Introduction à l'Analyse Stochastique

Mémoire du Magistère MMFAI sous la direction de M. le professeur A. S. Üstünel

Jérôme Valentin

20 mars 2008

Résumé

Le but de ce document est de présenter l'analyse stochastique, ou calcul de Malliavin, qui vise à étudier des processus stochastiques via des idées d'analyse fonctionnelle. Après en avoir présenté les fondements (construction d'espaces de type Sobolev sur l'espace de Wiener), on tentera d'en montrer quelques applications simples.

Table des matières

1 Rappels

1.1 Espaces de Wiener et de Cameron-Martin

$\star$ On note W et on appelle espace de Wiener l'ensemble $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, qui en fait un espace de Banach, et de la tribu des boréliens associée, notée $\mathcal{F}$. On note X_t l'application continue : $w \in W \mapsto w(t) \in \mathbb{R}$, et on associe au processus (X_t) la filtration $(\mathcal{F}_t)$. On rappelle qu'il existe une unique mesure sur $(W, \mathcal{F}_t)$ sous laquelle le processus des coordonnées (X_t) soit un $(\mathcal{F}_t)$-mouvement brownien : c'est la mesure de Wiener, ci-après notée μ.

Remarque 1.1.1 *Désormais, l'espace de probabilité sur lequel nous nous placerons sera l'espace de Wiener tel qu'il vient d'être défini.*

$\star$ On note H, et on appelle espace de Cameron-Martin, l'ensemble des primitives nulles en 0 d'éléments de $L^2([0,1],\mathbb{R},\lambda)$. Un élément h de H admet donc une dérivée que l'on note $\dot{h}$. La norme $\|h\|_H = \|\dot{h}\|_{L^2}$ munit H d'une structure d'espace de Hilbert, associée au produit scalaire $(h_1,h_2)_H = (\dot{h}_1,\dot{h}_2)_{L^2}$. De plus, si $w \in W$, on a équivalence de $w \in H$ et de $\|w\|_H < \infty$, et $h \in H \mapsto \dot{h} \in L^2$ est une isométrie. Mentionnons enfin que : $\forall h \in H$: $\|h\|_\infty \leq \|h\|_H$, si bien que $H \hookrightarrow W$. On sait en outre, grâce à la théorie des espaces de Sobolev réels, que cette injection est compacte.

1.2 Résultats de calcul stochastique

On rappelle d'abord le résultat suivant, conséquence immédiate du théorème de Girsanov qui sera fondamentale pour la suite :

Théorème 1.2.1 (Cameron-Martin) *Soit $h \in H$. On note (X^h) le processus défini sur l'espace de Wiener par :*

$$X_t^h(w) = X_t(w) + h_t = w(t) + h(t)$$

Ainsi $X^h : W \mapsto W$. On note μ_h la mesure-image de μ par X^h, et on considère la martingale locale :

$$\Lambda_t^h = \exp\Big(- \int_0^t \dot{h}_s dX_s - \frac{1}{2}\int_0^t |\dot{h}_s^2| ds\Big)$$

Alors $\mu_h \ll \mu$ et $\dfrac{d\mu_h}{d\mu} = \Lambda_1^h$.

On en déduit le :

Corollaire 1.2.1 *Soient $F, G \in L^2(\mu)$. Si $F = G$ p.s. alors $\forall h \in H$: $F(\cdot + h) = G(\cdot + h)$ p.s.*

Remarque 1.2.1 *Réciproquement, si $h \in W$ est tel que $\mu_h \ll \mu$, alors on a nécessairement $h \in H$.*

On utilisera également la notion de décomposition en chaos de Wiener :

Définition 1.2.1 (Chaos de Wiener) *On appelle chaos de Wiener d'ordre n l'espace vectoriel des intégrales d'Itô-Wiener d'ordre n d'éléments symétriques de $L^2([0,1]^n)$, pour lesquelles on adopte la notation : $I_n(f)$.*

Les éléments d'un chaos de Wiener sont clairement des variables aléatoires ; par convention on appelle chaos de Wiener d'ordre 0 l'ensemble des constantes. Cette définition est motivée par le :

Théorème 1.2.2 (Décmposition en chaos de Wiener) *Tout élément de $L^2(\mu)$ s'écrit de manière unique comme somme orthogonale de chaos de Wiener :*

$$f = E[f] + \sum_{n=1}^{\infty} I_n(f_n)$$

Le fondement de la preuve est le :

Théorème 1.2.3 (représentation d'Itô) *Soit $\phi \in L^2(\mu)$. Il existe $K \in L^2_a([0,1] \times W, \lambda \otimes \mu)$ tel que :*

$$\phi = E[\phi] + \int_0^1 K_s dX_s$$

que l'on prouve d'abord dans le cas particulier des Λ^h, puis dans le cas général en observant que les combinaisons linéaires de Λ^h sont denses dans L^2.

