

Arrangements d'hyperplans

Jérémy CHAMBOREDON et Mathieu VIENNEY
sujet proposé par David BESSIS

17 juin 2005

En combien de parts peut-on couper une tarte en n coups de couteau ? On se propose de montrer que le nombre maximum de parts est $1 + n + \binom{n}{2}$ et que le meilleur moyen d'y arriver est de couper de manière aléatoire. On démontre en fait ces résultats dans un cadre plus général en considérant des arrangements d'hyperplans d'espaces de dimension quelconque. Pour arriver à des résultats de nature topologique (comptage du nombre de "parts"), on introduira des outils de nature combinatoire (fonction de Möbius, polynôme caractéristique et polynôme de Poincaré). Notamment, on verra comment des techniques de changement de corps de base permettent de ramener le calcul du nombre de "parts" à des problèmes de dénombrement sur les corps finis.

Table des matières

1 Définitions et premières propriétés	2
1.1 Arrangements d'hyperplans d'un espace affine	2
1.2 Le semi-treillis $L(\mathcal{A})$	2
1.3 Sous-arrangements, arrangements restreint et délété	3
2 Le polynôme de Poincaré	4
2.1 La fonction de Möbius	4
2.1.1 Définitions et premières propriétés	4
2.1.2 Formules d'inversion de Möbius	5
2.1.3 La fonction $\mu(X)$	6
2.2 Le polynôme de Poincaré et le polynôme caractéristique	7
2.2.1 Définition	7
2.2.2 Le théorème de délétion-restriktion	7
3 Comptage des chambres des arrangements réels	8
3.1 Nombre total de chambres	8
3.2 Comptage des chambres bornées	9
3.3 Un joli exemple	12
4 Les arrangements génériques	14
4.1 Expression du semi-treillis et calcul du nombre de chambres	14
4.2 Maximisation du nombre de chambres	15
4.3 Densité des arrangement génériques	17
5 Arrangements d'hyperplans sur des corps finis	18
5.1 Le résultat fondamental	18
5.2 Un exemple : calcul du polynôme caractéristique de l'arrangement de Shi	19

6	Quelques mots de la cohomologie des arrangements	20
6.1	Quelques rappels de cohomologie	20
6.2	Le cas des corps finis	20
6.3	Les arrangements réels	20
6.4	Les arrangements complexes	20

1 Définitions et premières propriétés

1.1 Arrangements d'hyperplans d'un espace affine

Définition 1.1 Soit \mathbb{K} un corps et V un \mathbb{K} -espace affine de dimension l . Un **arrangement d'hyperplans** de V est un ensemble fini \mathcal{A} d'hyperplans affines de V .

On adoptera la notation Φ_l pour l'arrangement qui ne contient aucun hyperplan appelé arrangement vide. Soit V^* le dual de V , et soit $S(V^*)$ son algèbre symétrique. Une base de V étant fixée, on peut identifier $S(V^*)$ à l'algèbre de polynômes $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Tout hyperplan affine \mathcal{H} de V est le noyau d'un polynôme de degré 1, défini à une constante multiplicative non nulle près. On note alors $\alpha_{\mathcal{H}}$ un tel polynôme, sans se préoccuper de la constante en question. On a alors $\mathcal{H} = \ker(\alpha_{\mathcal{H}})$.

Définition 1.2 Soit \mathcal{A} un arrangement d'hyperplans. Le produit $\mathcal{Q} = \prod_{\mathcal{H} \in \mathcal{A}} \alpha_{\mathcal{H}}$ est appelé **polynôme de définition** de \mathcal{A} .

Définition 1.3 On dit que \mathcal{A} est **central** si $\bigcap_{\mathcal{H} \in \mathcal{A}} \mathcal{H} \neq \emptyset$. Dans ce cas on pose $T(\mathcal{A}) = \bigcap_{\mathcal{H} \in \mathcal{A}} \mathcal{H}$.

Quitte à effectuer une translation, on pourra toujours supposer que le centre d'un arrangement central contient 0, l'origine de \mathbb{K}^l .

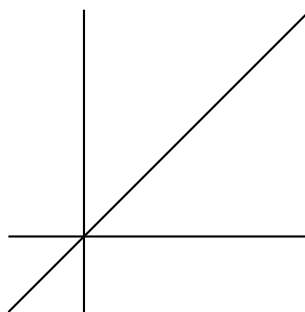


FIG. 1 – L'arrangement défini par $\mathcal{Q}(\mathcal{A}) = xy(x - y)$ est central.

1.2 Le semi-treillis $L(\mathcal{A})$

Définition 1.4 Soit \mathcal{A} un arrangement d'hyperplans et soit $L = L(\mathcal{A})$ l'ensemble des intersections non vides d'éléments de \mathcal{A} , appelées **plats**. On définit sur L un ordre partiel \leq par l'inclusion inverse :

$$X \leq Y \Leftrightarrow X \supseteq Y.$$

Définition 1.5 Le rang d'un élément X de L est défini par $r(X) = \text{codim}(X)$. Soient $X, Y \in L$, on définit alors $X \wedge Y = \bigcap \{Z \in L \mid X \cup Y \subseteq Z\}$. Si $X \cap Y \neq \emptyset$, alors on pose $X \vee Y = X \cap Y$.

$L(\mathcal{A})$ est alors un semi-treillis, c'est-à-dire que pour toute paire d'éléments $X, Y \in L$, il existe un plus grand élément parmi les éléments inférieurs à X et Y (cet élément est $X \wedge Y$). Dans le cas où l'arrangement est central, alors $L(\mathcal{A})$ est un treillis, c'est-à-dire qu'il possède en plus la propriété que pour toute paire d'éléments $X, Y \in L$, il existe un plus petit élément parmi les éléments supérieurs à X et à Y (c'est alors $X \vee Y = X \cap Y$).

Lemme 1.6 *Soit \mathcal{A} un arrangement d'hyperplans et $L = L(\mathcal{A})$. Alors pour tout $X \in L$ toutes les suites de longueurs maximales $V = X_0 < X_1 < \dots < X_p = X$ ont la même longueur.*

DÉMONSTRATION: Si $X = \bigcap_{\mathcal{H} \in \mathcal{B}} \mathcal{H}$, alors en retirant un hyperplan à \mathcal{B} , on obtient un élément dont la dimension est supérieure ou égale à $\dim(X) + 1$. Donc nécessairement dans une chaîne maximale il ne peut pas y avoir de saut de dimension, donc elles ont toutes même longueur. \square

Lemme 1.7 *Tous les éléments maximaux de $L(\mathcal{A})$ ont la même dimension.*

DÉMONSTRATION: Si \mathcal{A} est central, alors il n'y a qu'un seul élément maximal. On considère donc un arrangement non central, dont les éléments maximaux sont donc de rang au plus égal à $l - 1$. Supposons qu'il existe deux éléments X et Y maximaux, de rangs respectifs p et q avec $p < q$. On peut alors trouver deux ensembles A et B d'hyperplans de \mathcal{A} , de cardinaux respectifs p et q tels que $X = \bigcap_{\mathcal{H} \in A} \mathcal{H}$ et $Y = \bigcap_{\mathcal{H} \in B} \mathcal{H}$. On considère alors les sous-espaces vectoriels A^* et B^* du dual V^* engendrés par les formes linéaires correspondantes. On a $\dim(A^*) = p$ et $\dim(B^*) = q$. Donc il existe un hyperplan \mathcal{H} dans B tel que la forme linéaire associée ne soit pas dans A^* . Alors $X \cap \mathcal{H}$ est un plat de \mathcal{A} contenu dans X et différent de X , ce qui contredit la maximalité de X . \square

Définition 1.8 *On définit alors le rang de \mathcal{A} , $r(\mathcal{A})$ comme étant égal au rang d'un élément maximal de $L(\mathcal{A})$.*

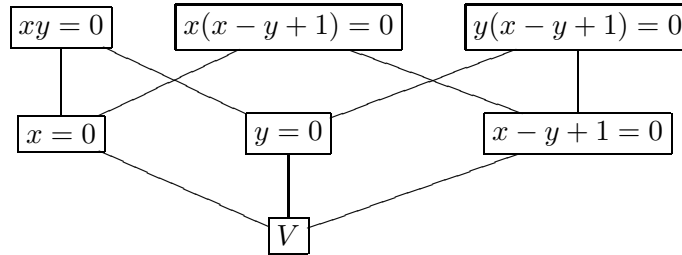


FIG. 2 – Le treillis de l'arrangement $xy(x - y + 1)$

1.3 Sous-arrangements, arrangements restreint et délété

Définition 1.9 *Soit \mathcal{A} un arrangement d'hyperplans. Si $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, \mathcal{B} est appelé un **sous-arrangement** de \mathcal{A} . Pour $X \in L(\mathcal{A})$ on définit un sous-arrangement \mathcal{A}_X de \mathcal{A} par :*

$$\mathcal{A}_X = \{\mathcal{H} \in \mathcal{A} \mid X \subseteq \mathcal{H}\}$$

et un arrangement \mathcal{A}^X de l'espace affine X par :

$$\mathcal{A}^X = \{X \cap \mathcal{H} \mid \mathcal{H} \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_X \text{ et } X \cap \mathcal{H} \neq \emptyset\}.$$

On appelle \mathcal{A}^X l'arrangement **restreint** de \mathcal{A} à X .

