussi d'obtenir efficacement des solutions approchées pour des problèmes NP-complets comme celui de déterminer un ensemble de sommets deux à deux non adjacents de cardinalité maximale dans un graphe (voir [3] et [14])

Après avoir introduit quelques résultats généraux sur les graphes planaires, on présente le résultat de Lipton et Tarjan ainsi que sa démonstration dans la section intitulée *Une approche algorithmique*. La section *Une approche géométrique* est quant à elle consacrée au résultat de Miller, Teng, Thurston et Vavasis. Une partie de la preuve que l'on va donner est basée sur le travail de Spielman et Teng [7], qui ont beaucoup simplifié la preuve originelle. Enfin, le travail de Miller, Teng, Thurston et Vavasis repose de manière essentielle sur un théorème général de théorie des graphes, le théorème de Koebe. Ce théorème est essentiellement une version discrète du théorème d'uniformisation des surfaces de Riemann compactes. Vu l'intérêt de ce théorème, on va présenter une des preuves connues de ce résultat, même si cela s'éloigne du sujet principal de ce travail.

Généralités

Définition. Un *graphe simple* est un couple $G = (V, E)$, où

- V , l'ensemble des *sommets*, est un ensemble.
- E , l'ensemble des *arêtes*, est un ensemble de paires d'éléments de V .

Dans toute la suite, on utilisera le terme « graphe » au lieu de « graphe simple ». Une arête constituée des sommets u et v sera notée indifféremment (u, v) ou (v, u) .

Définition. Deux sommets u et v d'un graphe sont dits *adjacents* si (u, v) est une arête du graphe.

Définition. Un *chemin* d'un graphe $G = (V, E)$ est une suite finie de sommets v_0, \dots, v_k telle que $\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, (v_{i-1}, v_i) \in E$. v_0 et v_k sont appelés *extrémités* du chemin. Le chemin v_0, \dots, v_k est de *longueur* k . L'ensemble des chemins de G est noté $path(G)$. Un chemin ayant le même sommet comme départ et arrivée est appelé *cycle*. Un cycle est dit *simple* si le sommet de départ et d'arrivée n'apparaît que deux fois dans le chemin et si de plus tous les sommets intermédiaires sont distincts.

Définition. Un graphe est dit *connexe* si deux sommets sont toujours reliés par un chemin.

Définition. Si deux sommets u et v d'un graphe sont reliés par un chemin, on appelle *distance* de u à v la longueur du plus court chemin les reliant.

Définition. Un *arbre* est un graphe connexe qui ne contient pas de cycle. Souvent, on distinguera un sommet particulier d'un arbre, que l'on nomme *racine*. La distance maximale d'un sommet à la racine est appelée *profondeur* de l'arbre.

Étant donné un graphe G , un sous-graphe de G qui contient tous les sommets de G et qui est de plus un arbre est un *arbre couvrant* de G .

Remarque. Tout graphe connexe admet un arbre couvrant.

Définition. Un graphe $G = (V, E)$ est dit *planaire* s'il existe une application injective f_1 de V dans le plan et une application f_2 de E dans l'ensemble des chemins simples du plan (images des applications continues injectives d'un segment $[a, b]$ dans le plan) telles que pour toute arête $(u, v) \in E$, $f_2(u, v)$ ait pour extrémités $f_1(u)$ et $f_1(v)$ et que de plus les chemins images par f_2 de deux arêtes distinctes ne s'intersectent pas, sauf éventuellement en une extrémité commune. Une telle représentation dans le plan d'un graphe est appelée *plongement* (dans le plan) du graphe.

Les parties connexes du plan privé des chemins images des arêtes sont appelées *faces* du plongement du graphe, ou plus simplement *faces* du graphe si l'on considère un plongement fixé du graphe. L'union des courbes qui délimitent une face est appelée *frontière* de la face. Lorsqu'une face est délimitée par trois chemins (trois sommets), on qualifie cette face de *triangle*. On dit qu'un graphe planaire plongé est *triangulé* si toutes ses faces sont des triangles.

1 Une approche algorithmique

Cette section, basée sur le travail de Lipton et Tarjan ([2]), a pour objectif de démontrer le théorème suivant.

Théorème 1.1. *Soit G un graphe planaire à n sommets. Les sommets de G peuvent être partitionnés en trois ensembles A , B et C tels qu'aucune arête ne joigne un sommet de A à un sommet de B , $|A| \leq 2n/3$, $|B| \leq 2n/3$ et $|C| \leq 2\sqrt{2}\sqrt{n}$.*

La démonstration de ce résultat, fournira un algorithme de complexité en temps linéaire pour construire une telle partition, ce qui sera montré à la fin de cette section.

1.1 Quelques résultats préliminaires sur les graphes planaires

Théorème 1.2 (Théorème de Jordan). *Le complémentaire d'une courbe fermée simple dans le plan est formé d'exactly deux composantes connexes distinctes : l'intérieur, borné et homéomorphe à un disque, et l'extérieur, non borné.*

Définition 1.3. Le graphe biparti complet suivant est noté $K_{3,3}$:

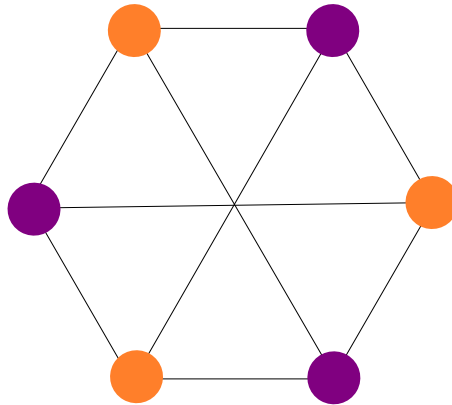


FIGURE 1 – $K_{3,3}$

Définition 1.4. Le graphe complet suivant est noté K_5 :

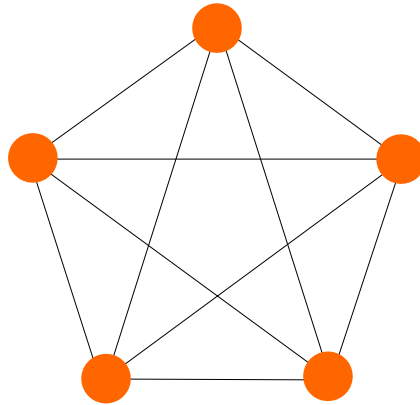


FIGURE 2 – K_5

Définition 1.5. On dit que $G_1 = (V_1, E_1)$ est un *sous-graphe généralisé* de $G_2 = (V_2, E_2)$ lorsque :

- $V_1 \subset V_2$
- Il existe $f : E_1 \rightarrow \text{path}(G_2)$ telle que pour toute arête $(v, v') \in E_1$, $f((v, v'))$ soit un chemin reliant v à v' dans G_2 et vérifiant de plus que si $e \in E_1$, $e' \in E_1$ sont distinctes, alors les deux chemins $f(e)$ et $f(e')$ ne se coupent pas (*i.e.* ils n'ont aucun sommet en commun, sauf éventuellement une extrémité commune).

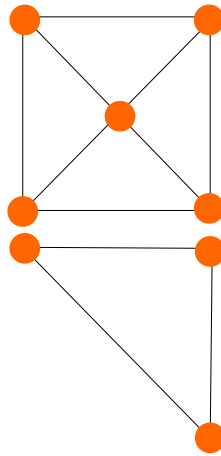


FIGURE 3 – Le second est un sous-graphe généralisé du premier

Remarque 1.6. La relation « être un sous-graphe généralisé de » est transitive.

Théorème 1.7 (Théorème de Kuratowski). *Un graphe est non planaire si et seulement s'il admet comme sous-graphe généralisé $K_{3,3}$ ou K_5 .*

On introduit la notion de contraction qui sera utilisée plusieurs fois au cours de la démonstration :

Définition 1.8. Soit $G_1 = (V_1, E_1)$ un sous-graphe d'un graphe $G_2 = (V_2, E_2)$. Contracter G_1 dans G_2 consiste à transformer G_2 de la façon suivante :

- On supprime de G_2 tous les sommets de V_1 et toutes les arêtes de E_2 qui admettent un sommet de V_1 pour extrémité.
- On ajoute un nouveau sommet v à V_2 , ainsi qu'une arête (v, x) à E_2 pour chaque arête $(w, x) \in E_2, w \in V_1, x \notin V_1$ ¹.

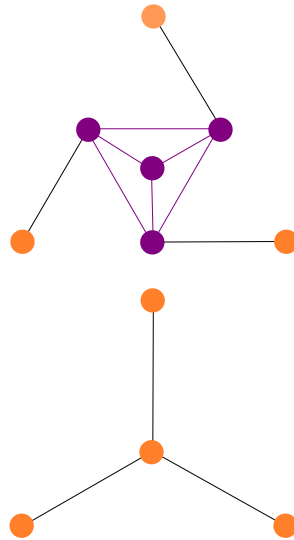


FIGURE 4 – Opération de contraction du sous-graphe coloré en violet

Cette opération a la propriété suivante :

Proposition 1.9. *Soit G un graphe planaire. La contraction dans G d'un sous-graphe connexe de G aboutit à un graphe planaire.*

On peut montrer par récurrence que contracter un sous-graphe connexe à $n + 1$ sommets peut se faire en effectuant n contractions d'une arête et de ses deux extrémités (la connexité est à chaque étape préservée). La proposition découle alors du lemme suivant :

Lemme 1.10. *Soit G un graphe planaire. La contraction dans G du sous-graphe formé par une arête de G et ses deux extrémités aboutit à un graphe planaire.*

Démonstration. Soit $G = (V, E)$ un graphe planaire. Soit $(v_1, v_2) \in E$, que l'on contracte dans G . La contraction fournit un nouveau graphe G' , qui contient un sommet nouveau par rapport à G (formé lors de la contraction de l'arête (v_1, v_2)). Soit v ce sommet. Supposons que G' n'est pas planaire. D'après le théorème de Kuratowski (théorème 1.7), on peut considérer un sous-graphe généralisé de G' de la forme K_5 ou $K_{3,3}$. Discutons selon les deux cas :

1. On n'ajoute pas plusieurs fois une même arête à E_2 , afin de rester dans le cadre des graphes simples.

- Si G' contient un sous-graphe généralisé de la forme K_5 , G contient donc un sous-graphe présentant la configuration suivante (les pointillés représentent des chemins et non des arêtes. Ces chemins ne se rencontrent pas, sauf éventuellement en leurs extrémités²)

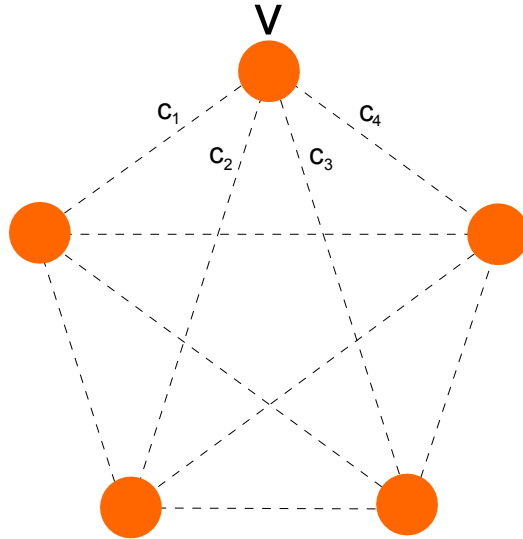


FIGURE 5 – Sous-graphe de G'

On étudie maintenant la configuration de G , avant la contraction :

- Soit les 4 arêtes de c_1, c_2, c_3, c_4 qui sont liées à x proviennent toutes d'un même sommet, disons v_1 . On a donc le schéma suivant dans G :

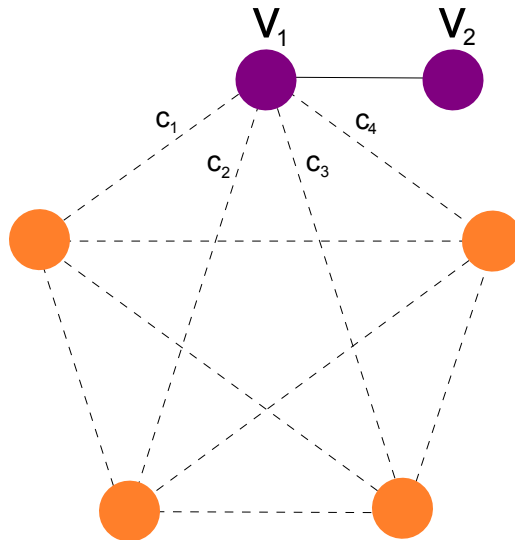


FIGURE 6 – Sous-graphe de G

2. Il faut faire attention au fait suivant : les schémas représentent les graphes de manière abstraite, et non un plongement des graphes dans le plan. En particulier, on ne se soucie nullement de la position, même relative des points, seules comptent les arêtes et chemins entre ces points.

- Soit trois de ces arêtes proviennent d'un sommet, disons v_1 , et la dernière de l'autre sommet v_2 . On a alors le schéma suivant³ :

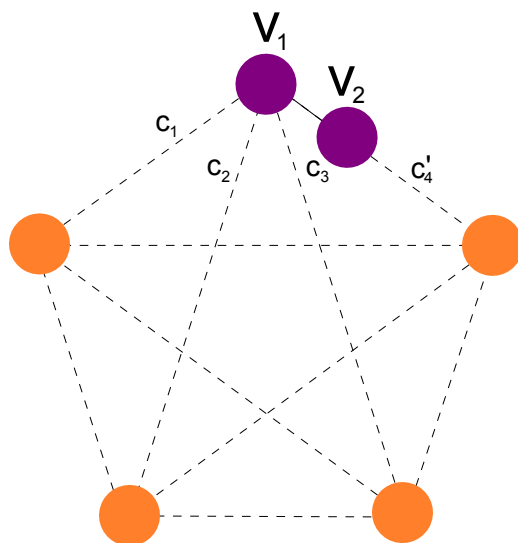


FIGURE 7 – Sous-graphe de G

- Soit deux de ces arêtes proviennent de v_1 et les deux autres de v_2 . G contient cette configuration⁴ :

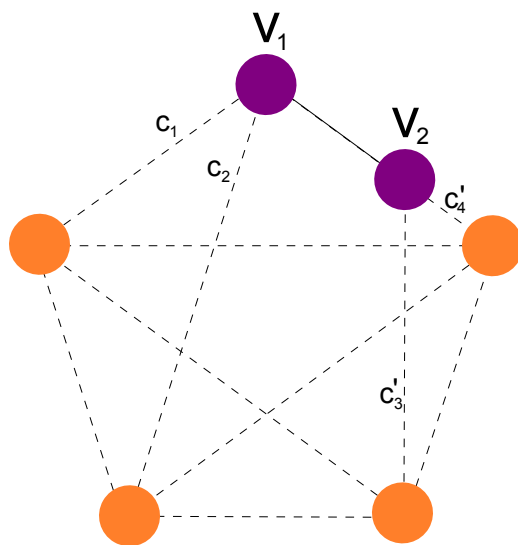


FIGURE 8 – Sous-graphe de G

Par hypothèse, les chemins en pointillés ne se rencontrent pas, sauf éventuellement en une

3. Le choix de placer v_2 dans c_4 est arbitraire, comme précisé plus avant, la position relative des points n'importe pas, et on est donc dans une situation complètement symétrique.

4. Le choix des arêtes est lui aussi arbitraire.

de leurs extrémités. On voit que dans les deux premiers cas, G contient K_5 comme sous-graphe généralisé, et $K_{3,3}$ dans le dernier cas. Par le théorème de Kuratowski (1.7), cela contredit la planarité de G .