On peut établir le théorème 1.2.2 en appliquent de manière itérée le théorème de représentation d'Itô.

De plus, si pour $h \in H$ on introduit la notation :

$$h^{\otimes p}(t_1, \cdots, t_p) = \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_p} \dot{h}(s_1) \cdots \dot{h}(s_p) ds_1 \cdots ds_p$$

et donc :

$$I_p(h^{\otimes p}) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \dot{h}(s_1) \cdots \dot{h}(s_p) dX_{s_1} \cdots dX_{s_p}$$

on peut par exemple vérifier que, pour $h \in H$ on a la décomposition en chaos de Wiener suivante :

$$\exp\left(\int_0^1 \dot{h}_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^1 |\dot{h}_s|^2 ds \right) = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{I_p(h^{\otimes p})}{p!}$$

2 Gradient et divergence

On va construire le gradient comme une dérivée directionnelle au sens L^2 (ou L^p). D'après le corollaire 1.2.1 le choix judicieux pour l'ensemble des directions de dérivation est H. La divergence sera construite comme adjoint du gradient. On se donne aussi, pour la suite de ce paragraphe, un espace de Hilbert séparable X.

2.1 Construction et propriétés du gradient

On construit d'abord le gradient pour les fonctionnelles du type ci-dessous :

Définition 2.1.1 (Fonctionnelle cylindrique) *On dit que $F : W \to X$ est cylindrique si elle est de la forme :*

$$F(w) = f(X_{t_1}(w), \cdots, X_{t_n}(w))$$

où $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, X)$.

Dans ce cas, on pose : $\forall h \in H \ : \ \nabla_h F(w) = \frac{d}{d\lambda} F(w + \lambda \cdot h)|_{\lambda=0}$. On a donc explictement :

$$\nabla_h F(w) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(X_{t_1}(w), \cdots, X_{t_n}(w)) \cdot h(t_i)$$

On remarque que $\nabla_h F : W \mapsto X$ et que $\nabla F : W \mapsto X \otimes H \simeq \mathcal{L}(H, X)$.

Remarque 2.1.1 *L'ensemble des fonctionnelles cylindriques est dense dans $L^p(W, X, \mu)$.*

Pour achever la construction, on utilise alors la :

Proposition 2.1.1 *Si $p \geq 1$: ∇ est un opérateur fermable sur $L^p(W, X, \mu)$.*

Remarque 2.1.2 *Le résultat est vrai pour $p \geq 1$, mais la preuve ci-dessous, qui utilise la dualité : $(L^p)' \simeq L^{p'}$ n'est valable que pour $p > 1$.*

Il s'agit de montrer que si (F_n) est une suite de fonctions cylindriques sur W telles que $F_n \to 0$ au sens de $L^p(W, X, \mu)$, et telles que (∇F_n) soit une suite de Cauchy au sens de $L^p(W, X \otimes H, \mu)$, alors $\nabla F_n \to 0$ au sens de $L^p(W, X \otimes H, \mu)$. Puisqu'on sait qu'une limite existe et que les fonctionnelles cylindriques sont denses dans les L^p, il suffit de montrer que $\forall h \in H$, $\forall \phi : W \to X$ cylindrique : $E\Big[(\nabla_h F, \phi)_X\Big] = 0$. Et on a bien, en utilisant les calculs déjà effectués pour les fonctionnelles cylindriques et le théorème de Cameron-Martin :

$$\begin{aligned}
E\Big[\Big(\nabla_h F_n, \phi\Big)_X\Big] &= E\Big[\Big(\frac{d}{d\lambda} F_n(w + \lambda h), \phi(w)\Big)_X\Big]_{|\lambda=0} \\
&= \frac{d}{d\lambda} E\Big[\Big(F_n(w), \phi(w - \lambda h)\Big)_X \cdot \mathcal{E}\big(\lambda \int_0^{\cdot} \dot{h}_s dW_s\big)\Big]_{|\lambda=0} \\
&= -E\Big[\Big(F_n, \nabla_h \phi\Big)_X\Big] + E\Big[(F_n, \phi)_X \cdot \int_0^1 \dot{h}_s dW_s\Big]
\end{aligned}$$

et comme $F_n \to 0$ au sens de L^p, on conclut en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans X puis l'inégalité de Hölder.