En particulier lorsque X est un hyperplan \mathcal{H} élément de \mathcal{A} , on a la définition suivante :

Définition 1.10 Soit \mathcal{A} un arrangement d'hyperplans et soit $\mathcal{H} \in \mathcal{A}$. L'arrangement *déjeté* de \mathcal{A} respectivement à \mathcal{H} est l'arrangement $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \setminus \{\mathcal{H}\}$ et l'arrangement *restreint* de \mathcal{A} respectivement à \mathcal{H} est l'arrangement $\mathcal{A}'' = \mathcal{A}^{\mathcal{H}}$. On appelle alors $(\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}'')$ un *triplet de déjetion-restriction*.

Définition 1.11 Soit V un \mathbb{R} -espace affine et soit \mathcal{A} un arrangement d'hyperplans de V . Les composantes connexes de $V \setminus \bigcup_{\mathcal{H} \in \mathcal{A}} \mathcal{H}$ sont appelées *chambres* de \mathcal{A} .

Dans la suite on s'attachera en particulier à calculer le nombres de chambres.

Remarque 1.12

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $V \setminus \bigcup_{\mathcal{H} \in \mathcal{A}} \mathcal{H}$ n'a qu'une composante connexe. En effet si l'espace vectoriel associé à V est de dimension l sur \mathbb{C} , on peut le considérer comme un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension $2l$. Les hyperplans de \mathcal{A} sont alors de dimension $2l - 2$ sur \mathbb{R} .

Remarque 1.13

Dans le cas d'un espace vectoriel réel, les hyperplans sont les noyaux d'éléments l_1, l_2, \dots, l_n de degré 1 de $S(V^*)$. Une chambre \mathcal{C} est alors caractérisée par un élément de $\{+, -\}^n$, où les signes correspondent aux signes de l_1, \dots, l_n sur \mathcal{C} .

2 Le polynôme de Poincaré

On associe dans cette partie un polynôme à chaque arrangement, construit par des méthodes combinatoires à partir du semi-treillis d'intersection.

2.1 La fonction de Möbius

2.1.1 Définitions et premières propriétés

Définition 2.1 Soit (E, \leq) un ensemble partiellement ordonné tel que $\forall X, Y \in E$, $[X, Y] = \{Z \in E \mid X \leq Z \leq Y\}$ soit fini. On définit la **fonction de Möbius** $\mu = \mu_E : E \times E \rightarrow \mathbb{Z}$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mu(X, X) &= 1 && \text{si } X \in E, \\ \sum_{X \leq Z \leq Y} \mu(X, Z) &= 0 && \text{si } X, Y, Z \in E \text{ et } X < Y, \\ \mu(X, Y) &= 0 && \text{sinon.} \end{aligned}$$

Le calcul des valeurs de la fonction de Möbius se fait donc de manière récursive, et la fonction est uniquement définie par ces relations, c'est-à-dire que si ν vérifie les mêmes relations, alors $\mu = \nu$.

Dans le cas où $(E, \leq) = (\mathbb{N}, |)$ on retrouve alors la fonction de Möbius de la théorie des nombres qui est alors $\mu(x) = \mu_{\mathbb{N}}(1, x)$.

Dans le cas où E est le semi-treillis d'un arrangement, on peut également décrire la fonction de Möbius de la manière suivante :

Lemme 2.2 Soit \mathcal{A} un arrangement. Pour $X, Y \in L(\mathcal{A})$, avec $X \leq Y$, posons $S(X, Y)$ l'ensemble des sous-arrangements centraux $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ tels que $\mathcal{A}_X \subseteq \mathcal{B}$ et $T(\mathcal{B}) = Y$. Alors

$$\mu(X, Y) = \sum_{\mathcal{B} \in S(X, Y)} (-1)^{|\mathcal{B} \setminus \mathcal{A}_X|}$$

DÉMONSTRATION: Soit $\nu(X, Y) = \sum_{\mathcal{B} \in \mathcal{S}(X, Y)} (-1)^{|\mathcal{B} \setminus \mathcal{A}_X|}$.
Remarquons que

$$\bigcup_{X \leq Z \leq Y} S(X, Z) = \{\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \mid \mathcal{A}_X \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}_Y\}$$

et de plus, cette union est disjointe. D'où

$$\sum_{X \leq Z \leq Y} \nu(X, Z) = \sum_{\mathcal{A}_X \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}_Y} (-1)^{|\mathcal{B} \setminus \mathcal{A}_X|} = \sum_{\mathcal{C}} (-1)^{|\mathcal{C}|}$$

où la dernière somme à lieu sur tous les sous-ensembles \mathcal{C} de $\mathcal{A}_Y \setminus \mathcal{A}_X$. Si $X = Y$, alors $\mathcal{A}_X \setminus \mathcal{A}_Y = \emptyset$ et la somme vaut 1, sinon la somme vaut 0. Donc on a bien $\mu = \nu$. \square

2.1.2 Formules d'inversion de Möbius

Commençons d'abord par un petit lemme :

Lemme 2.3 *Soit (E, \leq) un ensemble partiellement ordonné fini et $\mu = \mu_E$. Alors*

$$\begin{aligned} \mu(X, X) &= 1 && \text{si } X \in E, \\ \sum_{X \leq Z \leq Y} \mu(Z, Y) &= 0 && \text{si } X, Y \in E \text{ et } X < Y. \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION: Notons $E = \{X_1, X_2, \dots, X_r\}$ de telle sorte que $X_i \leq X_j \Rightarrow i \leq j$. Soit A la matrice $r \times r$ de coefficient (i, j) égal à $\mu(X_i, X_j)$. Soit B la matrice $r \times r$ telle que le coefficient (i, j) vaille 1 si $X_i \leq X_j$ et 0 sinon. A et B sont toutes deux triangulaires supérieures et d'après la définition de la fonction de Möbius, on a $AB = I_r$, d'où $BA = I_r$ ce qui prouve le résultat. \square

Proposition 2.4 (Formules d'inversion de Möbius) *Soient f, g deux fonctions définies sur E à valeur dans un groupe abélien. Alors*

$$\begin{aligned} g(Y) &= \sum_{X \leq Y} f(X) \Leftrightarrow f(Y) = \sum_{X \leq Y} \mu(X, Y)g(X), \\ g(X) &= \sum_{X \leq Y} f(Y) \Leftrightarrow f(X) = \sum_{X \leq Y} \mu(X, Y)g(Y). \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION: L'argument est le même pour les quatre implications, on fait la preuve pour la seconde équivalence. Pour le sens direct,

$$\begin{aligned} \sum_{X \leq Z} \mu(X, Z)g(Z) &= \sum_{X \leq Z} \mu(X, Z) \sum_{Z \leq Y} f(Y) \\ &= \sum_{X \leq Y} f(Y) \sum_{X \leq Z \leq Y} \mu(X, Z) \\ &= f(X). \end{aligned}$$

Pour l'implication réciproque, on utilise le lemme 2.3

$$\begin{aligned} \sum_{X \leq Z} f(Z) &= \sum_{X \leq Z} \sum_{Z \leq Y} \mu(Z, Y)g(Y) \\ &= \sum_{X \leq Y} g(Y) \sum_{X \leq Z \leq Y} \mu(Z, Y) \\ &= g(X). \end{aligned}$$

\square

2.1.3 La fonction $\mu(X)$

Comme on l'a fait pour les entiers, on définit pour les arrangements une fonction de Möbius à une seule variable.

Lemme 2.5 *Soit \mathcal{A} un arrangement et soit $L = L(\mathcal{A})$. Si $Y \in L$ et $Y \neq V$, alors pour tout $Z \in L$ on a*

$$\sum_{X \in L | X \vee Y = Z} \mu(V, X) = 0.$$

DÉMONSTRATION: Remarquons d'abord que $X \vee Y = Z$ implique que $X \leq Z$, $Y \leq Z$ et $r(Z) \geq r(Y)$. On raisonne alors par récurrence sur $r(Z)$. Si $Z = Y$, alors la somme en question est $\sum_{X \leq Y} \mu(V, X) = 0$ car $Y \neq V$. Si $Z > Y$, alors

$$\begin{aligned} \sum_{X \vee Y = Z} \mu(V, X) &= \sum_{X \vee Y \leq Z} \mu(V, X) - \sum_{X \vee Y < Z} \mu(V, X) \\ &= \sum_{X \leq Z} \mu(V, X) - \sum_{W < X} \left(\sum_{X \vee Y = W} \mu(V, X) \right) \end{aligned}$$

Le premier terme vaut 0 par définition, et le second est nul par récurrence. \square

Le théorème suivant donne une propriété importante des signes des fonctions de Möbius des semi-treillis d'arrangements.