- Si G' contient un sous-graphe généralisé de la forme $K_{3,3}$, G contient donc un sous-graphe présentant la configuration suivante :

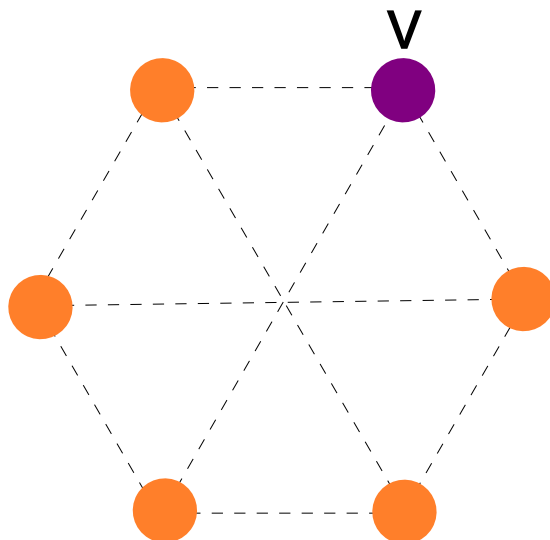


FIGURE 9 – Sous-graphe de G

Les deux cas possibles (seuls trois chemins aboutissent en v ici) sont alors

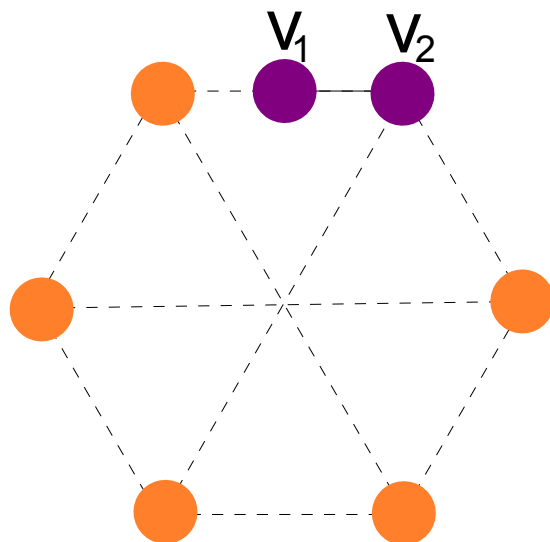


FIGURE 10 – Sous-graphe de G

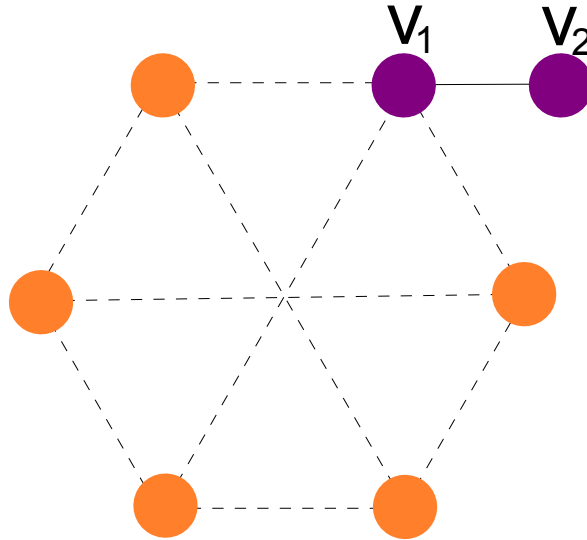


FIGURE 11 – Sous-graphe de G

Dans les deux cas, G contient $K_{3,3}$ comme sous-graphe généralisé, ce qui est impossible d'après le théorème de Kuratowski (théorème 1.7).

┘

1.2 Le théorème

1.2.1 Énoncé

On va en fait montrer le théorème dans un cas plus général, qui concerne des graphes pondérés :

Définition 1.11. Un *graphe pondéré* est un graphe qui a un nombre positif (le *poids*) associé à chaque sommet, de telle sorte que la somme des poids soit inférieure⁵ à 1. Si A est un ensemble de sommets de G , le poids de A est défini comme étant la somme des poids de chacun des sommets appartenant à A .

Le théorème s'énonce alors de la façon suivante :

Théorème 1.12. Soit G un graphe planaire pondéré à n sommets. Les sommets de G peuvent être partitionnés en trois ensembles A , B et C tels qu'aucune arête ne joigne un sommet de A avec un sommet de B , le poids de A et le poids de B soient tous deux inférieurs à $2/3$, et $|C| \leq 2\sqrt{2}\sqrt{n}$.

On a alors immédiatement, en affectant à chaque sommet le même poids $\frac{1}{n}$ où n est le nombre de sommets du graphe :

Théorème 1.13. Soit G un graphe planaire à n sommets. Les sommets de G peuvent être partitionnés en trois ensembles A , B et C tels qu'aucune arête ne joigne un sommet de A à un sommet de B , $|A| \leq 2n/3$, $|B| \leq 2n/3$ et $|C| \leq 2\sqrt{2}\sqrt{n}$.

5. Partout, *inférieur* et *supérieur* sont au sens large.

Avant de prouver ce théorème, montrons qu'il est en quelque sorte optimal :

Théorème 1.14. Soit k un entier, et $G = (V, E)$ la grille quadrillée de côté k (voir figure 12), à k^2 sommets. Si A est un sous-ensemble de V avec $\alpha k^2 < |A| \leq \frac{k^2}{2}$ où $\alpha < \frac{1}{2}$, le nombre de sommets n'appartenant pas à A et adjacents à un sommet de A est minoré par $k \times \min(\frac{1}{2}, \sqrt{\alpha})$.

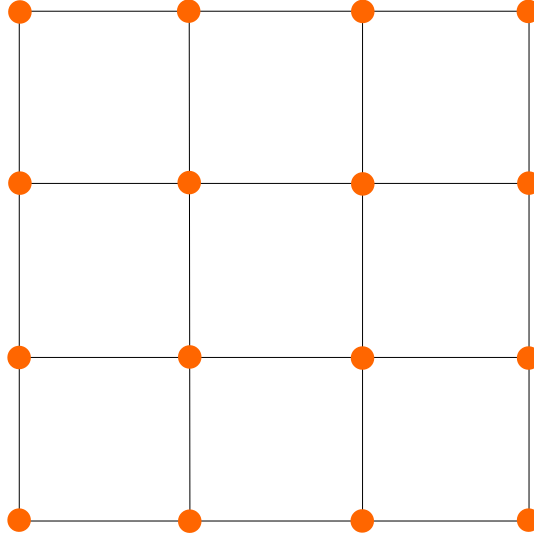


FIGURE 12 – La grille de côté 4, à 16 sommets

Démonstration. Soient l le nombre de lignes de G qui contiennent un sommet de A , et c le nombre de colonnes de G qui contiennent un sommet de A . Supposons par exemple que $c \leq l$. On a $\alpha k^2 \leq |A| \leq lc \leq l^2$, et ainsi $l \geq k\sqrt{\alpha}$.

Notons l^* le nombre de lignes de G dont tous les sommets appartiennent à A . On a $kl^* \leq |A| \leq \frac{k^2}{2}$, d'où $l^* \leq \frac{k}{2}$.

Si $l^* = 0$, alors chacune des l lignes qui contiennent un sommet de A contiennent un sommet n'appartenant pas à A et adjacent à un sommet de A , d'où le résultat puisque $l \geq k\sqrt{\alpha}$.

Si $l^* \neq 0$, alors $c = k$ d'où $l = k$ ($l \geq c$) et chacune des $l - l^*$ lignes qui contiennent un sommet de A mais ne contiennent pas que des sommets de A contiennent un sommet n'appartenant pas à A et adjacent à un sommet de A . Or, $l - l^* = k - l^* \geq \frac{k}{2}$, ce qui conclut la preuve. \square

On en déduit le corollaire suivant

Corollaire 1.15. Soit $N \in \mathbb{N}$. Il existe un graphe planaire G à n sommets avec $n \geq N$ vérifiant la propriété suivante : si les sommets de G sont partitionnés en trois ensembles A , B et C tels qu'aucune arête ne joigne un sommet de A à un sommet de B , $|A| \leq 2n/3$ et $|B| \leq 2n/3$, alors nécessairement $|C| \geq \frac{\sqrt{n}}{2}$.

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k^2 \geq N$, et soit G la grille quadrillée de côté k . Supposons que les sommets de G sont partitionnés en trois ensembles A , B et C tels qu'aucune arête ne joigne

un sommet de A à un sommet de B , $|A| \leq 2n/3$, $|B| \leq 2n/3$ et $|C| \leq \frac{\sqrt{n}}{2}$. Si on suppose par exemple $|A| \leq |B|$, on a $|A| = k^2 - |B| - |C| \geq k^2 - \frac{2}{3}k^2 - \frac{k}{2}$ soit $\frac{|A|}{k^2} \geq \frac{1}{3} - \frac{1}{2k}$. Cette fonction de k est de limite $\frac{1}{3}$ lorsque k tend vers l'infini. On en déduit qu'en choisissant k suffisamment grand, on peut appliquer le théorème 1.14 avec $\alpha = \frac{1}{4}$. On conclut alors que le nombre de sommets n'appartenant pas à A et adjacents à un sommet de A (donc dans C) est au moins $\frac{k}{2}$. \square

1.2.2 Démonstration

L'idée directrice de la preuve est de combiner deux types de séparateur afin d'obtenir un séparateur efficace. Les deux lemmes qui suivent s'intéressent en fait chacun à un de ces types de séparateur, et la preuve du théorème consiste à les coupler judicieusement.

- Le lemme 1.16 considère la situation où le graphe est muni d'un arbre couvrant, et construit comme séparateur un cycle du graphe construit à partir d'une arête ne faisant pas partie de l'arbre couvrant, comme le montre la figure 13 :

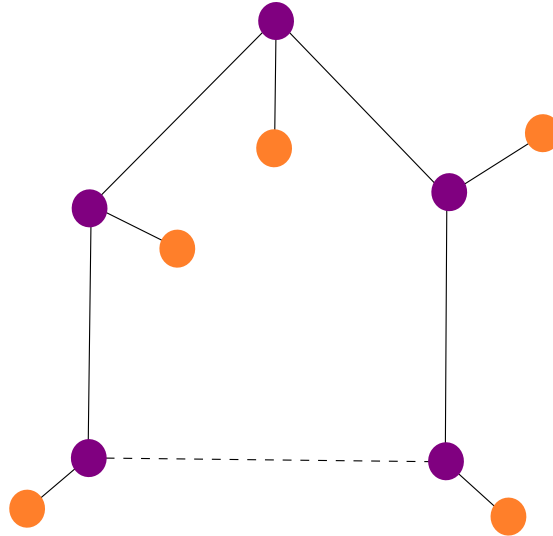


FIGURE 13 – En trait plein, l'arbre couvrant, et en pointillé le reste des arêtes du graphe. Le séparateur est formé des sommets violets.

- Le lemme 1.17, s'intéresse à la distance des sommets à un sommet distingué du graphe, et construit un séparateur à partir d'une « ligne de niveau », comme l'illustre la figure 14

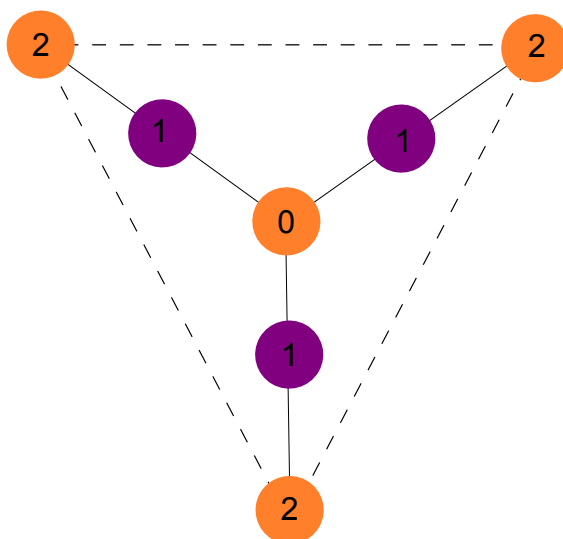


FIGURE 14 – En violet, la « ligne de niveau » servant de séparateur.

- Le théorème se montre alors en considérant deux « lignes de niveau », et en utilisant un cycle compris entre ces deux niveaux.

On s'intéresse en premier lieu au cas d'un arbre muni d'un arbre couvrant :

Lemme 1.16. *Soit G un graphe planaire pondéré, muni d'un arbre couvrant de profondeur r . Les sommets de G peuvent être partitionnés en trois ensembles A , B et C tels qu'aucune arête ne joigne un sommet de A à un sommet de B , les poids de A et B soient tous deux inférieurs à $\frac{2}{3}$, et C contient moins de $2r + 1$ sommets.*

Démonstration. Si l'un des sommets a un poids supérieur à $\frac{1}{3}$, le résultat est acquis. Supposons donc que tous les sommets ont un poids inférieur à $\frac{1}{3}$. On plonge G dans le plan, et en ajoutant des arêtes, on fait de chaque face interne un triangle. Toute arête qui ne fait pas partie de l'arbre couvrant forme un cycle simple, les autres arêtes du cycle faisant partie de l'arbre : soit une telle arête, d'extrémités s et t ; s et t sont reliés dans l'arbre (par connexité de l'arbre couvrant), et l'arête (s, t) fait donc apparaître un cycle dont les autres arêtes font partie de l'arbre. Ce cycle est d'ailleurs unique, car si l'arête admettait deux tels cycles, on pourrait construire un cycle dans l'arbre. La longueur de ce cycle est majorée par $2r + 1$. Un cycle sépare le graphe en deux parties non reliées, l'intérieur et l'extérieur du cycle. Montrons que l'on peut choisir un tel cycle de façon à ce que l'intérieur et l'extérieur satisfassent aux conditions requises pour A et B .

Soit (x, z) une arête qui ne fait pas partie de l'arbre, minimisant le maximum du poids de l'intérieur et du poids de l'extérieur de son cycle associé. Parmi les arêtes réalisant ce minimum, on choisit de sorte à minimiser le nombre de faces à l'intérieur du cycle. On suppose par exemple que le poids de l'intérieur du cycle est supérieur au poids extérieur. Supposons que l'intérieur du cycle a un poids strictement supérieur à $\frac{2}{3}$ (le plongement de G est fixé). On s'intéresse à la face interne au cycle qui admet l'arête (x, z) dans son contour. Le graphe étant triangulé, cette

face est un triangle, et l'on note y le troisième sommet du triangle. On est alors dans une des configurations suivantes :

- (x, y) et (y, z) font tous les deux partie du cycle. Cela implique que le cycle est x, y, z . Il n'y a donc pas de sommets à l'intérieur, et ce cas est donc impossible puisque le poids intérieur est supposé supérieur à $\frac{2}{3}$.
- Une seule des deux arêtes (x, y) et (y, z) , disons par exemple (x, y) fait partie du cycle. Alors, (y, z) n'est pas une arête de l'arbre, car sinon (voir la figure 15) il y aurait un cycle dans l'arbre. Le cycle associé à (y, z) a en son intérieur les mêmes sommets que le cycle associé à (x, z) et le poids intérieur reste donc supérieur à $\frac{2}{3}$ et donc au poids extérieur, mais l'intérieur du cycle associé à (y, z) contient une face de moins que l'intérieur du cycle associé à (x, z) (voir la figure 15), ce qui contredit le choix de l'arête (x, z) .

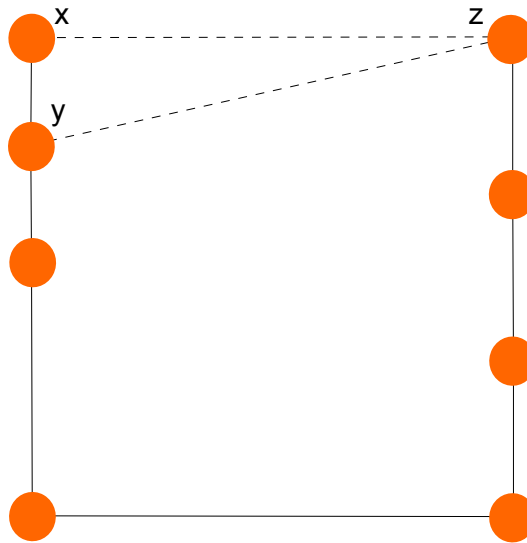


FIGURE 15 – Le cycle est modélisé par le carré. Les arêtes de l'arbre sont exactement celles dessinées en trait plein.

- Ni (x, y) ni (y, z) ne font partie du cycle. On doit alors être dans un des trois cas suivants :
 - (x, y) et (y, z) sont des arêtes de l'arbre. Alors il y a un cycle dans l'arbre (voir la figure 16) ce qui est impossible.

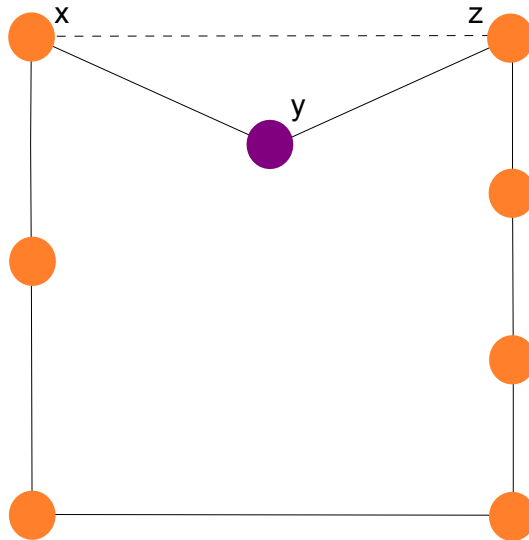


FIGURE 16 – Le cycle est modélisé par le carré. Les arêtes de l'arbre sont exactement celles dessinées en trait plein.