Il est alors naturel de définir le gradient comme suit :

Définition 2.1.2 (dérivée de Gross-Sobolev) *On dit que $F \in Dom_p(\nabla)$ s'il existe une suite de fonctionnelles cylindriques telles que $F_n \to F$ et (∇F_n) soit une suite de Cauchy au sens L^p. Dans ce cas on pose $\nabla F = lim_{n\to\infty} \nabla F_n$.*

Bien sûr le résultat précédent implique que la définition de ∇F est indépendante de la suite de fonctions cylindriques (F_n). Dans le cadre de la définition précédente :

Définition 2.1.3 (Espace de Sobolev) *On note $\mathbb{D}_{p,1}(X)$ l'espace vectoriel $Dom_p(\nabla)$ muni de la norme : $\|F\|_{p,1} = \|F\|_{L^p} + \|\nabla F\|_{L^p}$.*

Comme $\forall k \in \mathbb{N}$, $X \otimes H^{\otimes k}$ est encore un espace de Hilbert séparable, on peut définir des espaces $\mathbb{D}_{p,k}(X)$ par itération :

$$F \in \mathbb{D}_{p,k}(X) \ ssi \ \nabla^{k-1} F \in \mathbb{D}_{p,1}(X \otimes H^{\otimes(k-1)})$$

et dans ce cas :

$$\nabla^k F := \nabla\big(\nabla^{k-1} F\big)$$

On munit $\mathbb{D}_{p,k}(X)$ de la norme : $\|F\|_{p,k} = \|F\|_{L^p(W,X,\mu)} + \sum_{k=1}^{p} \|\nabla^k F\|_{L^p(W,X\otimes H^{\otimes k},\mu)}$

Exemple 2.1.1 (Dérivation d'une intégrale stochastique) *Soit $K \in \mathbb{D}_{p,1}(H)$ tel que $\dot{K}$ soit un processus adapté. Alors $\int_0^1 K_s dX_s \in \mathbb{D}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $\forall h \in H$:*

$$\nabla_h \int_0^1 K_s dX_s = \int_0^1 \big(\nabla_h K_s\big) dX_s + \int_0^1 \dot{K}_s \dot{h}_s ds$$

On a une propriété intéressante de mesurabilité du gradient :

Proposition 2.1.2 *Si $\phi \in \mathbb{D}_{p,1}(X)$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable, alors $\nabla\phi$ aussi, et pour tout $h \in H$ dont le support est inclus dans $[t,1]$: $\nabla_h \phi = 0$.*

Les vérifications sont faciles pour les fonctionnelles cylindriques et passent à la limite presque sure.

Moyennant une étude plus poussée en analyse de Hilbert, on déduit de la proposition 2.1.2 le résultat suivant :

Théorème 2.1.1 *Soit $u \in \mathbb{D}_{p,1}(H)$ tel que $\dot{u}$ soit adapté. Alors ∇u est presque sûrement un opérateur de Hilbert-Schmidt quasi-nilpotent sur H.*

Dans le cas particulier où $X = \mathbb{R}$, on remarque en outre que si $f \in \mathbb{D}_{p,1}$, p.s. $w \in W$: $h \to \nabla_h f(w)$ est un élément de H^*. Donc le théorème de Riesz assure qu'il existe $K(w) \in H$ tel que :

$$\nabla_h f(w) = (\nabla f(w), K(w))_H = \int_0^1 \dot{h}_s \dot{K}(w)_s ds$$

On note : $K = Df$. On peut alors préciser le théorème de représentation d'Itô :

Théorème 2.1.2 (Formule d'Itô-Clark) *Soit $f \in \mathbb{D}_{p,1}(\mathbb{R})$. On a :*

$$f = E[f] + \int_0^1 E[D_s f|\mathcal{F}_s] dX_s$$

A titre d'application, on peut établir une inégalité de type Poincaré :

Théorème 2.1.3 (Inégalité de Poincaré) *Soit* $f \in \mathbb{D}_{2,1}(\mathbb{R})$*. On a :*

$$E[|f - E[f]|^2] \leq E[|\nabla f|_H^2]$$

En effet, on a :

$$\begin{aligned} E[|f - E[f]|^2] &\leq E\left[\int_0^1 E[D_s f|\mathcal{F}_s]^2 ds\right] \\ &= E\left[\int_0^1 E[D_s f]^2 ds\right] \\ &= E[|\nabla f|_H^2] \end{aligned}$$

Une autre application possible est le :