Théorème 2.6 *Si $X \leq Y$, alors $\mu(X, Y) \neq 0$ et $\text{signe}(\mu(X, Y)) = (-1)^{r(Y) - r(X)}$*

DÉMONSTRATION: Puisque la fonction de Möbius du segment $[X, Y]$ est la restriction de $\mu_{\mathcal{A}}$, on a $\mu(X, Y) = \mu(T((\mathcal{A}_Y)^X))$. Il suffit donc de prouver l'assertion pour un arrangement central \mathcal{A} pour lequel il faut prouver que $\mu(T(\mathcal{A})) \neq 0$ et que $\text{signe}(\mu(\mathcal{A})) = (-1)^{r(\mathcal{A})}$. On raisonne alors par récurrence sur le rang de \mathcal{A} . Le résultat est évident si $r(\mathcal{A}) = 0$. Supposons que $r(\mathcal{A}) \geq 1$. Choisissons $H \in \mathcal{A}$ et appliquons le lemme 2.5 avec $Y = H$ et $Z = T(\mathcal{A})$. On obtient

$$\begin{aligned} 0 &= \mu(T(\mathcal{A})) + \sum_{X \in M} \mu(X) \\ &= \mu(T(\mathcal{A})) + \sum_{X \in M} \mu(T(\mathcal{A}_X)) \end{aligned}$$

où M est l'ensemble de tous les $X \in L$ tels que $X \neq T(\mathcal{A})$ et $X \vee H = T(\mathcal{A})$. Si $X \in M$ alors,

$$\begin{aligned} r(\mathcal{A}) &= r(X \vee H) \\ &\leq r(X \vee H) + r(X \wedge H) \\ &\leq r(X) + r(H) \\ &\leq r(X) + 1. \end{aligned}$$

Ainsi, $r(X) = r(\mathcal{A}) - 1$ et donc $r(\mathcal{A}_X) = r(\mathcal{A}) - 1$. Par récurrence, $\mu(\mathcal{A}_X) \neq 0$ et $\text{signe}(\mu(\mathcal{A}_X)) = (-1)^{r(\mathcal{A}_X)} = (-1)^{r(\mathcal{A}) - 1}$. Le résultat est immédiat puisque $\mu(\mathcal{A}) = -\sum_{X \in M} \mu(\mathcal{A}_X)$. \square

Définition 2.7 Pour $X \in L$, on pose $\mu(X) = \mu(V, X)$.

Alors d'après les propriétés de la fonction de Möbius déjà démontrées, on a $\sum_{Y \leq X} \mu(Y) = 0$, et $\mu(X)$ est du signe de $(-1)^{r(X)}$. La figure 3 donne un exemple des valeurs de la fonction de Möbius d'un arrangement.

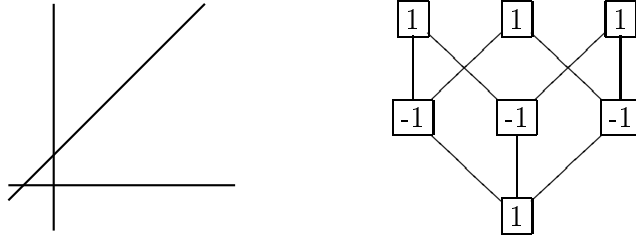


FIG. 3 – Le semi-treillis de l'arrangement $xy(x - y + 1)$

Remarquons que la fonction de Möbius vaut toujours -1 sur les éléments de rang 1, c'est-à-dire les hyperplans.

2.2 Le polynôme de Poincaré et le polynôme caractéristique

2.2.1 Définition

Définition 2.8 Soit \mathcal{A} un arrangement, on définit le **polynôme caractéristique** de \mathcal{A} par

$$\chi(\mathcal{A}, t) = \sum_{X \in L} \mu(X) t^{\dim(X)}.$$

Définition 2.9 Soit \mathcal{A} un arrangement et soit $L = L(\mathcal{A})$, on définit le **polynôme de Poincaré** de \mathcal{A} par

$$\pi(\mathcal{A}, t) = t^l \chi(\mathcal{A}, -t^{-1}) = \sum_{X \in L} \mu(X) (-t)^{r(X)}.$$

Remarquons que le polynôme caractéristique est unitaire de degré l , et que les deux polynômes sont à coefficients entiers. Dans la suite on utilisera indifféremment l'un ou l'autre de ces polynômes, en fonction de celui qui est le plus facile à utiliser.

Exemples 2.10

Le polynôme de Poincaré de l'arrangement vide est $\pi(\phi_l, t) = 1$. Le polynôme caractéristique de l'arrangement de la figure 3 est $\chi(\mathcal{A}, t) = t^2 - 3t + 3$.

2.2.2 Le théorème de délétion-restriction

Le polynôme de Poincaré a la propriété de bien se comporter par le procédé de délétion-restriction. Commençons par un lemme préliminaire :

Lemme 2.11 Soit \mathcal{A} un arrangement. Alors

$$\pi(\mathcal{A}, t) = \sum_{\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}} (-1)^{|\mathcal{B}|} (-t)^{r(\mathcal{B})}$$

où la somme porte sur tous les sous-arrangements centraux $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$.

DÉMONSTRATION: Soit $S(X) = S(V, X)$, alors d'après le lemme 2.2

$$\pi(\mathcal{A}, t) = \sum_{X \in L} \mu(X)(-t)^{r(X)} = \sum_{X \in L} \left(\sum_{\mathcal{B} \in S(X)} (-1)^{|\mathcal{B}|} (-t)^{r(X)} \right)$$

Si $\mathcal{B} \in S(X)$, alors $T(\mathcal{B}) = X$, donc $r(\mathcal{B}) = r(X)$. Le résultat en découle car tout sous-arrangement central de \mathcal{A} est dans un seul $S(X)$. \square

Théorème 2.12 *Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}'')$ un triplet de délétion-restriction. Alors*

$$\pi(\mathcal{A}, t) = \pi(\mathcal{A}', t) + t\pi(\mathcal{A}'', t).$$

DÉMONSTRATION: Soit $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0$ l'hyperplan distingué (c'est à dire tel que $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \setminus \{\mathcal{H}\}$). On utilise le lemme 2.11, et on sépare la somme sur \mathcal{B} en deux sommes R' et R'' , où la première porte sur les \mathcal{B} ne contenant pas \mathcal{H} et la seconde sur ceux contenant \mathcal{H} . Le même lemme appliqué à \mathcal{A}' donne $R' = \pi(\mathcal{A}', t)$. Pour R'' , comme $\mathcal{H} \in \mathcal{B}$, $\mathcal{A}_H \subseteq \mathcal{B}$. Donc si $T(\mathcal{B}) = Y$, alors $\mathcal{B} \in S(\mathcal{H}, Y)$. Posons alors $L'' = L(\mathcal{A}'')$. Alors

$$\begin{aligned} R'' &= \sum_{\mathcal{H} \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}} (-1)^{|\mathcal{B}|} (-t)^{r(\mathcal{B})} \\ &= \sum_{Y \in L''} \sum_{\mathcal{B} \in S(\mathcal{H}, Y)} (-1)^{|\mathcal{B}|} (-t)^{r(Y)} \\ &= - \sum_{Y \in L''} \sum_{\mathcal{B} \in S(\mathcal{H}, Y)} (-1)^{|\mathcal{B} \setminus \mathcal{A}_H|} (-t)^{r(Y)} \\ &= - \sum_{Y \in L''} \mu(\mathcal{H}, Y) (-t)^{r(Y)} \\ &= t\pi(\mathcal{A}'', t). \end{aligned}$$

La dernière égalité vient du fait que μ'' est la restriction de μ à L'' , donc $\mu''(Y) = \mu''(\mathcal{H}, Y)$ et que r'' satisfait $r(Y) = r''(Y) + 1$. \square

Ce résultat est vraiment fondamental lorsqu'il s'agit de prouver des formules sur les arrangements puisqu'il permet un raisonnement par récurrence. Cette récurrence se fait à la fois sur le nombre d'hyperplans et sur la dimension. En effet, \mathcal{A}' possède toujours un hyperplan de moins que \mathcal{A} et \mathcal{A}'' est un arrangement dont la dimension est strictement inférieure à celle de \mathcal{A} .

3 Comptage des chambres des arrangements réels

Dans cette section on considèrera le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et \mathcal{A} est un arrangement d'hyperplans d'un \mathbb{R} -espace affine V .