- L'une des deux arêtes (x, y) et (y, z) , disons par exemple (x, y) , est une arête de l'arbre. Alors le cycle associé à (y, z) a en son intérieur les mêmes sommets que le cycle associé à (x, z) , privé de y (voir la figure 17). Si le poids à l'intérieur du cycle associé à (y, z) est supérieur au poids extérieur, alors comme ce poids a diminué par rapport au cycle associé à (x, z) (à cause de la perte de y dans l'intérieur), l'arête (y, z) aurait du être choisie à la place de (x, z) (car le cycle associé à (y, z) contient une face de moins que le cycle associé à (x, z)). Le poids à l'intérieur du cycle associé à (y, z) est donc inférieur à son poids extérieur. Or, ce poids extérieur est égal au poids extérieur du cycle associé à (x, z) , donc inférieur à $\frac{1}{3}$. Ainsi, le maximum des poids extérieur et intérieur du cycle associé à (y, z) est inférieur à $\frac{2}{3}$, et est donc inférieur au maximum des poids extérieur et intérieur du cycle associé à (x, z) , ce qui est absurde compte tenu du choix initial de l'arête (x, z) .

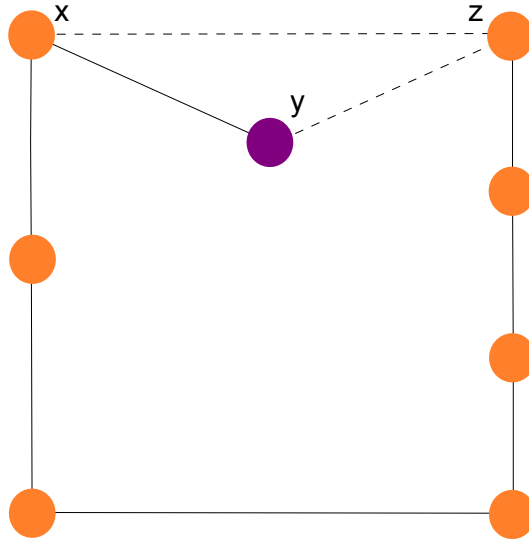


FIGURE 17 – Le cycle est modélisé par le carré. Les arêtes de l'arbre sont exactement celles dessinées en trait plein.

- Ni (x, y) ni (y, z) ne sont des arêtes de l'arbre. Chacune définit donc un cycle (voir la figure 18, qui fait la distinction selon que y est ou non un sommet du cycle). x, y, z étant un triangle, il n'y a aucun sommet dans son intérieur. Les sommets à l'intérieur du cycle associé à (x, z) se répartissent donc entre les intérieurs des cycles associés à (x, y) et (y, z) , ou sur leur éventuelle frontière commune. Supposons par exemple que le cycle associé à (x, y) a un poids intérieur supérieur au poids intérieur du cycle associé à (y, z) . Le poids à l'intérieur du cycle associé à (x, y) étant plus petit ou égal au poids intérieur du cycle associé à (x, z) , et son intérieur comportant strictement moins de faces, il est impossible que le poids intérieur au cycle associé à (x, y) soit supérieur à son poids extérieur, car sinon (x, y) aurait été choisie à la place de (x, z) . Ainsi, le poids extérieur au cycle associé à (x, y) est supérieur au poids intérieur. Comme le poids intérieur du cycle associé à (x, z) est supérieur à $\frac{2}{3}$, la somme du poids intérieur au cycle associé à (x, y) et des sommets du cycle est supérieure à $\frac{1}{3}$ et donc son poids extérieur est inférieur à $\frac{2}{3}$. Les poids extérieurs et intérieurs au cycle associés à (x, y) étant donc tous les deux inférieurs à $\frac{2}{3}$, on en déduit que (x, y) aurait dû être choisi à la place de (x, z) .

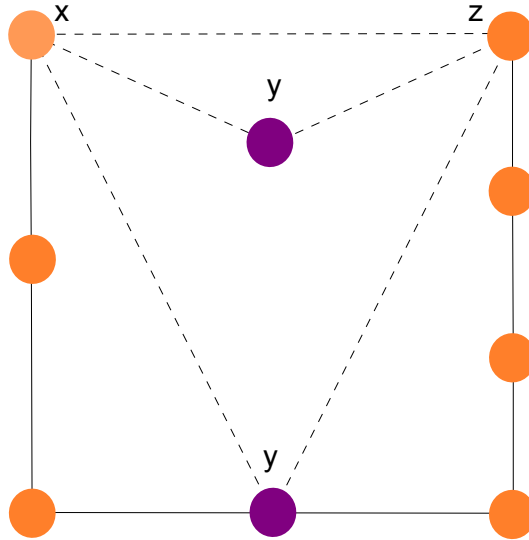


FIGURE 18 – Le cycle est modélisé par le carré. Les arêtes de l'arbre sont exactement celles dessinées en trait plein.

Ainsi chaque cas conduit à une absurdité, et le cycle associé à (x, z) est bien un séparateur satisfaisant les conditions demandées par le lemme. ┘

Le lemme technique suivant s'intéresse au cas d'un graphe planaire connexe.

Lemme 1.17. *Soit G un graphe planaire connexe. On considère un sommet particulier du graphe, noté v . On partitionne l'ensemble des sommets du graphe en différents niveaux, le niveau d'un sommet de G étant sa distance à v , et on note $L(l)$ le nombre de sommets de niveau l . Soit r le plus haut niveau des sommets de G . On considère un dernier niveau $r + 1$ qui ne contient pas de sommets.*

Soient l_1 et l_2 deux niveaux tels que l'ensemble des sommets de niveaux compris entre 0 à $l_1 - 1$ et l'ensemble des sommets de niveaux compris entre $l_2 + 1$ à $r + 1$ aient tous les deux un poids inférieur à $\frac{2}{3}$. Il existe une partition A, B, C des sommets de G telle qu'aucune arête ne joigne un sommet de A à un sommet de B , que les poids de A et de B soient inférieurs à $\frac{2}{3}$, et que C contienne moins de $L(l_1) + L(l_2) + \max\{0, 2(l_2 - l_1 - 1)\}$ sommets.

Démonstration. Si $l_1 \geq l_2$, on peut construire une partition satisfaisant les conditions demandées : on pose A les sommets de niveau 0 à $l_1 - 1$, B les sommets de niveau $l_1 + 1$ à r , et C les sommets de niveau l_1 .

On suppose donc $l_1 < l_2$. On considère le graphe G' formé à partir de G en supprimant les sommets de niveau l_1 et l_2 . On partitionne les sommets de G' en trois ensembles (éventuellement vides) V_1, V_2, V_3 où V_1 contient les sommets de G de niveau 0 à $l_1 - 1$, V_2 les sommets de G de niveau $l_1 + 1$ à $l_2 - 1$ et V_3 les sommets de G de niveau $l_2 + 1$ à r . Les poids des sommets de G' sont les poids correspondant à ceux des sommets de G . Par hypothèse sur l_1 et l_2 , les poids de

V_1 et V_3 sont tous les deux inférieurs à $\frac{2}{3}$.

Si V_2 a un poids inférieur à $\frac{2}{3}$, alors on définit A comme étant l'ensemble de sommets parmi V_1 , V_2 et V_3 qui a le plus grand poids, B comme étant l'union des deux autres et C comme la réunion des sommets de G de niveau l_1 et l_2 . Le poids de B est bien inférieur à $\frac{2}{3}$, étant donné le choix de A .

Si V_2 a un poids supérieur à $\frac{2}{3}$, on construit un nouveau graphe G'' à partir de G' de la façon suivante : on supprime les sommets de niveau dans G supérieur (strictement) à l_2 ; on contracte dans G' l'ensemble des sommets de G' de niveau dans G inférieur (strictement) à l_1 , et on attribue au sommet ainsi formé un poids de 0. Le graphe G'' est donc un graphe planaire par la proposition 1.9. On munit G'' d'un arbre couvrant dont la racine est le sommet formé par la contraction, de la façon suivante⁶ : on prend une à une, les arêtes qui relient un sommet de niveau 1 à la racine et qui ne font pas apparaître de cycle (un cycle apparaît seulement lorsque l'on rajoute une arête qui relie un sommet de niveau 1 à la racine alors que celui-ci était déjà relié à la racine) ; on prend, une à une, les arêtes qui relient un sommet de niveau 2 à un sommet de niveau 2 et qui ne font pas apparaître de cycle (un cycle apparaît seulement lorsque l'on rajoute une arête qui relie un sommet de niveau 2 à un sommet de niveau 1 alors que le sommet de niveau 2 était déjà relié à un sommet de niveau 1) ; et ainsi de suite. On obtient bien un arbre couvrant, dans la mesure où l'on n'a introduit aucun cycle et où tout sommet de G'' appartient à l'arbre. Cet arbre vérifie de plus la propriété suivante : la distance d'un sommet à la racine est exactement son niveau dans G'' moins l_1 . Ainsi, la profondeur de l'arbre est exactement $l_2 - 1 - l_1$.

On applique le lemme 1.16 au graphe G'' , pour obtenir une partition A^* , B^* , C^* . On peut maintenant définir la partition des sommets de G : A comme l'ensemble parmi A^* et B^* ayant le plus grand poids (disons par exemple A^*), C la réunion des sommets de niveau l_1 et l_2 et des sommets de C^* autres que la racine (elle n'est pas un sommet de G), et B contient le reste des sommets de G . Le lemme 1.16 assure que A a un poids inférieur à $\frac{2}{3}$. $A^* \cup C^*$ a un poids supérieur à $\frac{1}{3}$ (car par hypothèse, le poids total de G'' est supérieur à $\frac{2}{3}$, et le poids de B^* est plus petit que celui de A^*), et donc le poids de $A \cup C$ est aussi supérieur à $\frac{1}{3}$, et ainsi le poids de B , complémentaire dans G des sommets de A et C , a un poids inférieur à $\frac{2}{3}$. Enfin, par construction de C et étant donné que la profondeur de l'arbre couvrant est de $l_2 - l_1 - 1$, le lemme 1.16 assure que C contient moins de $L(l_1) + L(l_2) + \max\{0, 2(l_2 - l_1 - 1)\}$ sommets. \square

On peut maintenant passer à la preuve principale du théorème, que l'on énonce de nouveau :

Théorème 1.18. *Soit G un graphe planaire pondéré à n sommets. Les sommets de G peuvent être partitionnés en trois ensembles A , B et C tels qu'aucune arête ne joigne un sommet de A avec un sommet de B , le poids de A et le poids de B soient tous deux inférieurs à $2/3$, et $|C| \leq 2\sqrt{2}\sqrt{n}$.*

Démonstration. On traite tout d'abord le cas G connexe. On fixe un sommet de G , noté v . On partitionne l'ensemble des sommets du graphe en différents niveaux, le niveau d'un sommet de G étant sa distance à v , et on note $L(l)$ le nombre de sommets de niveau l . Soit r le plus haut niveau

6. On réalise un parcours en largeur du graphe.

des sommets de G . On considère un dernier niveau $r + 1$ et un niveau -1 qui ne contiennent pas de sommets.

S'il n'existe pas de niveau l_1 tel que la somme des poids des sommets de niveau 0 à $l_1 - 1$ soit inférieure à $\frac{1}{2}$ et la somme des poids des sommets de niveau 0 à l_1 soit supérieure à $\frac{1}{2}$, alors le poids total du graphe est inférieur à $\frac{1}{2}$ et le théorème est bien vrai. On suppose donc qu'il existe un tel l_1 . Soit k le nombre de sommets de niveau compris entre 0 et l_1 .

Supposons qu'il n'existe pas de niveau $l_0 \leq l_1$ tel que $L(l_0) + 2(l_1 - l_0) \leq 2\sqrt{k}$. Alors $\forall i \leq l_1, L(i) \geq 2\sqrt{k} - 2(l_1 - i)$. Comme $L(0) = 1$, on a $1 \geq 2\sqrt{k} - 2l_1$ d'où $l_1 + \frac{1}{2} \geq \sqrt{k}$ et

$l_1 = \lfloor l_1 + \frac{1}{2} \rfloor > \lfloor \sqrt{k} \rfloor$. Ceci permet d'écrire :

$$\begin{aligned} k = \sum_{i=0}^{l_1} L(i) &\geq \sum_{i=l_1 - \lfloor \sqrt{k} \rfloor}^{l_1} 2\sqrt{k} - 2(l_1 - i) \\ &\geq \frac{(4\sqrt{k} - 2\lfloor \sqrt{k} \rfloor)(\lfloor \sqrt{k} \rfloor + 1)}{2} \text{ (somme de termes consécutifs)} \\ &\geq \sqrt{k}(\lfloor \sqrt{k} \rfloor + 1) > k \end{aligned}$$

ce qui n'est pas.

On en déduit donc qu'il existe $l_0 \leq l_1$ tel que $L(l_0) + 2(l_1 - l_0) \leq 2\sqrt{k}$ et on montre de même qu'il existe $l_2 \geq l_1 + 1$ tel que $L(l_2) + 2(l_2 - l_1 - 1) \leq 2\sqrt{n - k}$. Le lemme 1.17 assure alors qu'il existe une partition des sommets de G en A, B, C telle qu'aucune arête ne joigne un sommet de A à un sommet de B , le poids de A et de B soient tous les deux inférieurs à $\frac{2}{3}$, et C contienne moins de

$$\begin{aligned} L(l_0) + L(l_2) + 2(l_2 - l_0 - 1) &= L(l_0) + 2(l_1 - l_0) + L(l_2) + 2(l_2 - l_1 - 1) \\ &\leq 2(\sqrt{k} + \sqrt{n - k}) \\ &\leq 2(2\sqrt{\frac{n}{2}}) \text{ (par concavité de la racine carrée)} \\ &= 2\sqrt{2}\sqrt{n} \text{ sommets} \end{aligned}$$

Le théorème est donc montré dans le cas d'un graphe connexe. Passons au cas général :

Si G n'est pas connexe, on note G_1, \dots, G_k ses composantes connexes, de sommets V_1, \dots, V_k .

– Si aucune composante connexe de G n'a de poids supérieur à $\frac{1}{3}$, alors en notant i l'indice

minimal telle que la somme des poids de V_1, \dots, V_i soit supérieure à $\frac{1}{3}$, on pose

$A = V_1 \cup \dots \cup V_i$, $B = V_{i+1} \cup \dots \cup V_k$, et $C = \emptyset$. Comme le poids de A est compris entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$, le poids de B est bien inférieur à $\frac{2}{3}$.

– Si l'une des composantes connexes de G , disons G_1 , a un poids compris entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$, alors on pose $A = V_1$, $B = V_2 \cup \dots \cup V_k$, et $C = \emptyset$.

– Enfin, si une composante connexe de G , disons G_1 , a un poids strictement supérieur à $\frac{2}{3}$, on applique le théorème, que l'on a déjà montré dans le cas connexe, à G_1 . On obtient donc une partition de V_1 en trois ensembles A^*, B^*, C^* . Supposons par exemple que le poids de A^* est supérieur au poids de B^* . On pose $A = A^*$, $C = C^*$ et on définit B comme le

reste des sommets de G . A et C satisfont bien aux conditions du théorème. On montre que le poids de B est bien inférieur à $\frac{2}{3}$: soit n le poids total de G et $\beta = \frac{\text{poids de } V_1}{n}$. On a $\beta \geq \frac{2}{3}$ par hypothèse. De plus, le poids de l'union de A^* et B^* est majoré par

$$\beta n \leq (\beta + \beta - \frac{2}{3})n \leq 2(\beta - \frac{1}{3})n$$

d'où la majoration du poids de B^* par $(\beta - \frac{1}{3})n$. On en déduit une majoration du poids de B par $(1 - \beta)n + (\text{poids de } B^*) \leq \frac{2}{3}n$, ce qui achève la démonstration. \lrcorner

Remarque 1.19. La preuve ci-dessus montre que le séparateur recherché peut être choisi de sorte à être contenu dans une seule composante connexe.

1.3 L'algorithme

La preuve de l'existence du séparateur décrit comment trouver un séparateur satisfaisant les conditions demandées. Cependant, pour assurer un algorithme en temps linéaire, il faut adopter une structure de données adaptées.

On rappelle sans démonstration la formule d'Euler :

Théorème 1.20. *Soit G un graphe planaire connexe plongé dans le plan. En notant n son nombre de sommets, e son nombre d'arêtes et f son nombre de faces, on a la relation $n - e + f = 2$.*

Notons tous d'abord le résultat suivant :

Théorème 1.21. *Un graphe planaire avec $n \geq 3$ sommets contient au plus $3n - 6$ arêtes.*

Démonstration. Soit $G = (V, E)$ un graphe planaire connexe plongé dans le plan, à $n \geq 3$ et soient n son nombre de sommets, e son nombre d'arêtes et f son nombre de faces. On s'intéresse au nombre t de couple (u, a) où $u \in V$ et où a est une face ayant l'arête u dans sa frontière. On a tout d'abord, chaque arête ne pouvant appartenir à la frontière que d'au plus deux faces, $t \leq 2e$. Ensuite, on remarque que la frontière de chaque face bornée comprend au moins trois arêtes. En notant l le nombre d'arêtes dans la frontière de la face non bornée, on a $t \geq 3(f - 1) + l$ et comme $n \geq 3$, $l \geq 3$ d'où $t \geq 3f$ et donc au final $3f \leq 2e$. En couplant cette inégalité avec la formule d'Euler 1.20, on obtient $e \leq 3n - 6$.