Théorème 2.1.4 (Inégalité logarithmique de Sobolev) *Soit* f *élément de l'un des* $\mathbb{D}_{p,1}(\mathbb{R})$ *; on a :*

$$E[f^2 \log f^2] - E[f^2] \log E[f^2] \leq 2E[|\nabla f|_H^2]$$

Il suffit de prouver que si en outre on a $f > 0$ et $E[f] = 1$ alors :

$$E[f \log f] \leq \frac{1}{2} E\left[\frac{1}{f} |\nabla f|_H\right]$$

La formule d'Itô-Clark permet d'écrire : $f = 1 + \int_0^1 E[D_s f|\mathcal{F}_s] dX_s$. Introduisons aussi la martingale :

$$M_t = E[f|\mathcal{F}_t] = 1 + \int_0^t E[D_s f|\mathcal{F}_s] dX_s$$

La formule d'Itô permet d'écrire :

$$\ln M_t = \int_0^t \frac{dM_s}{M_s} dX_s - \frac{1}{2} \int_0^t \frac{d\left\langle M\right\rangle_s}{M_s^2}$$

et $d\left\langle M\right\rangle_s = E[D_s f|\mathcal{F}_s]^2 ds$ donc on en déduit en particulier :

$$f = \exp\left(\int_0^1 \frac{E[D_s f|\mathcal{F}_s]}{E[f|\mathcal{F}_s]} dX_s - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{E[D_s f|\mathcal{F}_s]}{E[f|\mathcal{F}_s]}\right)^2 ds\right)$$

d'où l'on tire par une autre application de la formule d'Itô :

$$E[f \ln f] = \frac{1}{2} E\left[f \int_0^1 \left(\frac{E[D_s f|\mathcal{F}_s]}{E[f|\mathcal{F}_s]}\right)^2 ds\right]$$

Puis, en notant ν la mesure de probabilité définie par : $d\nu = fd\mu$ et en remarquent que : $D_s \ln f = \frac{D_s f}{f}$ il vient :

$$\begin{aligned} E[f \ln f] &= \frac{1}{2} E\left[f \int_0^1 \left(\frac{E[fD_s \ln f | \mathcal{F}_s]}{E[f|\mathcal{F}_s]} \right)^2 ds \right] \\ &= \frac{1}{2} E_\nu \left[\int_0^1 (E_\nu[D_s \ln f | \mathcal{F}_s])^2 \, ds \right] \\ &\leq \frac{1}{2} E_\nu \left[\int_0^1 (D_s \ln f)^2 \, ds \right] \\ &= \frac{1}{2} E[f |\nabla \ln f|]_H^2 \\ &= \frac{1}{2} E\left[\frac{|\nabla f|_H^2}{f} \right] \end{aligned}$$

ce qui conclut.

2.2 Construction de la divergence

On construit la divergence comme adjoint du gradient :

Définition 2.2.1 (Divergence d'une variable aléatoire) *Soit ξ une variable aléatoire à valeurs dans $X \otimes H$. On dit que ξ admet une divergence au sens de $\mathbb{D}_{p,1}$, et on note $\xi \in Dom_p(\delta)$, si $\forall \phi \in \mathbb{D}_{p^*,1}(X)$: $\phi \mapsto \big(\nabla\phi, \xi\big)_{X\otimes H}$ est une forme linéaire continue. Dans ce cas le théorème de Riesz permet de définir la divergence $\delta\xi : W \to X$ par :*

$$\forall \phi \in \mathbb{D}_{p,1}(X) \; E\big[(\phi, \delta\xi)_X\big] = E\big[(\nabla\phi, \xi)_{X\otimes H}\big]$$

Exemple 2.2.1 *Pour $h \in H$ on calcule : $\delta h = \int_0^1 \dot{h}_s dW_s$.*

3 Semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck

3.1 Définitions et propriétés

Définition 3.1.1 *Soit $u \in L^p(W, X, \mu)$ pour un $p \geq 1$. On pose :*

$$P_t f(w) = \int_W f\Big(e^{-t} w + \sqrt{1 - e^{-2t}} w'\Big) d\mu(w')$$

On vérifie facilement que $P_t f$ est bien défini, et que $\|P_t f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p}$. On en déduit le même résultat pour L^∞, puisque si $\phi \in L^\infty$ alors $\forall p : \phi \in L^p$ et $\|\phi\|_{L^p} \to \|\phi\|_{L^\infty}$. On peut aussi observer que $P_0 = Id$ et que $P_t f \to E[f]$ d'après le théorème de convergence dominée.

On va vérifier que pour tout t, les espaces propres de P_t sont exactement les chaos de Wiener. Pour cela, on commence par calculer : $P_t \mathcal{E}(I(h))_1$, où $I(h) = \int_0^\cdot \dot{h}_s dW_s$. En passant par les sommes de Riemann, on vérifie facilement que $I(h)$ est linéaire en w et on en déduit :

$$\begin{aligned}
&P_t\mathcal{E}(I(h))_1(w)\\
&= \int_W \exp\left(\left(e^{-t}\Big(\int_0^1 \dot{h}_s dW_s\Big)(w) - \frac{e^{-2t}}{2}\int_0^1 |\dot{h}_s|^2 ds\right) + \left(\sqrt{1-e^{-2t}}\Big(\int_0^1 \dot{h}_s dW_s\Big)(w') - \frac{1-e^{-2t}}{2}\int_0^1 |\dot{h}_s|^2 ds\right.\right.\\
&= \mathcal{E}\big(e^{-t}I(h)\big)_1 \times E\Big[\mathcal{E}\big(\sqrt{1-e^{-2t}}I(h)\big)_1\Big]\\
&= \mathcal{E}\big(e^{-t}I(h)\big)_1\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nt}\frac{I_n(h^{\otimes n})}{n!}
\end{aligned}$$