3.1 Nombre total de chambres

Le calcul du nombre de chambres d'un arrangement réel \mathcal{A} est immédiat par la méthode de délétion-restriction et s'obtient directement à partir du théorème suivant :

Théorème 3.1 (Zaslavsky, 1975) *Soit \mathcal{A} un arrangement réel d'hyperplans. Le nombre de chambres de \mathcal{A} , noté $c(\mathcal{A})$, est donné par la formule :*

$$c(\mathcal{A}) = \pi(\mathcal{A}, 1).$$

D'après la formule de délétion-restriction 2.12 vérifiée par le polynôme de Poincaré, pour obtenir le théorème par une récurrence basée sur la méthode de délétion-restriction, il suffit de montrer la proposition suivante :

Proposition 3.2 *Soit \mathcal{A} un arrangement réel d'hyperplans et soit $\mathcal{H} \in \mathcal{A}$ un hyperplan. Alors on a :*

$$c(\mathcal{A}) = c(\mathcal{A}') + c(\mathcal{A}'').$$

DÉMONSTRATION: On note $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ l'ensemble des chambres de \mathcal{A} . Soit P l'ensemble des chambres de $\mathcal{C}(\mathcal{A}')$ qui intersectent \mathcal{H} et soit $Q = \mathcal{C}(\mathcal{A}) \setminus P$. On a clairement $|\mathcal{C}(\mathcal{A}')| = |P| + |Q|$. Or \mathcal{H} divise les chambres de P en deux chambres de \mathcal{A} , sans modifier celles de Q , d'où $|\mathcal{C}(\mathcal{A})| = 2|P| + |Q|$. D'autre part, on a une bijection entre P et $\mathcal{C}(\mathcal{A}'')$ donnée par $C \mapsto C \cap \mathcal{H}$, d'où $|\mathcal{C}(\mathcal{A}'')| = |P|$. D'où le résultat cherché. \square

Remarque 3.3

Par définition du polynôme caractéristique et d'après le lemme sur le signe de μ , on a donc $c(\mathcal{A}) = \sum_{X \in L} \mu(X)(-1)^{r(X)} = \sum_{X \in L} |\mu(X)|$. Connaissant le semi-treillis il est alors très facile de compter les chambres. Remarquons également que le nombre de chambres est aussi égal à $(-1)^{\dim(V)} \chi(\mathcal{A}, -1)$.

3.2 Comptage des chambres bornées

Dans cette partie, on se propose de démontrer une formule donnant le nombre de chambres bornées d'un arrangement réel en fonction du polynôme de Poincaré.

La preuve originale du théorème suivant a été faite par Thomas Zaslavsky dans [5], et c'est à cette occasion qu'il a introduit le procédé de délétion-restriction. Toutefois sa preuve est très longue et peu éclairante. On se propose ici de le prouver avec une hypothèse de plus qui simplifie notablement la démonstration, sans restreindre beaucoup la généralité. Dans la littérature, cette hypothèse est souvent omise, conduisant à des énoncés faux, et même avec cette hypothèse nous n'avons rencontré aucune preuve "géométrique".

Définition 3.4 *Soit \mathcal{A} un arrangement réel. On note $c_b(\mathcal{A})$ le nombre de chambres bornées de $V \setminus \bigcup_{\mathcal{H} \in \mathcal{A}} \mathcal{H}$.*

On s'intéresse ici aux arrangements qui possèdent au moins une chambre bornée, qui vérifient la propriété suivante :

Lemme 3.5 *Si \mathcal{A} possède une chambre bornée, alors il existe dans $L(\mathcal{A})$ un plat qui est un point.*

DÉMONSTRATION: Supposons au contraire que \mathcal{A} n'a pas de plat qui soit un point. En particulier, un système formé de vecteurs normaux aux hyperplans de \mathcal{A} n'est pas générateur. Soit alors v un vecteur non nul orthogonal à l'espace vectoriel engendré par un tel système de vecteurs normaux. Pour toute chambre C et tout $x \in C$ on a alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $x + \lambda v \in C$, donc C n'est pas bornée. \square

On part alors de l'hypothèse que \mathcal{A} possède un plat qui est un point. Afin de procéder comme précédemment par la méthode de délétion-restriction, il est nécessaire de montrer que cette condition passe aux arrangements restreint et délété, ce que montre le lemme suivant :

Lemme 3.6 *Si \mathcal{A} n'est pas central et possède un plat qui est un point, alors il existe $\mathcal{H} \in \mathcal{A}$ tel que les arrangements \mathcal{A}' et \mathcal{A}'' relatifs à \mathcal{H} possèdent chacun un plat qui est un point.*

DÉMONSTRATION: Soit \mathcal{A} un arrangement non central possédant un plat qui est un point. Comme \mathcal{A} n'est pas central, nécessairement, il existe $\mathcal{H} \in \mathcal{A}$ ne passant pas par ce point. On effectue la délétion-restriction par rapport à un tel \mathcal{H} . Clairement, l'arrangement délété \mathcal{A}' possède un plat qui est un point. Montrons qu'il est en de même pour l'arrangement restreint \mathcal{A}'' . Comme \mathcal{A}' a un plat qui est un point, un système (α_i) de formes linéaires associées à des hyperplans de \mathcal{A}' forme une base du dual V^* . On peut alors extraire de (α_i) une base de \mathcal{H}^* , ce qui prouve que \mathcal{A}'' admet un plat qui est un point. \square

Montrons alors comment on obtient le nombre de chambres bornées de \mathcal{A} à partir du nombre de chambres bornées de \mathcal{A}' et de \mathcal{A}'' :

Proposition 3.7 *Soit \mathcal{A} un arrangement contenant un plat qui soit un point x , et tel qu'il existe un hyperplan $\mathcal{H} \in \mathcal{A}$ tel que \mathcal{H} ne passe pas par x . Alors si \mathcal{A}' est l'arrangement délété et \mathcal{A}'' l'arrangement restreint par rapport à \mathcal{H} on a*

$$c_b(\mathcal{A}) = c_b(\mathcal{A}') + c_b(\mathcal{A}'').$$

DÉMONSTRATION: On partitionne l'ensemble des chambres de \mathcal{A}' en P, Q, R, S définis de la manière suivante :

- P est l'ensemble des chambres bornées de \mathcal{A}' qui ne rencontrent pas \mathcal{H}
- Q est l'ensemble des chambres bornées de \mathcal{A}' qui rencontrent \mathcal{H}
- R est l'ensemble des chambres non bornées de \mathcal{A}' qui rencontrent \mathcal{H}
- S est l'ensemble des chambres non bornées de \mathcal{A}' qui ne rencontrent pas \mathcal{H}

Alors il est évident que chaque chambre de P est aussi une chambre bornée de \mathcal{A} , et que chaque chambre de Q est coupée par \mathcal{H} en deux chambres bornées de \mathcal{A} . On s'intéresse alors aux chambres de R dont la trace sur \mathcal{H} est une chambre bornée de \mathcal{A}'' . On veut montrer qu'une telle chambre est coupée par \mathcal{H} en deux chambres de \mathcal{A} , dont l'une est bornée (donc nécessairement l'autre ne l'est pas).

Comme $\{x\}$ est un plat, il existe l hyperplans $\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_l$ tels que $\bigcap_{i=1}^l \mathcal{H}_i = \{x\}$. Quitte à translater, on suppose que $x = 0$ et on choisit pour coordonnées des formes linéaires définissant les hyperplans $\{\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_l\}$ telles que la chambre de \mathcal{A}' soit incluse dans $x_i > 0, i = 1, \dots, l$ et qu'une équation de \mathcal{H} soit $\sum_i \lambda_i x_i = a$ avec $a < 0$. On s'intéresse alors à la chambre \mathcal{C} de \mathcal{A} du côté de 0, c'est à dire définie par les équations

$$\begin{cases} x_i > 0, i = 1, \dots, l \\ \sum_i \lambda_i x_i > a \\ l_j(x) = a_j, j = 1, \dots, p \end{cases}$$

Où les l_j sont les formes linéaires définissant les autres hyperplans de \mathcal{A} .

La chambre induite sur l'arrangement restreint est alors définie par les équations

$$\begin{cases} x_i > 0, i = 1, \dots, l \\ \sum_i \lambda_i x_i = a \\ l_j(x) = a_j, j = 1, \dots, p \end{cases}$$

De plus on sait par hypothèse que cette chambre est bornée. Ceci signifie donc que tous les λ_i sont strictement négatifs, car $a < 0$. Donc nécessairement, la chambre \mathcal{C} de \mathcal{A} est

bornée.