On généralise ensuite à un graphe non connexe en appliquant le résultat précédent à chacune des composantes connexes considérées comme des graphes indépendants. \lrcorner

Décrivons maintenant l'algorithme.

On considère comme donnée de l'algorithme un graphe planaire déjà plongé dans le plan⁷. En particulier, on dispose évidemment d'une numérotation des arêtes et des sommets. On commence par construire la structure de données qui sera utilisé par l'algorithme. Celle-ci consiste en une liste d'éléments de la forme $(e, v_1, v_2, c_1, cc_1, c_2, cc_2)$ où :

- e est une arête,
- v_1, v_2 sont les deux sommets de l'arête e ,
- c_1 est la première arête incidente en v_1 que l'on rencontre en tournant en sens horaire autour de v_1 depuis e .

7. Trouver un plongement est possible en temps linéaire, ce point ne sera pas détaillé.

- cc_1 est la première arête incidente en v_1 que l'on rencontre en tournant en sens anti-horaire autour de v_1 depuis e .
- c_2 est la première arête incidente en v_2 que l'on rencontre en tournant en sens horaire autour de v_2 depuis e .
- cc_2 est la première arête incidente en v_2 que l'on rencontre en tournant en sens anti-horaire autour de v_2 depuis e .

Par exemple, on construit à partir du graphe de la figure 19 la liste
 $(e_1, v_0, v_1, e_5, e_4, e_2, e_3)$; $(e_2, v_1, v_3, e_3, e_1, e_4, e_4)$; $(e_3, v_1, v_2, e_1, e_2, e_5, e_5)$; $(e_4, v_0, v_3, e_1, e_5, e_2, e_2)$;
 $(e_5, v_0, v_2, e_4, e_1, e_3, e_3)$.

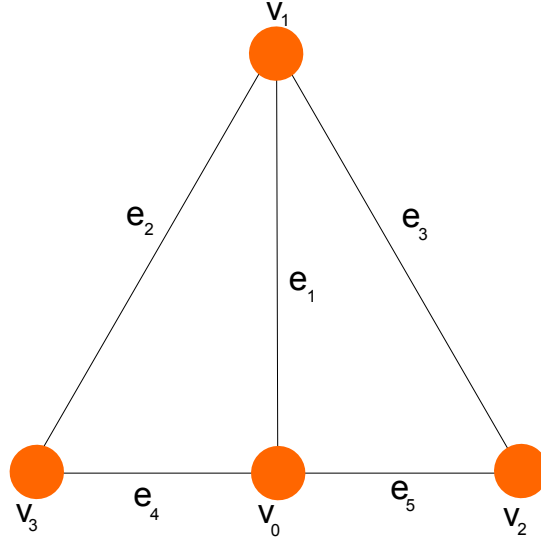


FIGURE 19 – Exemple de graphe

Cette construction se fait en temps linéaire en le nombre d'arêtes.

L'algorithme, dont la correction est donnée par la preuve du théorème 1.18, est alors le suivant :

1. On détermine les composantes connexes de G ainsi que leur poids (en temps linéaire). Comme dans la preuve du théorème 1.12, si aucune composante n'est de poids supérieur à $\frac{2}{3}$ (on est donc dans un des deux premiers cas), on effectue la partition décrite dans la preuve (toujours en temps linéaire) et l'algorithme termine. Dans le cas contraire, l'algorithme se poursuit.
2. Dans la composante de poids maximal, on construit en temps linéaire un arbre couvrant par un parcours en largeur (comme dans la démonstration du lemme 1.17). Toujours en temps linéaire, on calcule le niveau (distance à la racine) de chaque sommet, ainsi que le nombre de sommets L_l de chaque niveau l .
3. Si le poids total du graphe est inférieur à $\frac{1}{2}$, l'algorithme retourne le séparateur vide ainsi qu'une partition adaptée des sommets. Sinon, on calcule alors en temps linéaire le plus petit niveau l_1 tel que la somme des poids des sommets de niveau compris entre 0 et $l_1 - 1$ soit inférieure à $\frac{1}{2}$ et que la somme des poids de niveau compris entre 0 et l_1 dépasse $\frac{1}{2}$.

On note k le nombre de sommets de niveau compris entre 0 et l_1 .

4. On calcule le plus haut sommet $l_0 \leq l_1$ tel que $L(l_0) + 2(l_1 - l_0) \leq 2\sqrt{k}$, ainsi que le plus bas sommet $l_2 \geq l_1 + 1$ tel que $L(l_2) + 2(l_2 - l_1 - 1) \leq 2\sqrt{n - k}$ (en temps linéaire). Si l'ensemble des sommets de niveau compris strictement entre l_0 et l_2 a un poids inférieur à $\frac{2}{3}$, l'algorithme s'arrête en retournant le séparateur décrit pour ce cas particulier dans la démonstration du lemme 1.17.
5. On supprime tout les sommets de niveau supérieur à l_2 . On crée un nouveau vecteur x , qui va représenter la contraction des sommets de niveau compris entre 0 et l_0 . Afin d'éviter de créer des arêtes multiples, on construit un tableau qui associe à chaque sommet un booléen : *true* indique que le cas du sommet est traité (*i.e.* on l'a déjà relié à x), *false* indique qu'il faut le traiter. Grâce à la structure de données mise en place, on parcourt en tournant en sens horaire l'ensemble des arêtes liant un sommet v de niveau l_0 à un sommet w de niveau $l_0 + 1$ en effectuant l'action suivante : si à w est associé la valeur *true*, alors on la modifie à *false* et on crée une arête (x, w) . Ces calculs se réalisent en temps linéaire. En supprimant toutes les sommets de niveau inférieur à l_0 et les arêtes qui relient deux sommets de niveau inférieurs à l_0 , on obtient un nouveau graphe plongé dans le plan, contenant le nouveau sommet s et les arêtes que l'on a créées. Le fait d'avoir tourné en sens horaire permet de remplir correctement les champs c et cc des arêtes liées à x . On reconstruit un arbre couvrant de ce graphe à partir de l'arbre couvrant précédent, en choisissant pour racine x .
6. On enregistre, pour chaque sommet, son sommet parent ainsi que la somme de son poids et des poids de ses descendants. On ajoute ensuite des arêtes de sorte à trianguler chacune des faces. On fait ceci en exploitant la structure de données mise en place : une face est définie par un cycle, donc à partir d'une arête qui ne fait pas partie de l'arbre couvrant ; les champs c et cc permettent de parcourir la frontière d'une face. Ceci se réalise en temps linéaire car chaque arête peut faire partie de la frontière de deux faces seulement.
7. On fixe une arête (v_1, w_1) ne faisant pas partie de l'arbre couvrant. Comme à l'étape précédente, la structure de données utilisée permet va permettre de parcourir le cycle associée à cette arête, et d'étudier les arêtes qui aboutissent sur le cycle. On calcule alors les poids internes et externes au cycle de la façon suivante : On parcourt le cycle (on profite de ce parcours pour initialiser un tableau de booléen indiquant quels sommets appartiennent à ce cycle), et pour chaque sommet v , on regarde les arêtes (v, w) de l'arbre couvrant qui ont ce sommet pour extrémité avec w ne faisant pas partie du cycle (selon si l'arête (v, w) est obtenue en utilisant (une ou plusieurs fois) le champs c ou cc de l'arête précédente, cette arête fait partie de l'intérieur ou de l'extérieur du cycle); si v est le sommet parent de w , la contribution de l'arête au poids que l'on calcule est égale à la somme des poids de w et de ses descendants (quantité mémorisée lors d'une étape précédente), et si w est le sommet parent de v , alors la contribution de l'arête est le poids total du graphe moins la somme des poids de v et de ses descendants⁸. On appelle M la partie du graphe parmi les parties intérieure et extérieur au cycle qui a le poids le plus grand.
8. Si le poids de M est inférieur à $\frac{2}{3}$, on passe à l'étape suivante; sinon on cherche un nouveau cycle, en appliquant le procédé suivant : Ayant lors de l'étape précédent déterminé à quel sens de rotation dans le cycle, horaire ou anti-horaire, correspond la partie M , on détermine le sommet y tel que (v_1, y, w_1) soit la face (triangulaire) associée à (v_1, w_1) et étant située dans la face M (ce sommet existe, car le poids de M est non nul). Si une seule des deux arêtes (v_1, y) et (y, w_1) fait partie de l'arbre couvrant, disons par

8. Le fait que l'on s'intéresse aux arêtes (v, w) appartenant à l'arbre couvrant assure que le poids de chaque sommet est pris en compte une seule et unique fois.

exemple (y, w_1) , alors on pose $v_2 = v_1$ et $w_2 = y$. On calcule le poids à l'intérieur du cycle associé à (v_2, w_2) à partir du poids à l'intérieur du cycle associé à (v_1, w_1) et du poids de y .

Si aucune des deux arêtes (v_1, y) et (y, w_1) ne fait partie de l'arbre couvrant, alors en utilisant le tableau de booléens initialisé précédemment, on détermine le chemin composé d'arête de l'arbre couvrant qui relie y au cycle associé à (v_1, w_1) , et on désigne par z le sommet où a lieu cette intersection. On calcule le poids de ce chemin, privé de z , et on met à jour les données du tableau de booléens concernant les sommets présents dans ce chemin (certains sommets vont conserver la valeur *true* alors qu'ils ne font plus partie du cycle, mais ceci n'est pas important car ils ne seront plus rencontrés dans la suite des opérations). On suppose ici pour simplifier que M est la face intérieure du cycle associé à (v_1, w_1) , le cas extérieur étant semblable. De la même façon qu'à l'étape précédente, on calcule le poids des intérieurs des cycles associés à (v_1, y) et (y, w_1) en parallèle, c'est à dire en considérant alternativement une arête interne au cycle de (v_1, y) et une arête interne au cycle de (y, w_1) . On interrompt ce calcul dès que l'on a calculé un de ces deux poids, et l'on en déduit l'autre à partir du poids du cycle associé à (v_1, w_1) et du poids du chemin (y, z) . On pose alors (v_2, w_2) égale à l'arête parmi (v_1, y) et (y, w_1) qui a le plus grand poids à l'intérieur de son cycle associé.

On répète ce procédé jusqu'à obtenir une arête qui a un poids à l'intérieur de son cycle associé inférieur à $\frac{2}{3}$. Ceci est bien possible. En effet, à chaque itération, le nombre de faces du cycle diminue (donc le poids intérieur des cycles successifs décroît jusqu'à zéro).

Alors, les poids intérieur et extérieur sont tous les deux inférieurs à $\frac{2}{3}$, puisque à chaque itération, la somme des poids des sommets du nouveau cycle et du nouveau poids intérieur reste supérieur à $\frac{1}{3}$ (car le poids intérieur initial est supérieur à $\frac{2}{3}$ et on enlève moins de la moitié de son poids). La preuve que cette étape est en temps linéaire sera prouvé plus loin.

9. On détermine une partition des sommets de la composante connexe considérée comme dans la fin de la démonstration du lemme 1.17, et on construit un séparateur du graphe comme indiqué dans la fin de la démonstration du théorème 1.18

Montrons maintenant que l'exécution de l'avant-dernière étape est bien en temps linéaire :

À chaque itération, l'intérieur du cycle considéré contient une face de moins, et le nombre d'itérations est donc linéaire.

À chaque itération, le nombre d'opération est en $O(1) + O(\text{longueur du chemin reliant } y \text{ à } z) + O(\text{nombre d'arêtes considérées lors du calcul des poids internes des deux arêtes } (v_i, y) \text{ et } (y, w_i))$.

Or, lors d'une étape où aucune des deux arêtes (v_i, y) et (y, w_i) ne fait partie de l'arbre couvrant :

- Les arêtes sur le chemin de y à z seront sur la frontière des cycles considérés dans les étapes ultérieures. Elle n'appartiendra donc pas aux chemins de y à z dans les étapes suivantes.
- Lors du calcul des poids intérieurs aux cycles associés à (v_1, y) et (y, w_1) , chaque fois que deux arêtes sont successivement examinées, on est dans l'un des deux cas suivants :
 - Au moins une des deux arêtes fait partie du chemin (y, z) . Comme pour le point précédent, une arête donnée ne peut appartenir à ce chemin qu'à une seule étape.
 - Aucune des deux arêtes ne fait partie du chemin (y, z) . Alors, chacune des deux arêtes est associée à un des deux cycles dont on calcule le poids, et une seule fait partie du cycle qui sera considéré à l'étape suivante, alors que l'autre ne sera plus considérée.

De ces deux points on conclut que le temps de calcul total des chemins (y, z) et des poids internes aux cycles associés aux arêtes (v_i, y) et (y, w_i) est linéaire en le nombre d'arêtes du graphe. Ainsi cette étape de l'algorithme est bien en temps linéaire.

2 Une approche géométrique

On a vu qu'un graphe planaire à n sommets admet un séparateur de taille de l'ordre de \sqrt{n} , qui sépare le graphe en deux parties contenant au plus $2n/3$ sommets. Dans ce cas on a déduit l'existence du séparateur à partir de l'existence d'un plongement particulier du graphe dans l'espace euclidien (tout simplement un plongement planaire). On veut maintenant généraliser à une classe un peu plus vaste de graphes qui admettent un plongement "gentil" dans un espace euclidien \mathbb{R}^d . Les graphes planaires sont une sous-classe de cette classe de graphes.

2.1 Graphes d'empilements de sphères

On se donne une collection finie de boules fermées $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_n\}$ dans l'espace \mathbb{R}^d . On appelle cette collection un *empilement de sphères* si deux boules distinctes ont des intérieurs disjoints, c.à.d. pour tout $i \neq j$, les boules B_i et B_j sont ou bien disjointes ou bien tangentes extérieurement.

Définition 2.1. Soit G un graphe fini. On dit que G est associé à l'empilement de sphères \mathcal{B} s'il existe un plongement de G dans \mathbb{R}^d tel que :

- les sommets de G sont les centres des boules de \mathcal{B} ;
- deux sommets sont reliés par une arête si et seulement si les deux boules correspondantes sont tangentes.

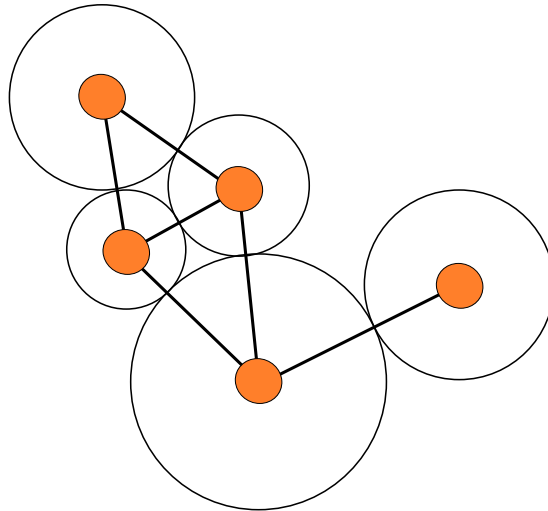


FIGURE 20 – Un empilement de cercles dans \mathbb{R}^2 et son graphe associé.

Dans le cas planaire ($d=2$) on parle d'*empilement de cercles*. Il est évident qu'un graphe associé à un empilement de disques est planaire. Ce qui rend le cas planaire particulièrement intéressant, c'est que la réciproque est aussi vraie :

Théorème 2.2 (Koebe-Andreiev-Thurston). *Soit G un graphe planaire. Alors il existe un empilement de cercles \mathcal{D} dans le plan \mathbb{R}^2 tel que G est associé à \mathcal{D} .*

On donnera une preuve de ce théorème dans la section 2.5 Si $d \geq 3$ on ne peut évidemment pas espérer avoir un énoncé analogue. En effet tout graphe se plonge dans \mathbb{R}^3 , mais les graphes associés aux empilements de sphères ont des propriétés très particulières (comme on le verra par la suite).

On peut généraliser un peu la définition 2.1. On se donne encore une collection finie de boules fermées $\mathcal{B} = \{B_1 \dots B_n\}$ dans \mathbb{R}^d . On dit que \mathcal{B} est un *système de k -superposition* (*k -ply system* en anglais) si aucun point $p \in \mathbb{R}^d$ n'appartient à l'intérieur de $k+1$ boules de \mathcal{B} . Autrement dit, on autorise les intérieurs des boules de \mathcal{B} à se chevaucher, mais au plus k à la fois.