Donc en identifiant les termes homogènes entre eux : $P_tI_n(h^{\otimes n}) = e^{-nt}I_n(h^{\otimes n})$, puis par densité il vient $P_tf_n = e^{-nt}f_n$ pour tout f_n dans le chaos de Wiener d'ordre n (et donc les chaos de Wiener sont exactement les espaces propres de P_t). On en déduit alors les résultats suivants :

Proposition 3.1.1 *(P_t) est un semi-groupe markovien contractant sur L^p.*

Il n'y a plus qu'à vérifier la propriété de semi-groupe. On peut décomposer $f \in L^2$ en chaos de Wiener ; or la propriété de semi-groupe est immédiate sur les chaos de Wiener d'après les calculs précédents. Si $p > 2$ on a la même conclusion car $L^p \subset L^2$. Enfin pour $p < 2$ on conclut par densité.

Définition 3.1.2 *On note $-\mathcal{L}$ le générateur infinitésimal du semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck, que l'on nomme opérateur d'Ornstein-Uhlenbeck.*

Lorsque ces deux quantités sont bien définies, on a : $\mathcal{L}f = \delta\nabla f$.

Proposition 3.1.2 *Tous les P_t sont autoadjoints sur L^2 : $\forall f, g \in L^2$: $E[P_tfg] = E[fP_tg]$.*

Il suffit de se souvenir que la décomposition en chaos de Wiener est une somme directe orthogonale.

Corollaire 3.1.1 $\forall t \geq 0$, $\forall f \in L^1$: $E[P_tf] = E[f]$.

Corollaire 3.1.2 *Le chaos de Wiener d'ordre n est l'espace propre de $\mathcal{L}$ qui est associé à la valeur propre n, et ce sont les seuls espaces propres.*

On a également une relation de commutation entre ∇ et P_t :

Proposition 3.1.3 *Si $\phi \in \mathbb{D}_{p,1}$ alors $P_t\phi \in \mathbb{D}_{p,1}$ et : $\nabla P_t\phi = e^{-t}P_t\nabla\phi$.*

Comme ci-dessus, on prouve cette propriété pour les chaos de Wiener puis on passe au cas général. On a également des relations du type : $P_t\delta\phi = e^{-t}\delta P_t\phi$ et $\nabla\mathcal{L}\phi = (Id + \mathcal{L})\nabla\phi$.

3.2 Applications

Mentionnons sans preuve le :

Théorème 3.2.1 (Inégalités de Meyer) *L'expression :* $\|F\| = \|(I+\mathcal{L})^{k/2}F\|_{L^p(\mu)}$ *définit sur* $\mathbb{D}_{p,k}$ *une norme équivalente à la norme* $\|\cdot\|_{p,k}$.

Ceci permet de définir $\mathbb{D}_{p,k}$ pour $k \notin \mathbb{N}$, ou de construire les espaces $\mathbb{D}_{p,k}$ intrinsèquement (avant ∇) en les voyant comme complétés de la classe des fonctionnelles cylindriques pour la norme ci-dessus.

Une application plus simple est de retrouver le :

Théorème 3.2.2 (Inégalité logarithmique de Sobolev) *Soit* f *élément de l'un des* $\mathbb{D}_{p,1}(\mathbb{R})$ *; on a :*

$$E[f^2 \log f^2] - E[f^2] \log E[f^2] \leq 2E[|\nabla f|_H^2]$$

Soit g une variable aléatoire strictement positive telle que $g \log g \in L^1$. On a :

$$\begin{aligned} E[g\log g] - E[g]\log E[g] &= E[P_0 g \log P_0 g] - E[P_\infty g \log P_\infty g] \\ &= -\int_0^\infty \frac{d}{dt} E[P_t g \log P_t g] dt \\ &= \int_0^\infty E[\mathcal{L}P_t g \cdot \log P_t g - \mathcal{L}P_t g] dt \\ &= \int_0^\infty E[\mathcal{L}P_t g \cdot \log P_t g] dt \end{aligned}$$

car $E[\mathcal{L}P_t g] = -\frac{d}{dt}E[P_t g] = -\frac{d}{dt}E[g] = 0$. Puis, en utilisant le fait que $\mathcal{L} = \delta \circ \nabla$ il vient :

$$\begin{aligned} E[g\log g] - E[g]\log E[g] &= \int_0^\infty E[(\nabla P_t g, \nabla(\log P_t g))] dt \\ &= \int_0^\infty E\left[\frac{|\nabla P_t g|_H^2}{P_t g}\right] dt \\ &= \int_0^\infty e^{-2t} E\left[\frac{|P_t \nabla g|_H^2}{P_t g}\right] dt \end{aligned}$$