Nous venons donc de démontrer qu'une chambre non bornée de l'arrangement déleté coupée par \mathcal{H} induit une chambre bornée de \mathcal{A} si et seulement si sa trace sur \mathcal{H} est bornée (en fait on vient seulement de prouver le sens réciproque, mais le sens direct est évident). Nous avons donc maintenant tous les outils pour compter le nombre de chambres bornées de \mathcal{A} . L'ensemble R est partitionné en R' et R'' qui correspondent aux chambres dont la trace sur \mathcal{H} est respectivement bornée et non bornée. On a $c_b(\mathcal{A}) = |P| + 2|Q| + |R'|$. Or il est facile de voir que $|Q| + |R'| = c_b(\mathcal{A}'')$. On en déduit

$$\begin{aligned} c_b(\mathcal{A}) &= |P| + |Q| + c_b(\mathcal{A}'') \\ &= c_b(\mathcal{A}') + c_b(\mathcal{A}'') \end{aligned}$$

□

La preuve du résultat par récurrence nécessite enfin un dernier lemme :

Lemme 3.8 *Si \mathcal{A} est central, on a :*

$$c_b(\mathcal{A}) = (-1)^{r(\mathcal{A})} \pi(\mathcal{A}, -1) = 0.$$

DÉMONSTRATION: On a d'une part en considérant le treillis de \mathcal{A} qui comprend comme unique élément maximal $\{0\}$ que

$$\pi(\mathcal{A}, -1) = \sum_{X \leq \{0\}} \mu(X) = 0.$$

D'autre part, un arrangement central n'a pas de chambres bornées.

□

Théorème 3.9 *Soit \mathcal{A} un arrangement réel d'hyperplans admettant un plat qui est un point. Alors on a :*

$$c_b(\mathcal{A}) = (-1)^{r(\mathcal{A})} \pi(\mathcal{A}, -1).$$

DÉMONSTRATION: On démontre la formule par récurrence sur $n + l$ pour tout arrangement réel \mathcal{A} de dimension l et de cardinal n , possédant un plat qui est un point.

Si $l = 0$ et $\mathcal{A} = \phi_0$ est vide alors \mathcal{A} possède une unique chambre bornée (voir la définition) donc vérifie la formule.

Si $l \geq 1$ et $n = l$, nécessairement \mathcal{A} est central, car il possède un plat qui est un point. Il vérifie donc la formule d'après le lemme 3.8. Soit \mathcal{A} un arrangement réel d'hyperplans de dimension l et de cardinal n possédant un plat qui est point.

Si \mathcal{A} est central, la formule est donnée par le lemme 3.8. Sinon, on peut appliquer le lemme 3.6, qui donne un hyperplan \mathcal{H} par rapport auquel les arrangements déleté \mathcal{A}' et restreint \mathcal{A}'' possèdent respectivement un plat qui est un point. Par hypothèse de récurrence, on a :

$$\begin{aligned} c_b(\mathcal{A}') &= (-1)^{r(\mathcal{A}')} \pi(\mathcal{A}', -1) \\ c_b(\mathcal{A}'') &= (-1)^{r(\mathcal{A}'')} \pi(\mathcal{A}'', -1) \end{aligned}$$

Mais d'après la proposition 3.7, par délétion-restreint on a aussi :

$$c_b(\mathcal{A}) = c_b(\mathcal{A}') + c_b(\mathcal{A}'')$$

et on sait que les rangs respectifs vérifient :

$$r(\mathcal{A}) = l, r(\mathcal{A}') = l \text{ et } r(\mathcal{A}'') = l - 1.$$

D'où :

$$\begin{aligned} c_b(\mathcal{A}) &= (-1)^l (\pi(\mathcal{A}', -1) - \pi(\mathcal{A}'', -1)) \\ &= (-1)^l \pi(\mathcal{A}, -1) \end{aligned}$$

d'après la formule de délétion-restriction pour le polynôme de Poincaré.

L'arrangement \mathcal{A} vérifie donc la formule et, par récurrence, on a finalement la formule pour tout arrangement d'hyperplans réel. \square

Remarque 3.10

Le lemme 3.5 nous dit que s'il y a des chambres bornées, alors il y a un point qui est un plat, et donc d'après le théorème précédent, on sait alors compter le nombre de chambres bornées. Toutefois, dans le cas général, la non nullité de $\pi(\mathcal{A}, -1)$ ne signifie pas forcément qu'il y a des chambres bornées, comme en témoigne l'exemple de la figure 4. L'arrangement en question ne possède pas de chambres bornées, et pourtant $\pi(\mathcal{A}, -1) = 1$.

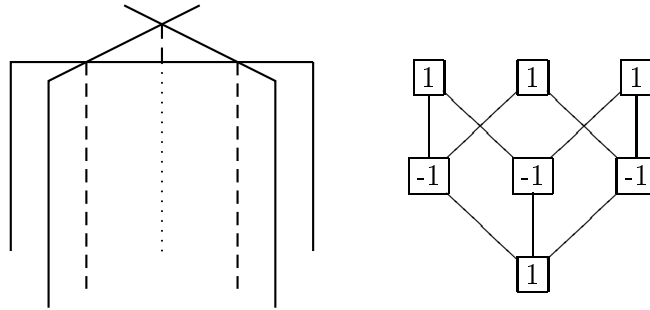


FIG. 4 – Un arrangement de l'espace sans chambres bornées

Remarque 3.11

Lorsque la formule s'applique, le nombre de chambres bornées s'écrit aussi $c_b(\mathcal{A}) = |\sum_{X \in L} \mu(x)|$, donc là aussi, ce nombre est facile à calculer si on connaît le semi-treillis.

Remarque 3.12

Si on considère l'espace vectoriel W engendré par les normales aux hyperplans, alors on appelle chambre relativement bornée une chambre dont l'intersection avec W est bornée. La formule prouvée par Zaslavsky dit que le nombre de chambres relativement bornées est donné par $|\sum_{X \in L} \mu(X)|$. Dans le cas où il y a un plat qui est un point, alors $W = V$ et les chambres bornées sont exactement les chambres relativement bornées. Par exemple, dans le cas de l'arrangement de la figure 4, il y a une seule chambre relativement bornée.

3.3 Un joli exemple

Donnons un exemple d'utilisation des formules de comptage avec un arrangement à 3 dimensions. Considérons l'arrangement de la figure 5.

Cet arrangement possède alors 21 chambres et une chambre bornée. En regardant le treillis, on vérifie que $\pi(\mathcal{A}, 1) = \sum_{X \in L} |\mu(X)| = 21$ et que $|\pi(\mathcal{A}, -1)| = |\sum_{X \in L} \mu(X)| = 1$, donc les formules de comptage des chambres sont bien vérifiées.