Définition 2.3. On dit que le graphe fini G est associé au système de k -superposition \mathcal{B} s'il existe un plongement de G dans \mathbb{R}^d tel que :

- les sommets de G sont les centres des boules de \mathcal{B} ;
- deux sommets sont reliés par une arête si et seulement si les deux boules (fermées) correspondantes ont une intersection non vide.

Dans la suite de cette section nous allons désormais supposer que G est un graphe fini associé à un système de k -superposition \mathcal{B} dans \mathbb{R}^d . Il faut cependant garder en tête que le cas le plus intéressant est celui (plus simple à visualiser) des graphes associés aux empilements de sphères ($k=1$), qui suffit déjà à couvrir le cas des graphes planaires. Le but de cette section est montrer l'existence d'un certain type de séparateurs pour les graphes de cette forme, et de fournir un algorithme efficace pour les calculer.

Si G est un graphe associé au système de k -superposition $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_n\}$ dans \mathbb{R}^d , il vient à l'esprit une manière naturelle de "séparer" G : on considère une sphère de dimension $d-1$ et de centre et rayon arbitraires $S \subset \mathbb{R}^d$, et on enlève de G les sommets dont les boules correspondantes intersectent S . On va noter l'ensemble de ces sommets $H(S)$. Les sommets qui restent sont partagés en deux : l'ensemble $G_+(S)$ des sommets dont les boules se trouvent entièrement à l'extérieur de S et les sommets $G_-(S)$ dont les boules se trouvent entièrement à l'intérieur de S . Il n'y a évidemment pas d'arêtes reliant un sommet de $G_-(S)$ à un sommet de $G_+(S)$. L'intuition géométrique nous suggère que, à condition de bien choisir la sphère S , la taille de $H(S)$ va être "petite" par rapport à la taille du graphe n , et de plus $G_+(S)$ et $G_-(S)$ vont avoir à peu près la même taille. C'est précisément le contenu du théorème suivant :

Théorème 2.4. *Soit G un graphe à n sommets associé au système de k -superposition $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_n\}$. Avec les notations ci-dessus, il existe une sphère $S \subset \mathbb{R}^d$ telle que :*

- $|H(S)| = O(k^{1/d}n^{1-1/d})$;
- $|G_+(S)|, |G_-(S)| \leq \frac{d+1}{d+2}n$.

De plus, il existe un algorithme pour calculer une telle sphère en temps polynômial en n .

Remarque 2.5. Le théorème 2.4 donne l'existence d'un $\frac{d+1}{d+2}$ -séparateur de taille $O(k^{1/d}n^{1-1/d})$ pour tout graphe associé à un système de k -superposition.

Remarque 2.6. D'après le théorème 2.2 tout graphe planaire est associé à un empilement de disques. Dans ce cas l'on a $k=1$ et $d=2$, et le théorème fournit l'existence d'un $3/4$ -séparateur de taille $O(\sqrt{n})$.

Le temps polynomial ne nous satisfait pas. On peut descendre en temps linéaire, à condition de grandir un peu la constante du séparateur :

Théorème 2.7. *Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un algorithme randomisé pour calculer une sphère S telle que :*

- $|H(S)| = (k^{1/d}n^{1-1/d})$
- $|G_+(S)|, |G_-(S)| \leq (\frac{d+1}{d+2} + \epsilon)n$.

Cet algorithme marche en temps borné par $O(dn) + C(\epsilon, d)$, où $C(\epsilon, d)$ ne dépend que de ϵ et de d .

Le reste de cette section est consacré à la démonstration des théorèmes 2.4 et 2.7. La preuve est constructive : on va donner directement les algorithmes et la partie concernant l'existence en découlera automatiquement.

2.2 Rappels et notions préliminaires

Avant de rentrer dans les détails de l'algorithme, nous avons besoin de rappeler certaines notions et de fixer des notations une fois pour toute.

2.2.1 La projection stéréographique et les applications qui préservent les sphères

On rappelle la définition de la projection stéréographique. Il s'agit d'une application

$$\Pi : \mathbb{R}^d \rightarrow S^d$$

qui induit un difféomorphisme de \mathbb{R}^d sur $S^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$ privée du point $(1, 0, \dots, 0)$. Pour la décrire, on voit \mathbb{R}^d comme inclus dans \mathbb{R}^{d+1} en identifiant tout $x \in \mathbb{R}^d$ avec le point $(0, x) \in \mathbb{R}^{d+1}$. Avec cette identification, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ on considère la droite de \mathbb{R}^{d+1} qui passe par x et par le point $(1, 0, \dots, 0) \in S^d$. Cette droite a un deuxième point d'intersection y avec S^d . On pose alors $\Pi(x) = y$. Une formule explicite pour Π est donnée par

$$\Pi(x) = \left(\frac{2\|x\|^2}{1 + \|x\|^2}, \frac{1 - \|x\|^2}{1 + \|x\|^2} x \right).$$

On appelle *sphère* dans \mathbb{R}^d de dimension $n < d$ tout ensemble qui peut être transporté sur l'ensemble $\{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$ par des rotations, des translations et des homothéties. On appelle *sphère* de dimension n dans S^d toute sphère dans \mathbb{R}^{d+1} dimension n qui est contenue dans S^d . On appellera aussi *cercle* sur S^d toute sphère de dimension $d-1$ (et non pas de dimension 1 comme on pourrait le penser). Un *grand cercle* sur S^d est un cercle de centre $0 \in \mathbb{R}^{d+1}$, ou de manière équivalente, l'intersection d'un hyperplan vectoriel de \mathbb{R}^{d+1} avec S^d .

Soit $X = \mathbb{R}^d$ ou S^d et $Y = \mathbb{R}^d$ ou S^d . On dit qu'une application $f : X \rightarrow Y$ *préserv*e les *sphères* si l'image de toute sphère est une sphère de la même dimension. Un calcul, élémentaire mais un peu long, montre que la projection stéréographique préserve les sphères. Le groupe des automorphismes de S^d qui préservent les sphères s'appelle parfois dans la littérature le *groupe de Möbius*.

2.2.2 Les *centerpoints*

Supposons donné un ensemble fini $\{p_1, \dots, p_n\}$ de points dans \mathbb{R}^d .

Définition 2.8. Un point $p \in \mathbb{R}^d$ est dit être un *centerpoint* pour p_1, \dots, p_n si tout demi-espace ouvert délimité par un hyperplan passant par p contient au plus $\lfloor \frac{d}{d+1} n \rfloor$ points parmi p_1, \dots, p_n .

Tout ensemble fini de points possède un centerpoint. Le paragraphe 2.4 est dédiée à la démonstration de ce résultat et à une discussion du problème du calcul d'un centerpoint. Il découlera de cette section que le calcul d'un centerpoint revient à la résolution d'un système de $O(n^d)$ inéquations linéaires, un problème qu'on sait résoudre au moyen de techniques bien connues de programmation linéaire en temps polynomial en n . Cependant nous avons aussi comme but un algorithme qui marche en temps linéaire en n . Pour cela, nous allons nous contenter de calculer un centerpoint approché, au sens de la définition suivante :

Définition 2.9. Soit $\epsilon > 0$. Le point $p \in \mathbb{R}^d$ est dit un ϵ -centerpoint pour p_1, \dots, p_n si tout demi-espace délimité par un hyperplan passant par p contient au plus $\lfloor (\frac{d}{d+1} + \epsilon)n \rfloor$ points parmi p_1, \dots, p_n .

Pour déterminer un ϵ -centerpoint il y a un algorithme très simple : on extrait au hasard de $\{p_1, \dots, p_n\}$ un échantillon q_1, \dots, q_l de taille constante l , puis on calcule un centerpoint p pour q_1, \dots, q_l avec n'importe quelle méthode naïve. Si on se donne $\epsilon > 0$ et une probabilité de succès $\sigma < 1$, il existe un $l(\epsilon, \sigma)$ indépendant de n tel que si $l \geq l(\epsilon, \sigma)$ cet algorithme fournit un ϵ -centerpoint avec probabilité σ . Nous reviendrons sur ces questions dans la section dédiée aux centerpoints. Ce qui nous intéresse maintenant, c'est qu'on peut résoudre le problème de la détermination d'un ϵ -centerpoint en temps *constant* en n .

2.3 L'algorithme

2.3.1 Les étapes de l'algorithme

On peut maintenant énoncer les étapes des algorithmes des théorèmes 2.4 et 2.7. L'algorithme est essentiellement le même dans les deux cas, les deux différant seulement en une étape. On va donc se concentrer sur le théorème 2.4.

Soit $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_n\}$ un système de k -superposition, les centres des boules étant notés p_1, \dots, p_n et soit G le graphe associé. Voici les étapes de l'algorithme :

- 1) **Projection stéréographique.** On projette \mathcal{B} sur la sphère unité $S^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$ par la projection stéréographique Π . Notons q'_1, \dots, q'_n les images de p_1, \dots, p_n , et D'_1, \dots, D'_n les images de B_1, \dots, B_n (qui sont des "calottes" de S^d).
- 2) **Calculer un centerpoint.** On calcule un centerpoint $c \in \mathbb{R}^{d+1}$ pour q'_1, \dots, q'_n .
- 3) **Bouger le centerpoint.** On calcule une bijection $\Lambda : S^d \rightarrow S^d$ qui préserve les sphères telle que 0 soit un centerpoint dans \mathbb{R}^{d+1} pour $\Lambda(q'_1), \dots, \Lambda(q'_n)$. Notons $q_1, \dots, q_n, D_1, \dots, D_n$ les images de q'_1, \dots, q'_n et D'_1, \dots, D'_n par Λ .
- 4) **Choix d'un grand cercle.** On tire au hasard un grand cercle $C \subset S^d$. On contrôle que C ne coupe pas plus de $Ak^{1/d}n^{1-1/d}$ parmi D_1, \dots, D_n , où $A = A(d)$ est une constante qui ne dépend que de d que l'on va préciser plus tard. Si l'on n'est pas dans ce cas, on tire à nouveau C . Le procédé s'arrête quand on trouve un grand cercle avec la propriété voulue.
- 5) **Projection inverse.** On calcule la sphère $S = \Pi^{-1}\Lambda^{-1}(C)$. Ceci est la sphère cherchée.

Remarque 2.10. On vérifie aisément que toutes les étapes marchent en temps au plus linéaire en n , sauf l'étape 2 car le calcul d'un centerpoint nécessite un temps polynomial. En effet, dans les étapes 1 et 3 il s'agit de calculer l'image de notre système de superposition (de taille n) par certaines applications (il sera clair que le calcul de l'application Λ demande un temps constant), dans l'étape 4 il s'agit de compter le nombre de calottes qui coupent le cercle C , et l'étape 5 marche en temps constant.

Remarque 2.11. Si par contre on substitue à l'étape 2 le calcul d'un ϵ -centerpoint l'algorithme s'effectue globalement en temps linéaire en n . On obtient ainsi l'algorithme du théorème 2.7 (la constante $C(\epsilon, d)$ qui apparaît dans l'énoncé est précisément le temps de calcul d'un ϵ -centerpoint).

On va maintenant montrer que cet algorithme termine avec probabilité 1 (et il termine dans le temps voulu avec probabilité élevée). Pour obtenir ce résultat, il suffira d'analyser les détails des étapes 3 et 4. Il en découlera la preuve du théorème 2.4.

2.3.2 Description de l'étape 3

Le but de cette étape est de se ramener à une situation dans laquelle l'origine est un centerpoint.

Soit c le centerpoint calculé dans l'étape 2. Tout cercle (de dimension $d - 1$) sur S^d est l'intersection d'un et un seul hyperplan affine de \mathbb{R}^{d+1} avec S^d , un cercle étant un grand cercle si et seulement si l'hyperplan correspondant contient l'origine. Ce que l'on cherche est un difféomorphisme $\Lambda : S^d \rightarrow S^d$ qui préserve les sphères et tel que l'origine soit un centerpoint pour $q_1 = \Lambda(q'_1), \dots, q_n = \Lambda(q'_n)$. On note \mathcal{C} l'ensemble des cercles dont les hyperplans contiennent c .

Lemme 2.12. *Il suffit de déterminer une application Λ qui préserve les sphères et qui induit une bijection entre \mathcal{C} et l'ensemble des grands cercles.*

Démonstration. L'origine est un centerpoint si et seulement si tout grand cercle partage l'ensemble $\{q_1, \dots, q_n\}$ en deux parties qui sont l'une avec l'autre en rapport plus grand que $1/(d+1)$. Les cercles de la famille \mathcal{C} font ce travail pour $\{q'_1, \dots, q'_n\}$, il suffit donc de transformer la famille \mathcal{C} dans la famille des grands cercles. ┘

On considère d'abord le cercle $C \in \mathcal{C}$ donné par l'intersection avec S^d de l'hyperplan passant par c et orthogonal à la direction de c (on peut supposer $c \neq 0$ car sinon on prend Λ égale à l'identité). Le cercle C a la particularité d'être de centre c . On a alors une caractérisation utile de l'ensemble \mathcal{C} :

Lemme 2.13. *L'ensemble \mathcal{C} consiste exactement en les cercles $C' \subset S^d$ tels que $C' \cap C$ contient 2 points antipodaux sur C .*

Démonstration. Soit C' un cercle sur S^d . Notons H et H' les hyperplans de C et C' respectivement. L'intersection $H \cap H'$ est ou bien vide ou bien un sous-espace affine de \mathbb{R}^{d+1} de dimension au moins $d - 1$. Si $C \cap C'$ contient deux points antipodaux sur C , le segment reliant ces deux points est contenu dans $H \cap H'$ et passe par c , d'où $c \in H'$ et donc $C' \in \mathcal{C}$. Réciproquement, si $C' \in \mathcal{C}$ l'ensemble $H \cap H' \cap S^d$ est symétrique par rapport à c et non vide, donc contient deux points antipodaux sur C . ┘

Cette caractérisation montre qu'il suffit de définir Λ de telle façon qu'elle ait les trois propriétés suivantes :

1. préserve les sphères ;
2. envoie C en un grand cercle ;
3. envoie tout couple de points antipodaux sur C en un couple de points antipodaux sur S^d .

En effet, si Λ a ces propriétés et si $C' \in \mathcal{C}$, le cercle $\Lambda(C')$ contient deux points antipodaux sur $\Lambda(C)$, donc sur S^d car $\Lambda(C)$ est un grand cercle. On en déduit que $\Lambda(C')$ est aussi un grand cercle. Réciproquement, Λ^{-1} envoie tout grand cercle dans un élément de \mathcal{C} .

Il ne reste qu'à exhiber une application avec les propriétés 1, 2 et 3. Pour simplifier le problème, calculons d'abord une rotation (centrée en l'origine) O_c telle que $O_c(c) = (\|c\|, 0, \dots, 0)$. Un simple calcul montre que la projection stéréographique inverse Π^{-1} envoie le cercle $O_c(C)$ sur la sphère de \mathbb{R}^d de centre 0 et rayon $r = \sqrt{(1 + \|c\|)/(1 - \|c\|)}$. On peut alors appliquer une dilatation de \mathbb{R}^d de facteur $1/r$ pour envoyer cette sphère sur la sphère unité de \mathbb{R}^d , puis reprojeter sur S^d par projection stéréographique. On pose alors :

$$\Lambda = \Pi \circ D_{1/r} \circ \Pi^{-1} \circ O_c$$

où D_α désigne la dilatation de \mathbb{R}^d de centre 0 et de rapport α et $r = \sqrt{(1 + \|c\|)/(1 - \|c\|)}$. On vérifie immédiatement que l'application Λ ainsi définie a les propriétés 1, 2, 3.

2.3.3 Description de l'étape 4

Pour montrer que l'étape 4 termine en temps borné par $O(n)$ avec probabilité élevée, on va montrer l'énoncé suivant :

Lemme 2.14. *Il existe une constante $B = B(d)$, ne dépendant que de la dimension d , telle qu'un grand cercle tiré uniformément au hasard coupe en moyenne moins de $Bk^{1/d}n^{1-1/d}$ calottes parmi D_1, \dots, D_n .*

Du lemme 2.14 et de l'inégalité de Markov il découle que la probabilité qu'un grand cercle coupe plus de $2Bk^{1/d}n^{1-1/d}$ calottes est plus petite que $1/2$. Si on choisit la constante A de l'étape 4 comme $A = 2B$, la probabilité de choisir à chaque itération un grand cercle non adapté converge exponentiellement vite vers 0 avec le nombre d'itérations.