Enfin en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans l'intégrale définissant P_t et en écrivant $\nabla g = \sqrt{g} \cdot \dfrac{\nabla g}{\sqrt{g}}$ on observe que :

$$|P_t g(\nabla f)|_H^2 \leq P_t g \cdot P_t \left(\frac{|\nabla g|_H^2}{g}\right)$$

puis il vient :

$$\begin{aligned} E[g\log g] - E[g]\log E[g] &\leq \int_0^\infty e^{-2t} E\left[P_t\left(\frac{|\nabla g|_H^2}{g}\right)\right] dt \\ &= \int_0^\infty e^{-4t} E[|\nabla \sqrt{g}|_H^2] dt \\ &= 2E[|\nabla \sqrt{g}|_H^2] \end{aligned}$$

et on conclut en prenant $g = f^2$.

Terminons ce paragraphe par une propriété régularisante du semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck :

Proposition 3.2.1 *Soit $f \in L^p(\mu)$. Alors, $\forall t > 0$: $P_t f \in \mathbb{D}_{p,1}$ et $\forall h \in H$:*

$$\nabla_h P_t f(w) = \frac{e^{-t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}} \int_W f\left(e^{-t}w + \sqrt{1-e^{-2t}}w'\right) \delta h(w') d\mu(w')$$

C'est encore une conséquence du théorème de Cameron-Martin :

$$\begin{aligned} P_t f(w+h) &= \int_W f\Big(e^{-t}(w+h) + \sqrt{1-e^{-2t}}w'\Big) d\mu(w') \\ &= \int_W f\Big(e^{-t}w + \sqrt{1-e^{-2t}}\big(w' + \frac{e^{-t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}}\big)\Big) d\mu(w') \\ &= \int_W f\Big(e^{-t}w + \sqrt{1-e^{-2t}}w'\Big) \cdot \mathcal{E}\Big(\frac{e^{-t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}}\delta h\Big)_1 (w') d\mu(w') \end{aligned}$$

On conclut alors avec l'inégalité de Hölder.

À titre d'application, établissons le résultat suivant :

Théorème 3.2.3 (Loi du 0-1) *Si A est une partie mesurable de W telle que $A + H \subset A$ (on dit que A est H-invariant) alors $\mu(A) \in \{0, 1\}$.*

En effet, pour $t > 0$ on a $P_t \infty_A \in \mathbb{D}_{p,1}$, et du fait que $\mathbb{1}_A(w+h) = \mathbb{1}_A(w)$ on déduit facilement que : $P_t \mathbb{1}_A(w+h) = P_t \mathbb{1}_A(w)$, d'où $\nabla P_t \mathbb{1}_A = 0$, donc $P_t \mathbb{1}_A$ est p.s. constant. Or cette famille de fonctionnelles converge dans L^p vers $\mathbb{1}_A$, donc $\mathbb{1}_A$ est p.s. constant ce qui conclut.

En reprenant la forme de $P_t f(w+h)$ donnée dans la preuve du théorème précédent, on voit que l'ensemble sur lequel $P_t f$ est strictement positif est H-invariant et on en déduit le résultat suivant :

Proposition 3.2.2 ("Positivity Improving") *Si $f \in L^1(\mu)$ vérifie $\mu\{f > 0\} > 0$, alors : $\forall t > 0$: $P_t f > 0$ p.s.*

4 Étude de la mesure de Wiener

On peut utiliser l'analyse stochastique pour obtenir des informations fines sur la mesure de Wiener. On commence par un résultat sur la queue de la mesure de Wiener, et on en déduit une condition suffisnte pour qu'une fonctionnelle ait des moments exponentiels ; on retrouve grâce à ce résultat un théorème bien connu de grandes déviations.