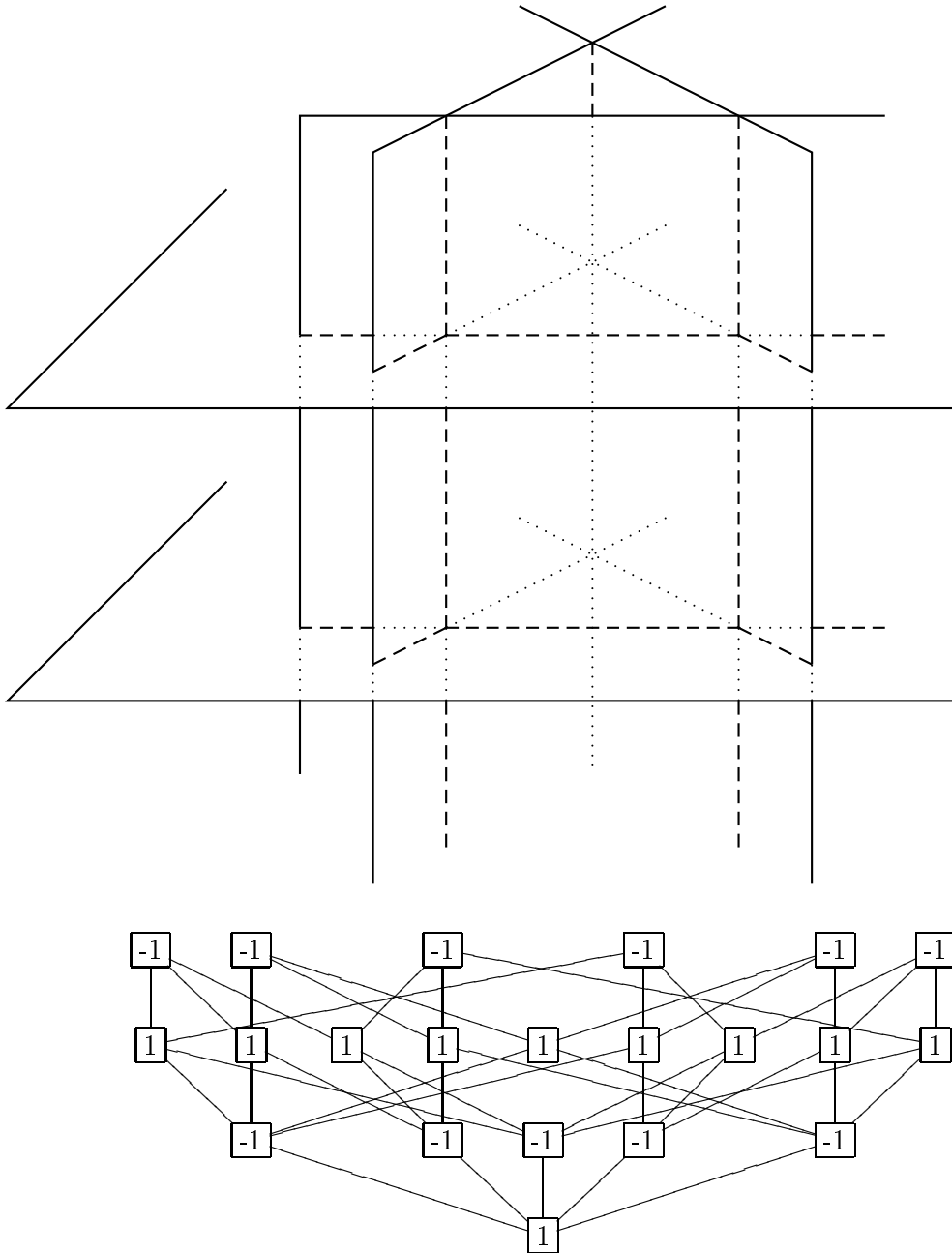


FIG. 5 – L'arrangement défini sur \mathbb{R}^3 par $Q(\mathcal{A}) = yz(y - x - 1)(y + x - 1)(z - 3)$ et son semi-treillis d'intersection

4 Les arrangements génériques

Parmi tous les arrangements réels, il existe une famille d'arrangements qui possèdent certaines propriétés dont celle de maximiser le nombre de chambres une fois que l'on s'est fixé une dimension et un nombre d'hyperplans.

Définition 4.1 On dit d'un arrangement $\mathcal{A} = \{H_1, \dots, H_n\}$ à n hyperplans d'un espace à l dimensions qu'il est générique s'il vérifie $\forall \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$:

- si $\#\mathcal{B} < l$, alors $\text{codim}(\bigcap_{\mathcal{H} \in \mathcal{B}} \mathcal{H}) = \#\mathcal{B}$,
- si $\#\mathcal{B} \geq l$, alors $\bigcap_{\mathcal{H} \in \mathcal{B}} \mathcal{H} = \emptyset$.

Exemple 4.2

En dimension 2, cela revient à demander que deux droites quelconques ne soient pas parallèles et que pour tout choix de trois droites elles ne soient pas concourantes.

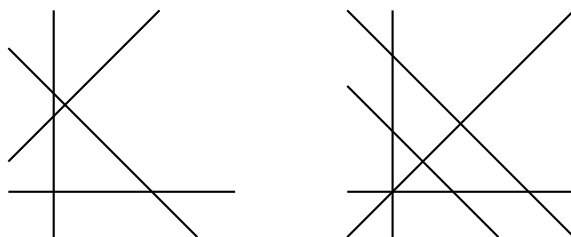


FIG. 6 – Un arrangement générique du plan et un non générique

4.1 Expression du semi-treillis et calcul du nombre de chambres

Pour un arrangement générique, il est assez facile de voir à quoi ressemble le semi-treillis d'intersection, et d'en calculer la fonction de Möbius.

Au rang $k < l$ le semi-treillis possède $\binom{n}{k}$ éléments, où n est le nombre d'hyperplans. En effet, les intersections de k hyperplans sont toutes de codimension k et sont deux à deux distinctes, elles sont donc toutes dans $L(\mathcal{A})$. De plus, chacun de ces éléments X est inclus dans exactement $\binom{n}{i}$ plats de rang i (donc il leur est supérieur dans $L(\mathcal{A})$), et ceux-ci correspondent aux intersections de i des k hyperplans contenant X . Connaissant la structure de L , on peut calculer la fonction de Möbius :

Proposition 4.3 Soit \mathcal{A} un arrangement générique, alors la fonction de Möbius est donnée par :

$$\mu(X) = (-1)^{r(X)}.$$

DÉMONSTRATION: On raisonne par récurrence sur le rang. La propriété est évidente pour $r(X) = 0$ et même pour $r(X) = 1$.

Supposons que pour tous les éléments de rang inférieur strictement à k , on ait $\mu(X) = (-1)^{r(X)}$, et soit X un élément de rang k . Alors par définition de la fonction de Möbius

on a

$$\begin{aligned}
\mu(X) &= -1 - \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i \binom{k}{i} \\
&= - \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{k}{i} \\
&= (-1)^k \binom{k}{k}.
\end{aligned}$$

Donc $\forall X \in L(\mathcal{A}), \mu(X) = (-1)^{r(X)}$. □

Ainsi, on peut exprimer le polynôme de Poincaré d'un arrangement

$$\begin{aligned}
\pi(\mathcal{A}, t) &= \sum_{X \in L} \mu(X) (-t)^{r(X)} \\
&= \sum_{k=0}^{\min(n,l)} \binom{n}{k} (-1)^k (-t)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\min(n,l)} \binom{n}{k} t^k.
\end{aligned}$$

On en déduit également le nombre de chambres qui est donc égal à $\sum_{k=0}^{\min(n,l)} \binom{n}{k}$. De plus, on remarque qu'un arrangement générique possède des chambres bornées dès que $n > l$, car la somme $\sum_{k=0}^l (-1)^k \binom{n}{k}$ n'est alors pas nulle, et qu'il y a un plat qui est un point (considérer l'intersection de l hyperplans).

4.2 Maximisation du nombre de chambres

On montre dans cette partie que les arrangements génériques sont ceux qui maximisent le nombre de chambres, et qu'en "perturbant un peu" un arrangement quelconque, on obtient un arrangement générique.

On se fixe deux entiers l et n correspondant respectivement à la dimension de l'espace et au nombre d'hyperplans. Comme un hyperplan peut être défini par une équation à $l+1$ coefficients de la forme $a_1x_1 + \dots + a_lx_l = b$, on définit une application de $\mathbb{R}^{(l+1)n}$ (ou encore de l'ensemble des matrices $(l+1) \times n$) dans l'ensemble des arrangements de dimension l et à n hyperplans. Cette application n'est évidemment pas injective (en permutant les lignes ou en les multipliant par un coefficient non nul, on obtient toujours le même arrangement), mais elle est surjective. Si $A \in \mathbb{R}^{(l+1)n}$, on note \mathcal{A} l'arrangement correspondant.

Lemme 4.4 *Soient x et y deux points de \mathbb{R}^l qui ne soient pas dans la même chambre (du complémentaire) de l'arrangement correspondant à A . Alors il existe un voisinage U de A dans $\mathbb{R}^{(l+1)n}$ tel que pour tout arrangement B de U , x et y ne soient pas dans la même chambre de \mathcal{B} .*

DÉMONSTRATION: Si x et y ne sont pas dans la même chambre de \mathcal{A} , alors il existe un hyperplan \mathcal{H} de \mathcal{A} séparant x et y . On peut supposer que cet hyperplan est défini par la première ligne de A , par l'équation : $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$. Quitte à permuter x et y , on peut aussi supposer que $\sum_i a_ix_i > b$ et $\sum_i a_iy_i < b$. Il existe alors dans $\mathbb{R}^{(l+1)}$ un voisinage ouvert V de (a_1, \dots, a_n, b) tel que ces équations restent vérifiées,

c'est-à-dire tels que x et y soient toujours séparés par un hyperplan. On prend alors $U = V \times \mathbb{R}^{(l+1)(n-1)}$, qui est bien un ouvert de $\mathbb{R}^{(l+1)n}$ qui convient. \square

Proposition 4.5 *Soit $A \in \mathbb{R}^{(l+1)n}$. Alors il existe un voisinage U de A tel que pour tout B dans U , \mathcal{B} possède au moins autant de chambres que \mathcal{A} . Autrement dit, le nombre de chambres ne peut qu'augmenter localement.*

DÉMONSTRATION: Dans chaque chambre de \mathcal{A} , on choisit un point, et on note l'ensemble de ces points $\{x_1, \dots, x_r\}$. Pour toute paire de points $\{x_i, x_j\}$ on applique le lemme précédent pour obtenir un voisinage $U_{i,j}$ de A dont tous les arrangements séparent x_i et x_j . On considère alors $V = \bigcap U_{i,j}$ qui est un voisinage de A , et dont tous les arrangements séparent deux à deux tous les x_i , c'est à dire dont tout arrangement possède au moins r chambres. \square

Proposition 4.6 *Soit \mathcal{A} un arrangement non générique, alors il existe un arrangement \mathcal{B} possédant strictement plus de chambres que \mathcal{A} .*

DÉMONSTRATION: Soit un arrangement \mathcal{A} non générique. Deux cas se présentent : soit il existe $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ tel que $\text{codim}(\bigcap_{\mathcal{H} \in \mathcal{B}} \mathcal{H}) < \#\mathcal{B}$, soit il existe $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ tel que $\text{codim}(\bigcap_{\mathcal{H} \in \mathcal{B}} \mathcal{H}) > \#\mathcal{B}$.