Avant de donner la preuve du lemme 2.14, il faut d'abord préciser la distribution de probabilité que l'on met sur l'ensemble des grands cercles de S^d . Pour cela on observe qu'il existe une "dualité" sur la sphère entre grands cercles et points, plus précisément entre grands cercles et couples de points antipodaux (figure 21 A). A tout point $p \in S^d$ on peut associer le grand cercle déterminé par l'hyperplan vectoriel orthogonal à p . De même, à tout grand cercle C on associe les deux points antipodaux de S^d qui sont sur la droite vectorielle orthogonal à l'hyperplan de C (mais nous n'aurons pas besoin de cette direction-ci de la dualité). On met alors sur l'ensemble des grands cercles la mesure de probabilité induite par la mesure de Lebesgue normalisée sur S^d au moyen de cette dualité : tirer au hasard un grand cercle équivaut à tirer un point de S^d uniformément par rapport à la mesure de Lebesgue et considérer le grand cercle dual de ce point.

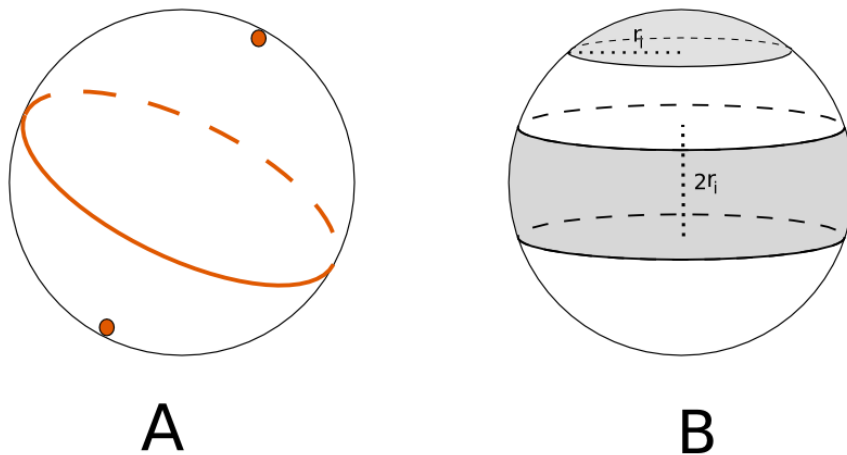


FIGURE 21 – (A) la dualité entre grand cercles et couples de points antipodaux ; (B) une calotte et sa bande duale.

Preuve du lemme 2.14. Pour tout point $p \in S^d$ on note $N(p)$ le nombre de calottes parmi D_1, \dots, D_n coupées par le grand cercle associé à p . On veut majorer l'espérance de la fonction

N , plus précisément on veut montrer qu'il existe une constante B telle que

$$\mathbb{E}[N] \leq Bk^{1/d}n^{1-1/d}.$$

Au moyen de la dualité décrite ci-dessus, on associe à chaque calotte D_i une "bande équatoriale" B_i formée par l'union des grands cercles qui correspondent à des points de D_i . Le grand cercle correspondant à p coupe D_i si et seulement si $p \in B_i$. Il s'ensuit que

$$\mathbb{E}[N] \leq \frac{1}{s_d} \sum_{i=1}^n \text{Surface}(B_i) \quad (1)$$

où s_d désigne la surface totale de la sphère S^d . On notera aussi v_d le volume de la boule unité de \mathbb{R}^d . Soit r_i le rayon (dans \mathbb{R}^{d+1}) de D_i pour tout $i = 1, \dots, n$. La bande B_i a pour épaisseur $2r_i$ (figure 21 B : le "rayon" de la calotte est le rayon dans \mathbb{R}^{d+1} du cercle qui borde la calotte). Un simple calcul montre alors que

$$\text{Surface}(B_i) = s_{d-1} \int_{-r_i}^{r_i} (1-t^2)^{d/2-1} dt \leq 2s_{d-1}r_i. \quad (2)$$

En combinant 1 et 2 on trouve que :

$$\mathbb{E}[N] \leq 2 \frac{s_{d-1}}{s_d} \sum_{i=1}^n r_i.$$

Par convexité de la fonction $x \mapsto x^d$ on a :

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i\right)^d \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i^d.$$

On sait d'ailleurs que les calottes D_i forment un système de k -superposition, ceci implique que

$$v_d \sum_{i=1}^n r_i^d \leq \sum_{i=1}^n \text{Surface}(D_i) \leq ks_d,$$

où la première inégalité exprime le fait que la surface du cercle sous-jacent à une calotte est plus petite que la surface de la calotte elle-même (donc $v_d r_i^d \leq \text{Surface}(D_i)$).

En combinant ces trois dernières inégalités, on obtient que (en utilisant l'identité $v_d = s_{d-1}/d$)

$$\mathbb{E}[N] \leq 2d^{1/d} \left(\frac{s_{d-1}}{s_d}\right)^{1-1/d} \cdot k^{1/d} n^{1-1/d}$$

ce qui termine bien la preuve si l'on choisit $B = 2d^{1/d} \left(\frac{s_{d-1}}{s_d}\right)^{1-1/d}$. ┘

Pour terminer la preuve des deux théorèmes, il ne reste qu'à discuter l'étape 2 qui concerne le calcul d'un centerpoint.

2.4 Centerpoints

Cette section est dédiée à la preuve de l'existence d'un centerpoint pour toute configuration finie de points dans \mathbb{R}^d . Nous allons aussi discuter brièvement un algorithme pour calculer un centerpoint approché (au sens de la définition 2.9). On rappelle la définition 2.8 d'un centerpoint :

Définition. Un point $p \in \mathbb{R}^d$ est dit être un centerpoint pour p_1, \dots, p_n si tout demi-espace ouvert délimité par un hyperplan passant par p contient au plus $\lfloor \frac{d}{d+1}n \rfloor$ points parmi p_1, \dots, p_n .

2.4.1 L'existence

Nous allons déduire l'existence d'un centerpoint du théorème suivant :

Théorème 2.15 (Helly). *Soit C_1, \dots, C_n une collection finie d'ensembles convexes dans \mathbb{R}^d . On suppose que $n \geq d + 1$, et que toute famille de $d + 1$ ensembles parmi C_1, \dots, C_n a une intersection non vide. Alors l'intersection de tous les C_i est non vide.*

Pour montrer cela, on aura d'abord besoin d'un résultat intermédiaire de même nature :

Théorème 2.16 (Radon). *Soit $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_n\}$ un ensemble de $n \geq d + 2$ points dans \mathbb{R}^d . Il existe une partition $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \sqcup \mathcal{P}_2$ telle que $\text{conv}(\mathcal{P}_1) \cap \text{conv}(\mathcal{P}_2) \neq \emptyset$, où $\text{conv}(A)$ désigne l'enveloppe convexe de l'ensemble $A \subseteq \mathbb{R}^d$.*

Démonstration. Comme $n \geq d + 2$, les points p_1, \dots, p_n sont affinement dépendants, il existe donc $n - 1$ réels $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ tels que $\sum_{i=2}^n \lambda_i = 1$ et, quitte à permuter les indices, $p_1 = \lambda_2 p_2 + \dots + \lambda_n p_n$. Si tous les λ_i sont positifs ou nuls, on a terminé car on pose $\mathcal{P}_1 = \{p_1\}$ et $\mathcal{P}_2 = \{p_2, \dots, p_n\}$ et l'on a

$$\text{conv}(\mathcal{P}_1) \ni p_1 = \lambda_2 p_2 + \dots + \lambda_n p_n \in \text{conv}(\mathcal{P}_2).$$

Sinon on peut supposer que les coefficients négatifs sont exactement $\lambda_2, \dots, \lambda_r$. On pose alors $\mathcal{P}_1 = \{p_1, \dots, p_r\}$ et $\mathcal{P}_2 = \{p_{r+1}, \dots, p_n\}$. Comme $\sum_{i=2}^n \lambda_i = 1$ on a $1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_r = \lambda_{r+1} + \dots + \lambda_n = \lambda$ et

$$\text{conv}(\mathcal{P}_1) \ni \frac{1}{\lambda}(p_1 - \lambda_2 p_2 - \dots - \lambda_r p_r) = \frac{1}{\lambda}(\lambda_{r+1} p_{r+1} + \dots + \lambda_n p_n) \in \text{conv}(\mathcal{P}_2).$$

┘

Démonstration du théorème 2.15. On montre le théorème par récurrence sur n . Si $n = d + 1$ il n'y a rien à montrer. On suppose $n > d + 1$ et le théorème vrai pour tout $n' < n$. Par hypothèse de récurrence, pour tout $i = 1, \dots, n$ il existe $p_i \in C_1 \cap \dots \cap \widehat{C_i} \cap \dots \cap C_n$. Soit $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_n\}$, le théorème 2.16 assure alors l'existence d'une partition $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \sqcup \mathcal{P}_2$ et d'un point $q \in \text{conv}(\mathcal{P}_1) \cap \text{conv}(\mathcal{P}_2)$. Nous prétendons que $q \in C_1 \cap \dots \cap C_n$. En effet soit $i \in \{1, \dots, n\}$ fixé, et on suppose que $p_i \in \mathcal{P}_1$. Comme p_i est par définition le seul point de \mathcal{P} qui n'appartient pas à C_i , on a $\mathcal{P}_2 \subset C_i$ et donc $\text{conv}(\mathcal{P}_2) \subset C_i$, d'où $q \in C_i$.

┘

On peut maintenant prouver l'existence des centerpoints :

Théorème 2.17. *Soit $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_n\}$ un ensemble fini dans \mathbb{R}^d . Alors \mathcal{P} admet un centerpoint.*

Démonstration. On raisonne par récurrence sur la dimension d . D'après l'hypothèse de récurrence on peut supposer que \mathcal{P} contient $d + 1$ points affinement indépendants.

On dit qu'un demi-espace fermé \mathcal{H} délimité par un hyperplan H est *plein* si il contient au moins $\lfloor \frac{dn}{d+1} \rfloor + 1$ points de \mathcal{P} . On dit de plus que \mathcal{H} est *minimal* si :

- il est plein ;
- l'hyperplan de bord H contient d points de \mathcal{P} affinement indépendants ;
- l'adhérence de son complémentaire contient au moins $\lceil \frac{n}{d+1} \rceil$ points de \mathcal{P} .

Un point $q \in \mathbb{R}^d$ est un centerpoint si et seulement s'il appartient à tout demi-espace plein. En effet, s'il existe un demi-espace plein \mathcal{H} de bord H tel que $q \notin \mathcal{H}$ le demi espace ouvert délimité par l'hyperplan parallèle à H et passant par q contient plus de $\lfloor \frac{dn}{d+1} \rfloor$ points de \mathcal{P} ; réciproquement, si q n'est pas un centerpoint il est sur le bord d'un demi-espace ouvert \mathcal{H} qui

contient plus de $\lfloor \frac{dn}{d+1} \rfloor + 1$ points de \mathcal{P} et on obtient donc un demi espace fermé plein contenu dans \mathcal{H} , qui ne contient pas q .

On s'est donc ramené à montrer que l'intersection des demi-espaces pleins est non vide. L'intersection des demi-espaces pleins est égale à l'intersection des demi-espaces minimaux, qui sont en nombre fini (la preuve de ce fait est facile et on la laisse au lecteur, il faut utiliser l'hypothèse de l'existence de $d + 1$ points affinement indépendants). On montre que cette famille de convexes satisfait l'hypothèse du théorème de Helly 2.15. Le complémentaire d'un demi-espace minimal contient au plus $\lceil \frac{n}{d+1} \rceil - 1$ points de \mathcal{P} , il en découle que le complémentaire de l'intersection de $d + 1$ demi-espaces minimaux contient au plus $(d + 1)(\lceil \frac{n}{d+1} \rceil - 1) < n$ points de \mathcal{P} et donc n'est pas égale à tout l'espace \mathbb{R}^d . Cela termine la preuve. \square

Remarque 2.18. Pour déterminer tous les demi-espaces minimaux il suffit d'analyser tous les d -uplets de points de \mathcal{P} affinement indépendants, qui sont $O(n^d)$. Après cette opération le calcul d'un centerpoint revient à la détermination d'une solution d'un système de $O(n^d)$ inégalités linéaires. Il existe des techniques de programmation linéaire qui permettent de résoudre ce problème en temps polynomial en n .

2.4.2 La dimension de Vapnik-Chervonenkis

Dans cette section, on va discuter un outil théorique, la dimension de Vapnik-Chervonenkis (dimension VC dans la suite), qui permet de calculer un centerpoint approché, et a plein d'autres applications notamment en apprentissage statistique. Les preuves de la plupart des résultats qu'on va énoncer étant longues et techniques, on va les omettre et renvoyer le lecteur à [8] et à [12].

On se donne un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et une famille d'événements $\mathcal{R} \subset \mathcal{F}$. Par simplicité, on va supposer que la probabilité \mathbb{P} est concentrée sur un ensemble fini $\mathcal{P} \subset \Omega$ (mais pour des raisons esthétiques il vaut mieux garder une notation pour l'espace entier Ω). Il faut penser ici Ω , \mathcal{F} et \mathcal{R} comme donnés une fois pour toutes, par contre la probabilité \mathbb{P} et son support \mathcal{P} peuvent *a priori* varier.

Remarque 2.19. L'exemple clé qu'il faut garder en tête par la suite est le suivant : $\Omega = \mathbb{R}^d$, \mathcal{F} est la tribu borélienne, \mathcal{R} est la famille des demi-espaces ouverts, $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ est l'ensemble fini de points dont on veut calculer un centerpoint et \mathbb{P} est la loi de probabilité uniforme sur \mathcal{P} .

Le but est d'estimer uniformément la probabilité des événements $R \in \mathcal{R}$ en tirant au hasard un échantillon $C_l \subset \mathcal{P}$ de taille l beaucoup plus petite que $|\mathcal{P}|$. Plus précisément, pour tout $l \geq 0$ et tout $R \in \mathcal{R}$ on définit la variable aléatoire

$$X_l^R = \frac{|C_l \cap R|}{l}$$

où C_l est un ensemble de taille l tiré au hasard par rapport à la probabilité \mathbb{P} . Par la loi faible des grands nombres, X_l^R converge en probabilité vers $\mathbb{P}(R)$ quand l tend vers $+\infty$, c'est-à-dire que pour tout $\epsilon > 0$ l'on a

$$\mathbb{P}(|X_l^R - \mathbb{P}(R)| > \epsilon) \rightarrow 0 \text{ si } l \rightarrow +\infty.$$

Ce qu'on cherche est une condition suffisante sur \mathcal{R} qui permette de conclure que cette convergence est uniforme, c'est-à-dire

$$\mathbb{P}(\sup_{R \in \mathcal{R}} |X_l^R - \mathbb{P}(R)| > \epsilon) \rightarrow 0 \text{ si } l \rightarrow +\infty,$$

et on veut de plus que cette condition suffisante ne dépende que de la combinatoire du couple (Ω, \mathcal{R}) et soit indépendante de la probabilité \mathbb{P} . La donnée du couple (Ω, \mathcal{R}) s'appelle un *espace d'arrangements*.

Pour tout ensemble fini $E \subset \Omega$, on peut définir la *restriction* de \mathcal{R} à E par

$$\mathcal{R}|_E = \{R \cap E | R \in \mathcal{R}\}.$$

On a évidemment $|\mathcal{R}|_E| \leq 2^{|E|}$.

Définition 2.20. La dimension de Vapnik-Chervonenkis de l'espace d'arrangements (Ω, \mathcal{R}) , notée $\dim_{VC}(\Omega, \mathcal{R})$, est le plus grand d tel qu'il existe $E \subset \Omega$ de cardinalité d avec $|\mathcal{R}|_E| = 2^{|E|}$. On pose $\dim_{VC}(\Omega, \mathcal{R}) = +\infty$ s'il n'existe pas un tel d fini.

Remarque 2.21. Dans l'exemple de la remarque 2.19, on a $\dim_{VC}(\mathbb{R}^d, \mathcal{R}) = d + 1$. En effet soit E un ensemble de $d + 2$ points dans \mathbb{R}^d . Le théorème de Radon 2.16 nous fournit une partition de E en deux ensembles E_1, E_2 tels que $\text{conv}(E_1) \cap \text{conv}(E_2) \neq \emptyset$. S'il existait un hyperplan qui sépare E_1 et E_2 il séparerait leurs enveloppes convexes aussi, ce qui est une contradiction. Réciproquement, pour tout ensemble E de $d + 1$ points affinement indépendants on a $|\mathcal{R}|_E| = 2^{d+1}$.