4.1 Moments exponentiels

Théorème 4.1.1 *Soit $u \in \mathbb{D}_{p,1}(\mathbb{R})$ pour un certain $p > 1$, et supposons que $\nabla u \in L^\infty(W, H, \mu)$. Alors $\forall c \geq 0$:*

$$\mu\{|u| > c\} \leq 2 \exp\left(- \frac{(c - E[u])^2}{2\|\nabla u\|^2_{L^\infty(W,H,\mu)}} \right)$$

On prouve d'abord le résultat pour les fonctionnelles cylindriques puis on généralise ; on commence donc par un résulat analogue à l'énoncé pour des martingales réelles continues :

Lemme 4.1.1 (Inégalité de Doob exponentielle) *Soit M une martingale réelle continue issue de 0 telle que p.s. $\forall t \geq 0 \ : \ \langle M, M\rangle_t \leq Kt$. Alors :*

$$P(\sup_{t\leq\tau} M_t > c) \leq \exp\Big(- \frac{c^2}{2K\tau}\Big)$$

et :

$$P(\sup_{t\leq\tau} |M_t| > c) \leq \exp\Big(- \frac{c^2}{2K\tau}\Big)$$

Remarque 4.1.1 *L'inégalité de Doob exponentielle est optimale au sens ou le mouvment brownien est un exemple de cas d'égalité.*

La seconde inégalité découle immédiatement de la première en observant que :

$$\begin{aligned} P(\sup_{t\leq\tau} |M_t| > c) &= P(\sup_{t\leq\tau} M_t > c) + P(\inf_{t\leq\tau} M_t > -c) \\ &= P(\sup_{t\leq\tau} M_t > c) + P(\sup_{t\leq\tau}(-M_t) > c) \end{aligned}$$

et que $-M$ est encore une martingale réelle issue de 0 et que $\langle -M, -M\rangle_t \leq Kt$ p.s. $\forall t$. Pour prouver la seconde, on écrit :

$$\begin{aligned} P(\sup_{t\leq\tau} M_t > c) &= P\Big(\sup_{t\leq\tau} \exp(\lambda M_t) > \exp(\lambda c)\Big) \\ &\leq P\Big(\sup_{t\leq\tau} \Big(\exp(\lambda M_t)\cdot \exp(\frac{\lambda^2}{2})\Big) > \exp(\lambda c)\Big) \\ &= P\Big(\sup_{t\leq\tau} \mathcal{E}(\lambda M)_t > \exp\Big(\lambda c - \frac{\lambda^2}{2K\tau}\Big)\Big) \\ &\leq \exp\Big(\lambda c - \frac{\lambda^2}{2K\tau}\Big) \end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Doob pour la (sur)martingale positive $\mathcal{E}(\lambda M)$. Puis, on optimise en prenant $\lambda = \frac{c}{K\tau}$, ce qui donne le résultat voulu et achève la preuve du lemme.

On passe maintenant a la preuve du résultat. On se ramène au cas où $E[u] = 0$, puis, $u \in \mathbb{D}_{p,1}$ étant donnée, on pose : $u_n = E[P_{1/n}u|\mathcal{F}_n]$;on peut alors montrer qu'on a la forme : $u_n = f_n(\delta e_1, \cdots \delta e_n)$ avec $f_n \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et que $u_n \to u$ au sens de $\mathbb{D}_{p,1}$. De plus d'après un corollaire du théorème d'Itô-Nisio, il vient, en notant B un mouvement brownien en dimension n, $\mathcal{B}$ la filtration associée et Q le semi-groupe de la chaleur :

$$\begin{aligned} \mu\{|u| > c\} &= P\{|f_n(B_1)| > c\} \\ &\leq P\{\sup_{0\leq t\leq 1} |E[f_n(B_1)|\mathcal{B}_t]| > c\} \\ &= P\{\sup_{0\leq t\leq 1} |Q_{1-t} f_n(B_t)| > c\} \end{aligned}$$

On écrit alors : $Q_{1-t}f_n(B_t) = \phi(t, B_t)$ où

$$\phi(t,b) = \frac{1}{(2\pi(1-t))^{n/2}} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \exp\left(- \frac{\|b-y\|^2}{2(1-t)}\right) dy$$

ϕ est de classe C^∞ et est solution de l'équation de la chaleur, donc la formule d'Itô se simplifie en :

$$Q_{1-t}f_n(B_t) = Q_1 f(0) + \int_0^t \nabla\big(Q_{1-s}f_n\big)(B_s) \cdot dB_s$$

et $Q_1 f(0) = E[u_n] = E[P_{1/n}u] = E[u] = 0$ donc si on note $M_t^{(n)} = Q_{1-t}f_n(B_t)$ alors $M^{(n)}$ est une martingale locale continue issue de 0. De plus une intégration par parties permet de vérifier que : $\forall t\ \nabla(Q_t f) = Q_t(\nabla f)$ donc puisque le semi-groupe de la chaleur est contractant on obtient l'estimation :

$$\begin{aligned} \left\langle M^{(n)}, M^{(n)} \right\rangle_t &= \int_0^t |Q_{1-s}(\nabla f_n)(B_s)|^2 ds \\ &\leq \int_0^t \|\nabla f_n\|_\infty^2 ds \\ &= t\|\nabla f_n\|_\infty^2 \\ &\leq t\|\nabla u\|^2_{L^\infty(W,H,\mu)} \end{aligned}$$

ce qui assure que $M^{(n)}$ est une martingale à laquelle on peut appliquer l'inégalité exponentielle de Doob pour obtenir :

$$\mu\{|u_n| > c\} \leq 2\exp\left(- \frac{c^2}{2\|\nabla u\|^2_{L^\infty(W,H,\mu)}}\right)$$

et on conclut car la convergence au sens $\mathbb{D}_{p,1}$ implique la convergence en probabilité.