Dans le premier cas, on considère alors une intersection de p hyperplans, de codimension $p - 1$ avec p minimal. On choisit les coordonnées de telle sorte que les $p - 1$ premières coordonnées correspondent aux $p - 1$ premiers hyperplans. Soit alors \mathcal{H} le dernier hyperplan et $\sum_i \lambda_i x_i = 0$ une équation de \mathcal{H} . Soit U un voisinage de A comme dans la proposition précédente. On peut alors prendre ε suffisamment petit pour que l'arrangement \mathcal{B} obtenu en remplaçant \mathcal{H} par l'hyperplan défini par $\sum_i \lambda_i x_i = \varepsilon$ soit dans U . Il possède alors au moins autant de chambres, et en possède en fait strictement plus. En effet, considérons un point x qui vérifie $0 < \sum_i \lambda_i x_i < \varepsilon$. Alors, si $\{x_1, \dots, x_r\}$ sont les points choisis dans chaque chambre de \mathcal{A} pour la construction de U , ils sont du même côté de H avant sa translation et après. Plus rigoureusement, si l'un de ces points vérifiait $\sum_i \lambda_i x_i > 0$ alors il vérifie $\sum_i \lambda_i x_i > \varepsilon$. Donc x n'est pas dans une chambre de \mathcal{B} contenant un des x_i . Ce qui prouve bien que \mathcal{B} possède strictement plus de chambres que \mathcal{A} (voir figure 7).

Dans le cas où il existe $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ tel que $\text{codim}(\bigcap_{\mathcal{H} \in \mathcal{B}} \mathcal{H}) > \#\mathcal{B}$, il existe un plat qui n'est pas un point et qui est strictement parallèle à un hyperplan \mathcal{H} de \mathcal{B} . On peut alors modifier suffisamment peu l'équation de \mathcal{H} de manière à ce que l'hyperplan obtenu soit dans le voisinage U défini par la proposition précédente, et intersecte le plat en question. L'arrangement obtenu comprend alors strictement plus de chambres que l'arrangement \mathcal{A} . \square

Il est maintenant facile de prouver que les arrangements génériques maximisent le nombre de chambres. En effet, supposons qu'il existe un arrangement non générique \mathcal{A} qui possède plus de chambres qu'un générique. Alors on peut lui appliquer le théorème précédent pour obtenir un arrangement \mathcal{A}_1 qui possède strictement plus de chambres. \mathcal{A}_1 n'est donc pas générique. On peut continuer de manière à obtenir un arrangement \mathcal{A}_2 possédant strictement plus de chambres, et par récurrence, on peut construire une suite d'arrangements $(\mathcal{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont le nombre de chambres tend vers l'infini. Or, le nombre de chambres d'un arrangement à n hyperplans est trivialement majoré par 2^n , d'où une contradiction.

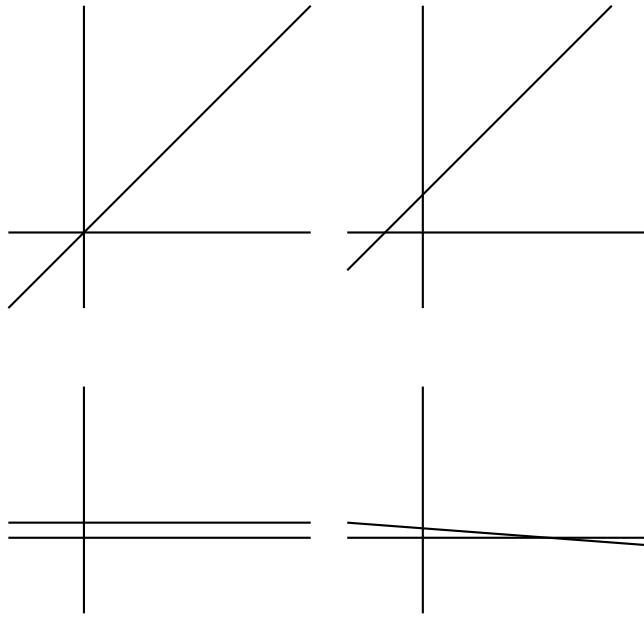


FIG. 7 – Création de chambres supplémentaires dans le cas d'arrangements non génériques

4.3 Densité des arrangement génériques

On va voir dans cette partie que les arrangements génériques sont denses en un certain sens, à savoir qu'ils forment un ouvert de Zariski dans l'espace de tous les arrangements.

Pour cela, étudions à quelles conditions l'arrangement \mathcal{A} associé à une matrice A de taille $n \times (l + 1)$ est générique.

Déjà, l'intersection de p hyperplans doit être de dimension $l - p$ pour $p \leq l$. C'est à dire que quels que soient les vecteurs-lignes (deux à deux distincts) A_{i_1}, \dots, A_{i_p} , la matrice $p \times (l + 1)$ qu'ils forment doit être de rang $l - (l - p) = p$. Cette condition se lit sur les mineurs de la matrice A , et les matrices vérifiant ceci forment bien un ouvert de Zariski.

Ensuite, si l'on considère l'intersection de p hyperplans avec $p > l$, elle doit être vide. Cela revient à dire que le système d'équations suivant ne possède pas de solutions :

$$\begin{cases} a_{i_1 1}x_1 + \dots + a_{i_1 l}x_l = a_{i_1 l+1} \\ \vdots \\ a_{i_p 1}x_1 + \dots + a_{i_p l}x_l = a_{i_p l+1} \end{cases}$$

Pour que ce système n'ait pas de solutions, il faut et il suffit que

$$\begin{pmatrix} a_{i_1 l+1} \\ \vdots \\ a_{i_p l+1} \end{pmatrix} \notin \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} a_{i_1 1} \\ \vdots \\ a_{i_1 l} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{i_p 1} \\ \vdots \\ a_{i_p l} \end{pmatrix} \right).$$

(A_1, \dots, A_l) est de rang au plus l . C'est exactement l , ce que l'on voit en considérant les l premières lignes et ce que nous avons dit précédemment. On veut donc

$\text{rg}(A_1, \dots, A_l, A_{l+1}) = l + 1$. Ainsi, il faut et il suffit que l'un des déterminants bordants

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 1} & \dots & a_{i_1 l} & a_{i_1 l+1} \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{i_l 1} & \dots & a_{i_l l} & a_{i_l l+1} \\ a_{i_k 1} & \dots & a_{i_k l} & a_{i_k l+1} \end{vmatrix}$$

soit non nul pour $k > l$. L'ensemble des matrices vérifiant cette condition forme encore bien un ouvert de Zariski, donc l'ensemble des matrices correspondant aux arrangements génériques forme bien un ouvert de Zariski de $\mathbb{R}^{n(l+1)}$.

En particulier, puisque les fermés de Zariski de \mathbb{R}^k sont de mesure de Lebesgue nulle, la probabilité pour qu'un arrangement aléatoire ne soit pas générique est nulle.

5 Arrangements d'hyperplans sur des corps finis

A côté des arrangements réels, il est aussi intéressant d'étudier les arrangements d'hyperplans de V , espace affine sur un corps \mathbb{K} fini. Nous verrons d'ailleurs que cette étude peut être complémentaire à l'étude précédente, dans le cas où les arrangements réels, définis par des équations à coefficients dans \mathbb{Z} , peuvent être réduits modulo un nombre premier q .

5.1 Le résultat fondamental

Remarquons tout d'abord qu'un arrangement d'hyperplans de \mathbb{R}^n défini par des équations à coefficients dans \mathbb{Z} (on parle d'arrangement défini sur les entiers) définit un arrangement de \mathbb{F}_q , pour tout nombre premier q . L'étude des arrangements des hyperplans définis sur \mathbb{Z} s'appuie alors sur le théorème fondamental suivant, qui permettra de résoudre des problèmes particuliers au cas par cas, comme nous le verrons dans un exemple par la suite.

Théorème 5.1 *Soit \mathcal{A} un arrangement d'hyperplans de \mathbb{R}^n défini sur les entiers, soit $\chi(\mathcal{A}, t)$ son polynôme caractéristique et soit q un nombre premier assez grand. Alors*

$$\chi(\mathcal{A}, q) = \#(\mathbb{F}_q^n \setminus \bigcup_{\mathcal{H} \in \mathcal{A}} \mathcal{H})$$

Autrement dit, $\chi(\mathcal{A}, q)$ est le nombre d'éléments du cube $[0, q - 1]^n$ qui ne satisfont pas modulo q les équations des hyperplans de \mathcal{A} .