Si on pose $\pi_{\mathcal{R}}(n) = \sup_{|E|=n} |\mathcal{R}|_E|$, la dimension VC est exactement le plus grand d tel que $\pi_{\mathcal{R}}(d) = 2^d$. On peut se demander quel est le comportement asymptotique de cette fonction. On considère pour tout d la fonction

$$G_d(n) = \sum_{i=0}^d \binom{n}{i}$$

avec la convention que $\binom{n}{k} = 0$ si $k > n$. La fonction $G_d(n)$ s'interprète comme le nombre maximum de composantes connexes de \mathbb{R}^d privé de n hyperplans. Ce qui suit est le lemme clé de la théorie de la dimension VC :

Lemme 2.22. *Pour tout espace d'arrangements (Ω, \mathcal{R}) , si $\dim_{VC}(\Omega, \mathcal{R}) = d$, on a*

$$\pi_{\mathcal{R}}(n) \leq G_d(n) \leq n^d.$$

Autrement dit, le comportement de la fonction $\pi_{\mathcal{R}}(n)$ est soit exponentiel soit polynomial, et il n'y a pas de cas intermédiaire. Si la dimension VC est bornée on est toujours dans le deuxième cas.

Le théorème qui suit a été démontré par Vapnik et Chervonenkis avec un astucieux argument combinatoire :

Théorème 2.23. *Avec les notations ci-dessus, pour tout $\epsilon > 0$ et tout $l \geq 2/\epsilon^2$ on a*

$$\mathbb{P}(\sup_{R \in \mathcal{R}} |X_l^R - \mathbb{P}(R)| > \epsilon) \leq 4\pi_{\mathcal{R}}(2l)e^{-\epsilon^2 l/8}.$$

Si en particulier $\dim_{VC}(\Omega, \mathcal{R}) = d < +\infty$ on a d'après le lemme 2.4.2

$$\mathbb{P}(\sup_{R \in \mathcal{R}} |X_l^R - \mathbb{P}(R)| > \epsilon) \leq 4(2l)^d e^{-\epsilon^2 l/8} \rightarrow 0 \text{ si } l \rightarrow +\infty.$$

On applique maintenant le théorème 2.23 à l'exemple de la remarque 2.19. Soit \mathcal{P} un ensemble fini de points dans \mathbb{R}^d dont on veut calculer un ϵ -centerpoint approché, et soit \mathbb{P} la probabilité de loi uniforme sur \mathcal{P} . On se donne une probabilité de succès σ et on trouve $l = l(\epsilon, \sigma)$ tel que $4(2l)^d e^{-\epsilon^2 l/8} \leq 1 - \sigma$, puis on choisit au hasard un échantillon $C \subset \mathcal{P}$ de taille l . Soit c un centerpoint pour C . Tout demi-espace ouvert $R \in \mathcal{R}$ dont le bord passe par c vérifie $X_l^R \leq \frac{d}{d+1}$, on en déduit qu'avec probabilité σ , tout demi-espace ouvert R dont le bord passe par c vérifie $\mathbb{P}(R) \leq \frac{d}{d+1} + \epsilon$. Comme \mathbb{P} est la loi uniforme sur \mathcal{P} on a alors $|R \cap \mathcal{P}| \leq \lfloor (\frac{d}{d+1} + \epsilon)n \rfloor$ et donc c est bien un ϵ -centerpoint pour \mathcal{P} . Notons que le $l(\epsilon, \sigma)$ ne dépend pas de \mathcal{P} , et donc en particulier ne dépend pas de sa taille.

2.5 Le théorème de Koebe-Andreev-Thurston

Le but de cette section est de donner une preuve du théorème de Koebe-Andreev-Thurston 2.2. Nous en rappelons ici l'énoncé :

Théorème (Koebe-Andreev-Thurston). *Soit G un graphe planaire. Alors il existe un empilement de cercles \mathcal{D} dans le plan \mathbb{R}^2 tel que G est associé à \mathcal{D} .*

La preuve que l'on va donner a été proposé par Marden et Rodin ([9]) mais et en effet basée sur les idées de Thurston qui a montré dans ses notes [10] un résultat analogue pour les graphes qui se plongent dans des surfaces de genre ≥ 2 . On commence par des notions préliminaires.

2.5.1 Triangulations et structures polyédrales sur la sphère

Définition 2.24. Une *triangulation* \mathcal{T} de la sphère S^2 est un plongement dans S^2 d'un graphe planaire complet G . Ceci détermine une dissection de S^2 en sous-ensembles homéomorphes à un triangle. On notera comme d'habitude V , E et F les ensembles de sommets, arêtes et faces de la triangulation. Topologiquement, on considère ici les deux sommets de chaque arête comme faisant partie de l'arête et les trois arêtes de chaque face comme faisant partie de la face. On utilisera aussi les expressions *0-squelette* pour l'espace topologique discret V , et *1-squelette* pour l'espace topologique G .

Remarque 2.25. La formule d'Euler nous dit que $|V| - |E| + |F| = 2$. De plus $3|F| = 2|E|$ car G est complet. En combinant on obtient

$$2|V| = |F| + 4.$$

Une triangulation de la sphère n'est qu'une réalisation de S^2 comme *complexe simplicial*, une structure abstraite plus générale dont on évite ici de donner la définition formelle pour ne pas allourdir la discussion. Nous aurons quand même besoin de certaines propriétés élémentaires des complexes simpliciaux. Pour éviter une discussion générale, on va maintenant donner "à la main" quelques définitions et propriétés qui ne sont pas standards et dont le seul but est de rendre ce travail autonome.

Définition 2.26. Soit \mathcal{T} une triangulation de S^2 , et soit $V' \subset V$ un sous-ensemble de l'ensemble des sommets. Le *sous-complexe simplicial* $\mathcal{T}_{V'}$ de \mathcal{T} engendré par V' est l'ensemble formé par :

- tous les sommets de V' ;
- toutes les arêtes dont les deux sommets sont dans V' ;
- toutes les faces dont les trois sommets sont dans V' .

Un *sous-complexe simplicial* de \mathcal{T} est un sous-complexe simplicial engendré par un certain sous-ensemble de V .

Un sous-complexe simplicial a évidemment une structure d'espace topologique, et dans le langage courant on l'identifiera souvent avec l'espace topologique sous-jacent.

Définition 2.27. Si E' , F' désignent respectivement les ensembles des arêtes et des faces du sous-complexe simplicial engendré par V' , la *caractéristique d'Euler* de $\mathcal{T}_{V'}$ est définie par

$$\chi(\mathcal{T}_{V'}) = |V'| - |E'| + |F'|.$$

Remarque 2.28. Toute composante connexe d'un sous-complexe simplicial est un sous-complexe simplicial. La caractéristique d'Euler d'un complexe est la somme des caractéristiques d'Euler de ses composantes connexes.

Proposition 2.29. Soit $\mathcal{T}_{V'}$ un sous-complexe simplicial connexe d'une triangulation \mathcal{T} de S^2 . Alors $\chi(\mathcal{T}_{V'}) = 2 - c$, où c est le nombre de composantes connexes de $S^2 \setminus \mathcal{T}_{V'}$.

Démonstration. On modifie le graphe G sous-jacent à la triangulation \mathcal{T} en supprimant tous les sommets qui ne sont pas dans V' et les arêtes reliées à un tel sommet. On obtient ainsi un nouveau graphe (pas forcément complet) G' , qui est connexe car on a supposé $\mathcal{T}_{V'}$ connexe. Les sommets de G' sont exactement les sommets dans V' . Les arêtes de G' sont les arêtes de $\mathcal{T}_{V'}$, et les composantes connexes de $S^2 \setminus G'$ sont exactement les faces triangulaires faisant partie de $\mathcal{T}_{V'}$ plus les c composantes connexes de $S^2 \setminus \mathcal{T}_{V'}$. La formule d'Euler appliquée au graphe G' se traduit alors en

$$\chi(\mathcal{T}_{V'}) + c = 2,$$

d'où le résultat. ┘

À une triangulation sur S^2 on peut associer certaines métriques particulièrement sympathiques.

Définition 2.30. Une *structure polyédrale* sur S^2 est la donnée d'une triangulation \mathcal{T} de S^2 et d'une métrique d sur S^2 telle que pour toute face σ de \mathcal{T} , l'espace métrique $(\sigma, d|_\sigma)$ est isométrique à un triangle dans le plan euclidien.

Remarquons que, étant donnée une structure polyédrale sur S^2 , tout point de $S^2 \setminus V$ admet un voisinage isométrique à un ouvert du plan euclidien. Pour tout point du 0-squelette $p \in V$ on note $Z(p)$ la somme de tous les angles en p des faces qui ont p comme sommet (on peut mesurer les angles via les isométries avec des triangles euclidiens), et on appelle le nombre $K(p) = 2\pi - Z(p)$ la *curvature* en p de la structure polyédrale (\mathcal{T}, d) . La curvature en p mesure de combien d s'éloigne d'une métrique euclidienne au voisinage de p . Elle est nulle si et seulement si d est "localement euclidienne" en p .

Lemme 2.31. Pour toute structure polyédrale sur S^2 on a

$$\sum_{p \in V} K(p) = 4\pi.$$

Démonstration. D'après la remarque 2.25 on a

$$\sum_{p \in V} K(p) = \sum_{p \in V} (2\pi - Z(p)) = 2\pi|V| - \pi|F| = 4\pi.$$

┘

2.5.2 La preuve du théorème

On va montrer la reformulation suivante du théorème 2.2 :

Théorème 2.32. Soit \mathcal{T} une triangulation de S^2 de 1-squelette G . Alors le graphe G est associé à un empilement de cercles dans le plan \mathbb{R}^2 .

Ceci montre le théorème 2.2 pour tout graphe planaire complet. Pour passer au cas d'un graphe planaire quelconque, il suffit de trianguler les faces par un point à l'intérieur et appliquer le théorème 2.32.

Par la suite on notera $n = |V|$ et p_1, \dots, p_n les points de V . Soit $r = (r_1, \dots, r_n)$ un vecteur de nombres réels positifs. On peut définir une métrique d_r sur S^2 qui fait du couple (\mathcal{T}, d_r) une structure polyédrale de la façon suivante : on identifie chaque face σ de sommets p_i, p_j et p_k avec un triangle dans \mathbb{R}^2 déterminé par trois cercles tangents deux à deux de rayons r_i, r_j et r_k , et on transporte la métrique euclidienne sur σ . On peut facilement se débrouiller pour que les identifications soient cohérentes sur toute arête commune à deux faces, et que donc tout se recolle bien en une métrique d_r sur S^2 . Si l'on multiplie le vecteur r par une constante positive, la nouvelle métrique que l'on obtient est égale à la précédente multipliée par la même constante, on va donc se limiter aux vecteurs r tels que $\sum r_i = 1$. On note Δ le simplexe $\{(r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n \mid r_i > 0 \text{ et } \sum r_i = 1\}$. On définit une application continue $F : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ par

$$F : (r_1, \dots, r_n) \mapsto (K_r(p_1), \dots, K_r(p_n))$$

où K_r désigne la courbure par rapport à la structure polyédrale (\mathcal{T}, d_r) . D'après le lemme 2.5.1 on sait que F est à valeurs dans l'hyperplan $H = \{(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum y_i = 4\pi\}$. Pour montrer le théorème, on va étudier le comportement de l'application F .

On admettra un résultat classique :

Proposition 2.33. *Soit $g : \bar{D}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un homéomorphisme local tel que $g|_{S^1 = \partial D^2}$ est injective. Alors g est un homéomorphisme sur son image.*

Dans ce qui suit nous allons supposer que p_1, p_2 et p_3 sont les sommets d'une même face σ_0 de \mathcal{T} .

Lemme 2.34. *Supposons que le point $\bar{y} = (4\pi/3, 4\pi/3, 4\pi/3, 0, \dots, 0)$ appartient à l'image de F . Alors le théorème est vrai.*

Ce résultat est assez intuitif, cependant la preuve est un peu technique.

Démonstration. Supposons que $F(\bar{r}) = \bar{y}$. On va définir une isométrie $\iota : S^2 \setminus \text{Int}(\sigma_0) \rightarrow \mathbb{R}^2$, où l'on met la métrique $d_{\bar{r}}$ au départ et la métrique euclidienne à l'arrivée. La famille de cercles de centres $\iota(p_i)$ et rayons \bar{r}_i pour $i = 1, \dots, n$ est alors bien un empilement de cercles auquel est associé le 1-squelette G de \mathcal{T} . On divise la preuve en deux étapes : dans la première étape on montre qu'il existe une isométrie locale $\iota : S^2 \setminus \text{Int}(\sigma_0) \rightarrow \mathbb{R}^2$, dans la deuxième étape on montre qu'une telle isométrie locale est forcément injective.

Première étape. On peut supposer $n > 3$ ou il n'y a rien à montrer. Le sommet p_n est alors à l'extérieur de la face σ_0 . On choisit une face σ_n qui a p_n comme sommet (peu importe laquelle). Par définition de la métrique $d_{\bar{r}}$, il existe une isométrie $\iota_n : \sigma_n \rightarrow \mathbb{R}^2$. Soit \mathcal{E} l'ensemble des régions $E \subset S^2 \setminus \text{Int}(\sigma_0)$ telles que :

1. E est saturée par \mathcal{T} , c'est-à-dire elle est union de faces de \mathcal{T} ;
2. E est homéomorphe à un disque fermé, et le bord de E est une courbe simple fermée (qui est forcément formée par des arêtes de \mathcal{T}) ;
3. $\sigma_n \subset E$, et il existe une isométrie locale $\iota_E : E \rightarrow \mathbb{R}^2$ qui prolonge ι_n .

On veut montrer que $S^2 \setminus \text{Int}(\sigma_0) \in \mathcal{E}$. On observe d'abord que \mathcal{E} est non vide car $\sigma_n \in \mathcal{E}$. À cause de la condition (1), \mathcal{E} est fini. Soit E_0 un élément de \mathcal{E} maximal pour l'inclusion, et supposons par l'absurde $E_0 \subsetneq S^2 \setminus \text{Int}(\sigma_0)$. Il existe alors des sommets sur le bord de E_0 différents de p_1, p_2, p_3 , et des faces de \mathcal{T} différentes de σ_0 qui ne sont pas contenues dans E_0 . On veut montrer qu'en rajoutant à E_0 une face bien choisie parmi ces faces, on obtient une région $E_1 \in \mathcal{E}$, en contradiction avec la maximalité de E_0 .

Supposons qu'une de ces faces τ ait une arête sur le bord de E_0 et le sommet opposé à cette arête à l'extérieur de E_0 . On pose $E_1 = E_0 \cup \tau$, il est clair que E_1 a les propriétés (1) et (2). De

plus, il est facile de prolonger ι_{E_0} en une application $\iota_{E_1} : E_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de telle façon que ι_{E_1} soit une isométrie locale.

S'il n'existe pas une telle face τ , alors tout arête non contenue dans E_0 et qui a un sommet sur le bord de E_0 a aussi l'autre sommet sur le bord de E_0 , et il n'y a pas de sommets de \mathcal{T} à l'extérieur de E_0 . On remarque que par le théorème de Jordan, $S^2 \setminus \text{Int}(E_0)$ est homéomorphe à un disque (car le bord de E_0 est une courbe simple fermée). Toute arête extérieure à E_0 qui relie deux sommets du bord de E_0 divise alors $S^2 \setminus \text{Int}(E_0)$ en deux composantes connexes, que l'on appelle les « côtés » de l'arête.

S'il y a des arêtes extérieures à E_0 qui ont au moins un sommet différent de p_1, p_2, p_3 , on en prend une, notée e , qui minimise le minimum des nombres de faces de ses deux côtés. Il est facile de voir que ce côté consiste en une face τ , différente de σ_0 , qui a deux arêtes sur le bord de E_0 et dont la troisième arête est e . Soit $E_1 = E_0 \cup \tau$. Il est clair que E_1 a les propriétés (1) et (2). Soit q le sommet de τ opposé à e . La condition $K_{\bar{r}}(q) = 0$ nous permet de prolonger ι_{E_0} en une isométrie locale ι_{E_1} définie sur E_1 .

Si les seules arêtes extérieures à E_0 sont (p_1, p_2) , (p_2, p_3) et (p_3, p_1) on prend n'importe quel sommet q sur le bord de E_0 différent de p_1, p_2, p_3 . Comme il n'y a pas d'arêtes extérieures à E_0 qui ont q comme sommet, q est forcément le sommet d'une face $\tau \neq \sigma_0$ qui a deux arêtes sur le bord de E_0 et la troisième à l'extérieur, opposée à q . On pose à nouveau $E_0 = E_1 \cup \tau$ et on prolonge alors ι_{E_0} à E_1 en utilisant le fait que $K_{\bar{r}}(q) = 0$.

Deuxième étape. On a défini ι , on veut maintenant montrer qu'elle est injective. On a que $\partial(S^2 \setminus \text{Int}(\sigma_0)) = \partial\sigma_0$ est formé de trois arêtes (p_1, p_2) , (p_2, p_3) , (p_3, p_1) . La restriction de ι à chacune de ces arêtes est globalement isométrique car ι l'est sur chaque face de $S^2 \setminus \text{Int}(\sigma_0)$. Il est facile de se convaincre qu'une application du bord d'un triangle à valeur dans \mathbb{R}^2 qui est isométrique sur chaque côté est forcément injective. On conclut en utilisant la proposition 2.33 (car $S^2 \setminus \text{Int}(\sigma_0)$ est topologiquement un disque). ┘

Tout ce qui reste à faire est étudier l'image de F .