Théorème 4.1.2 (Moments exponentiels) *Sous les hypothèses du théorème précédent, pour* $\lambda < \big(2\|\nabla u\|_{L^\infty(W,H,\mu)}\big)^{-1}$ *on a :*

$$E\big[\exp(\lambda|u|^2)\big] < \infty$$

En particulier u *a des moments de tous ordres.*

On peut encore se ramener au cas où $E[u] = 0$ et alors on a :

$$\begin{aligned} E\big[\exp(\lambda|u|^2)\big] &= \int_1^\infty \mu\left\{e^{\lambda|u|^2} > t\right\} dt \\ &= \int_1^\infty \mu\left\{|u| > \sqrt{\frac{\ln t}{\lambda}}\right\} dt \\ &\leq 2\int_1^\infty \exp\left(-\frac{\ln t}{2\lambda\|\nabla u\|}\right) dt \\ &= 2\int_1^\infty t^{-\frac{1}{2\lambda\|\nabla u\|}}\, dt < \infty \end{aligned}$$

4.2 Application

Rappelons que l'on a muni W de la norme : $\|w\|_\infty = \sup |w(t)|$.

Théorème 4.2.1 (Fernique) *Pour tout $\lambda < 1/2$ on a : $E[\exp(\lambda\|w\|_\infty^2)] < \infty$.*

Il suffit de remarquer que p.s. $w \in W$, $\forall h \in H$, on a : $|\|w+h\|_\infty - \|w\|_\infty| \leq |h|_H$. On en déduit que $\|\cdot\|_\infty \in \mathbb{D}_{p,1}$, que $\nabla\|\cdot\|_\infty \in L^\infty(\mu)$ et que : $\|\nabla\|\cdot\|_\infty\|_{L^\infty(\mu)} \leq 1$, puis les résultats précédents s'appliquent.

5 Ouverture

Ce document est trop court pour que puisse y être abordée l'étude de mesures obtenues par transformation de la mesure de Wiener, qui était le sujet de mon mémoire de M2. Le calcul de Malliavin permet d'obtenir des critères intéressants d'absolue continuité et de calculer les densités de telles mesures. Mentionnons à titre d'exemple l'un des premiers résultats qu'il est possible d'obtenir, et que l'on peut considérer comme une généralisation du théorème de Girsanov :

Théorème 5.0.2 (Ramer) *Soit $u \in \mathbb{D}_{p,1}(H)$ pour un $p > 1$, telle que : p.s.*

$$\|\nabla u\| \leq c < 1 \quad et \quad \|\nabla u\|_2 \leq d < \infty.$$

On note $U = Id + u$. Alors :

- *$U : W \to W$ est inversible ; Notons V son inverse. V a la forme $Id + v$, avec $v \in \mathbb{D}_{p,1}(H)$, et on a : p.s. $\|\nabla v\| \leq \frac{c}{1-c}$; $\|\nabla v\|_2 \leq \frac{d}{1-c}$*
- *$\forall F$ mesurable et bornée : $E[F] = E[F \circ T \cdot |\Lambda_u|]$ (formule de changement de variables) où l'on a noté $\Lambda_u = det_2(Id + \nabla u) \cdot exp(-\delta u - \frac{1}{2}\|u\|_H^2)$. En particulier, on a : $E[|\Lambda_u|] = 1$.*
- *$\forall F$ mesurable et bornée : $E[F \circ U] = E[F \cdot \Lambda_v]$ et $E[F \circ V] = E[F \cdot \Lambda_u]$ c'est à dire que $U^*\mu \ll \mu$, $V^*\mu \ll \mu$, et on a les densités : $\frac{dU^*\mu}{d\mu} = |\Lambda_v|$ et $\frac{dV^*\mu}{d\mu} = |\Lambda_u|$.*

6 Bibliographie

- P. Malliavin : *Stochastic Analysis.* Springer Verlag, 1997.
- A.S. Üstünel : *Analysis on Wiener Space and Applications.* Notes d'un cours enseigné à l'ENST Paris.
- A.S. Üstünel and M. Zakaï : *Transformation of Measure on Wiener Space.* Springer Monographs in Math. Springer 1999.