DÉMONSTRATION: Soit $X \in L(\mathcal{A})$, et soit $\dim X$ la dimension de X comme sous-espace affine de \mathbb{R}^n . Alors $\dim X$ est aussi la dimension de X comme sous-espace affine de \mathbb{F}_q , pour q premier assez grand, et on a alors $\#X = q^{\dim X}$. En effet, la technique du pivot de Gauss s'applique de la même manière dans les deux cas, pour peu que q ne divise pas les coefficients qui apparaissent dans le calcul (ce qui est assuré pour q assez grand), d'où l'égalité des dimensions. On construit alors deux fonctions f et g de $L(\mathcal{A})$ dans \mathbb{Z} par :

$$\begin{aligned} f(X) &= \#X \\ g(X) &= \#(X \setminus \bigcup_{Y > X} Y) \end{aligned}$$

On a alors $f(X) = q^{\dim X}$ et d'autre part $f(X) = \sum_{Y \geq X} g(Y)$, d'où d'après la formule d'inversion de Möbius :

$$\#(\mathbb{F}_q^n \setminus \bigcup_{\mathcal{H} \in \mathcal{A}} \mathcal{H}) = g(V) = \sum_{X \in L(\mathcal{A})} \mu(V, X) f(X) = \sum_{X \in L(\mathcal{A})} \mu(V, X) q^{\dim X} = \chi(\mathcal{A}, q).$$

□

Comme ceci est valable pour une infinité de nombres premiers, si on arrive à exprimer $\#(\mathbb{F}_q^n \setminus \bigcup_{\mathcal{H} \in \mathcal{A}} \mathcal{H})$, alors on connaît le polynôme caractéristique de l'arrangement réel de départ.

Remarque 5.2

On remarque une certaine analogie entre le comptage des chambres des arrangements réels et le comptage des points pour les arrangements sur les corps finis.

5.2 Un exemple : calcul du polynôme caractéristique de l'arrangement de Shi

On reprend dans cette partie un exemple d'Athanasiadis [1] qui permet d'illustrer le théorème précédent et l'analogie entre le comptage des chambres réelles et le comptage de points sur \mathbb{F}_q . On considère l'arrangement de Shi, noté \mathcal{S}_n , qui est défini (dans \mathbb{R}^n) par les hyperplans d'équations :

$$x_i - x_j = 0, 1 \text{ pour } 1 \leq i < j \leq n$$

et on cherche à calculer son polynôme caractéristique.

Pour des nombres premiers q assez grands, on a vu que $\chi(\mathcal{S}_n, q)$ donne le nombre de n -uplets $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{F}_q^n$ qui vérifient les conditions $x_i - x_j \neq 0$ et $x_i - x_j \neq 1$. On voit un tel n -uplet comme une application de $\{1, \dots, n\}$ dans \mathbb{F}_q , qui envoie i sur sa classe x_i modulo q . On voit alors les éléments de \mathbb{F}_q comme des cases étiquetées cycliquement par les classes modulo q . La case du haut a pour étiquette la classe nulle, puis la case suivante dans le sens positif est étiquetée par la classe de 1, etc. Les n -uplets de \mathbb{F}_q sont alors des placements des entiers $1, \dots, n$ dans les q cases et $\chi(\mathcal{S}_n, q)$ donne le nombre de placements vérifiant les conditions données précédemment : la condition $x_i - x_j \neq 0$ signifie que i et j ne peuvent se trouver dans une même case, et la condition $x_i - x_j \neq 1$ signifie que i ne peut être placé dans la case suivant immédiatement celle de j . Cela signifie que des entiers occupant des cases consécutives doivent être rangés par ordre croissant (quand on les lit dans le sens positif du cercle). Pour compter le nombre de placements, donné par $\chi(\mathcal{S}_n, q)$, plaçons $q - n$ cases (les cases vides) sur un cercle. Il y a alors $(q - n)^{n-1}$ façons de placer les n éléments de $\{1, \dots, n\}$ entre les cases, et une seule façon de les ranger ensuite par ordre croissant. Ici on a considéré qu'il n'y avait qu'une façon de placer le premier élément, par symétrie cyclique de l'arrangement des $q - n$ cases. Pour obtenir $\chi(\mathcal{S}_n, q)$ il suffit donc de multiplier par q .

Théorème 5.3 *Le polynôme caractéristique de l'arrangement \mathcal{S}_n est*

$$\chi(\mathcal{S}_n, q) = q(q - n)^{n-1}.$$

On en déduit alors le nombre de chambres de l'arrangement de Shi qui est égal à $(n + 1)^{n-1}$.

6 Quelques mots de la cohomologie des arrangements

On évoquera ici rapidement et sans démonstrations quelques résultats sur la cohomologie de de Rham du complémentaire d'un arrangement, et son lien avec le polynôme de Poincaré et le polynôme caractéristique.

6.1 Quelques rappels de cohomologie

Définition 6.1 Soit M une variété de dimension n , $Z^*(M)$ l'ensemble des formes différentielles fermées et $B^*(M)$ l'ensemble des formes différentielles exactes. On définit alors l'algèbre de cohomologie de de Rham par

$$H^*(M) = Z^*(M)/B^*(M) = \bigoplus_{i=0}^n H^i(M)$$

Définition 6.2 On appelle p -ième nombre de Betti et on note $B_p(M)$ le nombre $\dim(H^p(M))$.

En particulier, $B_0(M)$ est le nombre de composantes connexes de M . On définit alors le polynôme de Poincaré de M par $\pi(M, t) = \sum_{p \geq 0} B_p(M) t^p$, et la caractéristique d'Euler-Poincaré par $\chi(M) = \pi(M, -1) = \sum_{p \geq 0} (-1)^p B_p(M)$.

6.2 Le cas des corps finis

On a vu que dans le cas d'un arrangement \mathcal{A} défini sur les entiers, on avait pour q premier suffisamment grand $\chi(\mathcal{A}, q) = \#(\mathbb{F}_q^n - \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H)$.

On peut aussi considérer le complémentaire de l'arrangement dans \mathbb{F}_q^n , qui est alors une variété discrète (i.e. de dimension 0). Sa caractéristique d'Euler-Poincaré est alors égale à son cardinal, donc pour q suffisamment grand, elle est donné par $\chi(\mathcal{A}, q)$, le polynôme caractéristique évalué en q .

6.3 Les arrangements réels

On considère cette fois-ci un arrangement d'hyperplans de \mathbb{R}^n . Le complémentaire de l'arrangement est un ouvert de \mathbb{R}^n , donc est muni d'une structure naturelle de variété de dimension n . Chacune des composantes connexes est convexe donc contractile et possède donc la cohomologie d'un point, donc en fait, la caractéristique d'Euler-Poincaré est égale au nombre de chambres, et elle est donc reliée au polynôme caractéristique par $\chi(\mathbb{R}^n - \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H) = \chi(\mathcal{A}, -1)$.

Si on considère la cohomologie à support compact, alors cette fois seules interviennent les chambres bornées car seul H^0 est non nul et qu'une forme constante à support compact sur un ouvert non borné est nulle. Donc la caractéristique d'Euler-Poincaré est là encore reliée au polynôme caractéristique, via la formule de comptage des chambres bornées.

6.4 Les arrangements complexes

On considère dans cette partie des arrangements d'hyperplans d'un espace vectoriel complexe. Dans ce cas, comme il a déjà été fait mention précédemment, le complémentaire ne possède qu'une seule composante connexe, les informations intéressantes proviennent donc plutôt de la connaissance de la cohomologie du complémentaire.

Un résultat fondamental est alors que l'algèbre de cohomologie est engendrée par les $\left\langle \frac{d\alpha_H}{\alpha_H} \right\rangle$ où les α_H sont les polynômes de définition des hyperplans. On montre ensuite que

le polynôme de Poincaré de l'arrangement correspond alors au polynôme de Poincaré de cohomologie du complémentaire. Ce résultat est vraiment important car il permet de calculer un objet de nature topologique (le polynôme de Poincaré cohomologique) par des méthodes purement combinatoires. Au passage ceci nous dit pourquoi le polynôme de Poincaré s'appelle ainsi...

Références

- [1] Christos A. ATHANASIADIS. Characteristic polynomials of subspace arrangements and finite fields. *Advances in Mathematics* **122**, pages 193–233, 1996.
- [2] Pierre CARTIER. Les arrangements d'hyperplans : un chapitre de géométrie combinatoire. In *Séminaire Bourbaki 1980/81*, Lecture Notes in Math. **901**, pages 1–22. Springer Verlag, 1981.
- [3] Peter ORLIK et Hiroaki TERAQ. *Arrangements of hyperplanes*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **300**. Springer-Verlag, 1992.
- [4] Richard STANLEY. *Enumerative combinatorics volume 1*. Cambridge studies in advanced mathematics. Cambridge University Press, 1997.
- [5] Thomas ZASLAVSKY. *Facing up to arrangements : Face-count formulas for partitions of space by hyperplanes*. *Memoirs Amer. Math. Soc.* **154**. 1975.