Lemme 2.35. *L'application F est injective.*

Démonstration. Soit $r' = (r'_1, \dots, r'_n)$ et $r'' = (r''_1, \dots, r''_n)$. On montre que si $r' \neq r''$ alors $F(r') \neq F(r'')$. Soit I l'ensemble des indices $1 \leq i \leq n$ tels que $r'_i < r''_i$, I est non vide et différent de $\{1, \dots, n\}$ car les composantes de r', r'' ont pour somme 1. On pose $V_I = \{p_i | i \in I\}$ l'ensemble des sommets indicés par les éléments de I . On veut montrer que

$$\sum_{i \in I} K_{r'}(p_i) < \sum_{i \in I} K_{r''}(p_i), \quad (3)$$

ce qui entraîne $F(r') \neq F(r'')$. Soit A l'ensemble des angles qui ont leur sommet dans V_I . Pour tout angle θ , $\text{mes}_r(\theta)$ désigne la mesure de l'angle par rapport à la métrique d_r . On a

$$\sum_{i \in I} K_{r'}(p_i) = \sum_{i \in I} (2\pi - Z_{r'}(p_i)) = 2\pi|I| - \sum_{\theta \in A} \text{mes}_{r'}(\theta) = 2\pi|I| - \sum_{\theta \in A_3} \text{mes}_{r'}(\theta) - \sum_{\theta \in A_{1,2}} \text{mes}_{r'}(\theta)$$

où l'on a partitionné A en l'ensemble A_3 des angles qui font partie d'un triangle dont les trois sommets sont dans V_I , et l'ensemble $A_{1,2}$ des angles dont le triangle contient au moins un sommet $p_j \notin V_I$. On remarque que $I \neq \{1, \dots, n\}$ implique $A_{1,2} \neq \emptyset$. Il est clair que

$$\sum_{\theta \in A_3} \text{mes}_{r'}(\theta) = \pi \cdot \#\{\text{faces dont les trois sommets sont dans } V_I\} = \sum_{\theta \in A_3} \text{mes}_{r''}(\theta). \quad (4)$$

Pour obtenir (3), il reste à montrer que

$$\sum_{\theta \in A_{1,2}} \text{mes}_{r'}(\theta) > \sum_{\theta \in A_{1,2}} \text{mes}_{r''}(\theta). \quad (5)$$

Considérons un triangle dans le plan euclidien de sommets P, Q, R qui sont les centres de trois cercles deux à deux tangents de rayons r_P, r_Q et r_R . Si l'on diminue r_P sans toucher r_Q et r_R , l'angle de sommet P augmente. Si l'on diminue r_P et r_Q sans toucher r_R , l'angle de sommet R diminue, et donc la somme des deux angles restants augmente. Ceci montre (5). On a donc par (4) et (5)

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} K_{r'}(p_i) &= 2\pi|I| - \sum_{\theta \in A_3} \text{mes}_{r'}(\theta) - \sum_{\theta \in A_{1,2}} \text{mes}_{r'}(\theta) \\ &< 2\pi|I| - \sum_{\theta \in A_3} \text{mes}_{r''}(\theta) - \sum_{\theta \in A_{1,2}} \text{mes}_{r''}(\theta) = \sum_{i \in I} K_{r''}(p_i), \end{aligned}$$

ce que l'on voulait. \square

Comme $F : \Delta \rightarrow H$ est une application continue, injective, entre deux ensembles homéomorphes à \mathbb{R}^{n-1} on a d'après le théorème de l'application ouverte de Brouwer :

Corollaire 2.36. *L'application F , vue comme à valeurs dans H , est ouverte.*

On sait donc que l'image $F(\Delta)$ est un ouvert de H . On veut le déterminer précisément. En effet, on va montrer que $F(\Delta)$ est un polyèdre ouvert de H . Pour tout $I \subset \{1, \dots, n\}$ on note encore $V_I = \{p_i | i \in I\}$ l'ensemble des sommets indicés par les éléments de I .

Lemme 2.37. *L'image $F(\Delta)$ est le polyèdre Y formé par les $y \in H$ tels que pour tout $I \subset \{1, \dots, n\}$ non vide et non égal à $\{1, \dots, n\}$,*

$$\sum_{i \in I} y_i > 2\pi|I| - \pi \cdot \#\{\text{faces qui ont au moins un sommet dans } V_I\}.$$

Remarquons que Y est bien un polyèdre car il s'agit de l'intersection d'un hyperplan avec un nombre fini de demi-espaces ouverts.

Démonstration. On s'interroge d'abord sur le comportement de $F(r)$ quand $r \rightarrow \partial\Delta$. Soit $s = (s_1, \dots, s_n) \in \partial\Delta$ fixé, et $I = \{i | s_i = 0\}$. Par définition de $\partial\Delta$, on a $I \neq \emptyset, \{1, \dots, n\}$. On essaye de comprendre le comportement à la limite de

$$\sum_{i \in I} K_r(p_i)$$

quand $r \rightarrow s$. Comme dans la démonstration précédente, A désigne l'ensemble des angles qui ont leur sommet dans V_I . On partitionne ensuite A en trois ensembles A_1, A_2 et A_3 , où A_j désigne l'ensemble des angles qui appartiennent à une face triangulaire qui a exactement j sommets dans V_I . On a de même que dans la démonstration précédente

$$\sum_{i \in I} K_r(p_i) = 2\pi|I| - \sum_{\theta \in A_1} \text{mes}_r(\theta) - \sum_{\theta \in A_2} \text{mes}_r(\theta) - \sum_{\theta \in A_3} \text{mes}_r(\theta).$$

La troisième somme est constante en r et égale à $\pi \cdot \#\{\text{faces qui ont 3 sommets dans } V_I\}$. Il faut analyser les premières deux sommes. Considérons un triangle dans le plan euclidien de sommets P, Q et R déterminé par trois cercles de rayons r_P, r_Q et r_R . Si $r_P \rightarrow 0$ et r_Q, r_R

restent minorés par une constante positive, la mesure de l'angle de sommet P tend vers π . Si r_P et r_Q tendent vers 0 et r_R reste minoré par une constante positive, la mesure de l'angle de sommet R tend vers 0 et donc la somme des mesures des deux angles qui restent tend vers π . Ceci nous dit que les deux sommes indicées par A_1 et A_2 tendent respectivement vers $\pi \cdot \#\{\text{faces qui ont exactement 1 sommets dans } V_I\}$ et $\pi \cdot \#\{\text{faces qui ont exactement 2 sommets dans } V_I\}$. Donc si $r \rightarrow s$

$$\sum_{i \in I} K_r(p_i) \rightarrow 2\pi|I| - \pi \cdot \#\{\text{faces qui ont au moins un sommet dans } V_I\}.$$

Nous sommes prêts pour montrer le lemme. Montrons que $F(\Delta) \subset Y$. Soit $r \in \Delta$. On veut montrer que pour tout $I \subset \{1, \dots, n\}$ non vide et différent de $\{1, \dots, n\}$ on a

$$\sum_{i \in I} K_r(p_i) > 2\pi|I| - \pi \cdot \#\{\text{faces qui ont au moins un sommet dans } V_I\}. \quad (6)$$

Soit $s \in \partial\Delta$ tel que $I = \{i | s_i = 0\}$ et $s_j > r_j$ pour tout $j \notin I$. Si $r' \in \Delta$ est assez proche de s , on a $I = \{i | r'_i < r_i\}$ et donc d'après la preuve du lemme 2.35 on a

$$\sum_{i \in I} K_r(p_i) > \sum_{i \in I} K_{r'}(p_i).$$

En passant à la limite quand $r' \rightarrow s$ on obtient bien (6).

Montrons ensuite que $F : \Delta \rightarrow Y$ est surjective. La discussion faite au début de cette preuve nous dit que F est coercive, c'est-à-dire $F(r) \rightarrow \partial Y$ si $r \rightarrow \partial\Delta$. Un raisonnement classique nous dit alors que l'image de F est fermée dans Y (prendre une suite dans $F(\Delta)$ qui converge quelque part dans Y , la suite des images réciproques reste dans un compact de Δ donc on peut extraire une sous-suite convergente, on conclut par continuité de F). D'après le corollaire 2.36 on sait d'ailleurs que $F(\Delta)$ est ouvert dans H , donc dans Y . Par connexité on conclut que $F(\Delta) = Y$. \square

Le lemme qui suit conclut alors la preuve du théorème 2.32.

Lemme 2.38. *Le point $\bar{y} = (4\pi/3, 4\pi/3, 4\pi/3, 0, \dots, 0)$ appartient à Y .*

Démonstration. On veut montrer que pour tout $I \subset \{1, \dots, n\}$ non vide et différent de $\{1, \dots, n\}$ on a l'inégalité

$$\sum_{i \in I} \bar{y}_i > 2\pi|I| - \pi \cdot \#\{\text{faces qui ont au moins un sommet dans } V_I\}.$$

On analyse les différents cas. Supposons d'abord que $|I| = n - 1$. Alors toute face a au moins un sommet dans V_I . La somme à gauche de l'inégalité est supérieur ou égale à $8\pi/3$. En utilisant la remarque 2.25 on voit que le terme de droite est égal à $2\pi(|V| - 1) - \pi|F| = 2\pi < 8\pi/3$.

Supposons ensuite que $|I| = n - 2$. Alors le terme à gauche est supérieur ou égal $4\pi/3$, et par le même raisonnement qu'au cas précédent le terme de droite est nul.

On peut désormais supposer $|I| \leq n - 3$. Dans ce cas on va montrer que le terme à droite de l'inégalité est toujours strictement négatif. Soit \mathcal{T}_I le sous-complexe simplicial engendré par V_I (définition 2.26) et soient E_I, F_I les ensembles de ses arêtes et de ses faces. On appelle de plus F_I^1, F_I^2 les ensembles des faces de \mathcal{T}_I qui ont respectivement 1 ou 2 sommets dans V_I . Le terme de droite de l'inégalité se réécrit

$$\pi(2|V_I| - |F_I| - |F_I^1| - |F_I^2|).$$

Chaque arête de E_I appartient à exactement deux faces de $F_I \cup F_I^2$. De plus chaque face de F_I a trois arêtes dans E_I et chaque face de F_I^2 a une arête dans E_I . Ceci nous dit que $2|E_I| = 3|F_I| + |F_I^2|$. En utilisant cette relation pour éliminer $|F_I^2|$, l'expression précédente devient

$$\pi(2|V_I| - 2|E_I| + 2|F_I| - |F_I^1|) = \pi(2\chi(\mathcal{T}_I) - |F_I^1|),$$

quantité que l'on veut montrer être négative. Pour cela, on observe qu'il s'agit d'une fonction du sous-complexe \mathcal{T}_I qui est additive sur les composantes connexes (c'est-à-dire elle est la somme des évaluations de la même fonction sur les composantes connexes de \mathcal{T}_I). Pour montrer qu'elle est négative on peut donc supposer \mathcal{T}_I connexe. Dans ce cas, l'expression s'écrit (en utilisant la proposition 2.29)

$$\pi(4 - 2c - |F_I^1|),$$

où c est le nombre de composantes connexes de $S^2 \setminus \mathcal{T}_I$. Si $c \geq 3$ cette expression est négative et on a fini.

On suppose $c = 2$ et on montre $|F_I^1| \geq 1$. Comme $|V_I| \leq n - 3$, dans une des deux composantes connexes de $S^2 \setminus \mathcal{T}_I$ il y a au moins 2 sommets qui n'appartiennent pas à V_I . Prenons dans cette composante connexe un sommet $p \notin V_I$ qui est relié par une arête à un sommet $r' \in V_I$. Sur la courbe fermée autour de p formée par les sommets reliés à p par une arête, il y a au moins un sommet $q' \notin V_I$ (sinon la composante connexe en question consisterait de p tout seul, en contradiction avec le fait que dans cette composante connexe il y a deux sommets qui n'appartiennent pas à V_I). Sur cette courbe il y a donc deux sommets adjacents q, r avec $q \notin V_I$ et $r \in V_I$. Le triangle de sommets p, q, r appartient à F_I^1 (figure 22 A).

Supposons maintenant $c = 1$ et montrons $|F_I^1| \geq 3$. Comme dans le cas précédent, on trouve un triangle (p, q, r) avec $p, q \notin V_I$ et $r \in V_I$. Regardons la courbe (fermée) formée par les sommets autour de l'arête (p, q) , reliés à un des sommets p et q . Sur cette courbe il y a au moins un sommet $r' \notin V_I$ (sinon la seule composante connexe de $S^2 \setminus \mathcal{T}_I$ contiendrait exclusivement les arêtes p, q et il y a au moins trois sommets dans $V \setminus V_I$). Après cette observation, en analysant cette courbe on trouve facilement trois triangles distincts dans F_I^1 (figure 22 B). ┘

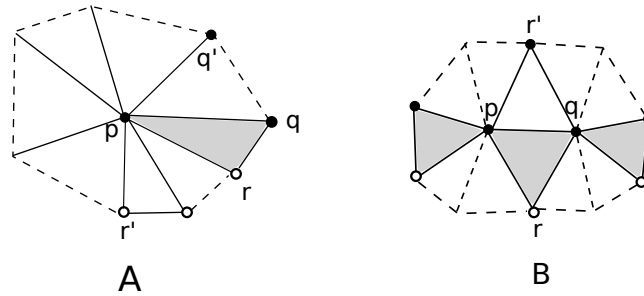


FIGURE 22 – En blanc les points de V_I , en noir les points hors de V_I , en gris les faces de F_I^1 . Dans les deux cas, l'idée c'est regarder la première arête sur la courbe où il y a un changement noir-blanc.

Nos remerciements vont à Éric Colin de Verdière et Pierre Pansu pour leur disponibilité, leur patience et les réponses qu'ils ont apportées à toutes nos questions.

Références

- [1] Ungar, Peter : *A theorem on planar graphs*. J. London Math. Soc. 26, (1951). 256–262.
- [2] Lipton, Richard J. ; Tarjan, Robert E. : *A separator theorem for planar graphs*. Proceedings of a Conference on Theoretical Computer Science (Univ. Waterloo, Waterloo, Ont., 1977), pp. 1–10. Comput. Sci. Dept., Univ. Waterloo, Waterloo, Ont., 1978.
- [3] Lipton, Richard J. ; Tarjan, Robert E. : *Applications of a Planar Separator Theorem*. SIAM J. Comput. 9, pp. 615-627
- [4] Djidjev, Hristo Nicolov : *On the problem of partitioning planar graphs*. SIAM J. Algebraic Discrete Methods 3 (1982), no. 2, 229–240.
- [5] Miller, Gary L. ; Teng, Shang-Hua ; Thurston, William ; Vavasis, Stephen A. : *Separators for sphere-packings and nearest neighbor graphs*. Journal of the ACM, Vol 44, No. 1, Janvier 1997, pp. 1-29.
- [6] Miller, Gary L. ; Teng, Shang-Hua ; Thurston, William ; Vavasis, Stephen A. : *Geometric separators for finite element-meshes* SIAM J. Sci Comput., Vol 19, No. 2, pp. 346-386, Mars 1998.
- [7] Spielman, Daniel A. ; Teng, Shang-Hua. *Disk packings and planar separators* Proceedings of 12th annual ACM symposium on computational geometry (Philadelphia, Pa., May 24-26). ACM, New York, pp.349-359.
- [8] Vapnik, V. N. ; Chervovenkis, A. Ya. : *On the uniform convergence of relative frequencies to their probabilities*, Theory of probability and its applications, Vol. 16, No. 2, 1971, pp.264-180.
- [9] Marden, Al ; Rodin, Burt : *On Thurston's formulation and proof of Andreev's theorem* Computational methods and function theory (Valparaíso, 1989), Lectures Notes in Math., 1435, Springer, Berlin, 1990, pp. 103-115.
- [10] Thurston, William : *The geometry and topology of 3-manifolds*, lecture notes, Princeton University, Princeton, New Jersey, 1977/78.
- [11] Edelsbrunner, H. : *Algorithms in combinatorial geometry*. Springer-Verlag, New-York, (1987)
- [12] Har-Peled, Sariel, *Notes de cours*, Mai 2010
- [13] Har-Peled, Sariel : *A simple proof of the existence of a planar separator*. (2011) arXiv :1105.0103 [cs.CG]
- [14] Henzinger, Monika R. ; Klein, Philip ; Rao, Satish ; Subramanian, Sairam : *Faster shortest-path algorithms for planar graphs*. J. Comput. System Sci. 55 (1997), no. 1, part 1.