# Transformée de scattering : définition, applications, reconstruction

Irène Waldspurger, sous la direction de Stéphane Mallat

23 juin 2011

## Table des matières

# 1 Introduction

Un problème récurrent en traitement d'images est de réussir à définir une distance entre deux images qui corresponde à la perception visuelle qu'a un humain de ces images. Dans ce but, Stéphane Mallat a introduit récemment une "transformée de scattering" ([6]) qui vérifie des propriétés de stabilité aux déformations, intéressantes pour diverses applications.
Cette transformée de scattering définit une représentation de l'ensemble des images (et, plus généralement, de l'ensemble des fonctions $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$) et il est naturel de se demander si cette représentation est inversible. Ce n'est pas le cas (asymptotiquement tout du moins) mais on peut espérer qu'il existe une sorte d'inverse partiel et se demander comment calculer cet inverse. C'est le problème de la reconstruction d'une fonction à partir de sa transformée de scattering qui, s'il n'a pas encore été étudié, est lié à d'autres problèmes plus connus et étudiés depuis plusieurs décennies à cause de leurs applications dans des domaines tels que la physique ou le traitement de signaux audio.

Notre but est ici de présenter ce problème de reconstruction.
Nous commencerons par définir la transformée de scattering puis nous énoncerons certaines propriétés importantes de cette dernière. Ensuite, nous parlerons des difficultés du problème de reconstruction ainsi que de son cadre mathématique et algorithmique. Nous conclurons en expliquant quelles questions précises il semble intéressant d'étudier dans le cadre de ce problème.

# 2 Apparition de la transformée de scattering

## 2.1 Motivation

Il est difficile de définir une distance satisfaisante entre deux images, considérées comme des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. La distance induite par la norme $L^2$ ne correspond pas à la perception que nous avons de ces images : deux images représentant des scènes identiques, même sous des angles et éclairages proches, peuvent être très éloignées en norme $L^2$, par exemple si l'une se déduit de l'autre par une translation. La distance $L^2$, comme la plupart des autres distances usuelles, est ainsi inadaptée pour beaucoup de problèmes de traitement d'images.
Pour remédier à ce problème, nous nous proposons d'essayer de définir une application $\phi$ sur $L^2(\mathbb{R}^d)$, à valeurs dans un espace métrique convenable $(E, d)$ vérifiant la propriété suivante :

**Propriété 2.1** *Pour toute $\tau \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$, pour toute $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, on pose $D_\tau f(x) = f(x - \tau(x))$ $(\forall x \in \mathbb{R}^d)$.*
*On dira que $\Phi : L^2(\mathbb{R}^d) \to (E, d)$ est stable relativement à de petites déformations s'il existe $C > 0$ telle que, pour toutes $\tau \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ et $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ :*

$$d(\Phi(f), \Phi(D_\tau f)) \leq C||f||_2 \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\mathrm{grad}\, \tau(x)|$$

**Remarque 2.2** *Si $\phi$ vérifie la propriété précédente, alors pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et tout $a \in \mathbb{R}^d$, $\Phi(T_a f) = \Phi(f)$, où $T_a f$ est la translatée de $f$ par $a$ $(T_a f(x) = f(x - a), \forall x \in \mathbb{R}^d)$.*

Une première idée pourrait être de définir $\Phi$ par :

$$\Phi(f) = f \star \psi$$

où $\psi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ est une fonction vérifiant éventuellement certaines propriétés de régularité. Cette application ne vérifie pas la remarque 2.2, donc a fortiori par la propriété 2.1 :

$$\Phi(T_a f)(x) = T_a(f \star \psi) = f \star T_a \psi \neq f \star \psi$$

On a malgré tout, d'après l'inégalité de Young :

$$||\Phi(T_a f) - \Phi(f)||_2 = ||f \star (\psi - T_a \psi)||_2 \leq ||f||_2 ||\psi - T_a \psi||_1$$

ce qui indique que $\Phi(T_a f)$ et $\Phi(f)$ sont "proches" si $\psi$ est convenablement choisie.
En particulier, si $\psi$ est de classe $\mathcal{C}_1$ et si $|\mathrm{grad}\, \psi|$ est intégrable sur $\mathbb{R}^d$ :

$$||\Phi(T_a f) - \Phi(f)||_2 \leq |a|.||f||_2 ||\mathrm{grad}\, \psi||_1$$

Donc, si $\mathrm{grad}\, \psi$ est assez petit (c'est-à-dire si $\psi$ varie assez lentement), la fonction $\Phi$ est "presque" invariante par translation. On peut ainsi montrer que $\Phi$ est quasiment stable relativement à de petites déformations lorsqu'on dilate $\psi$, ce qui a pour effet de diminuer $\mathrm{grad}\, \psi$ :

**Lemme 2.3** *Supposons que $\psi$ ainsi que toutes ses dérivées premières et secondes décroissent en $O((1 + |x|)^{-(d+2)})$. Posons, pour tout $j \in \mathbb{Z}$, $\psi_j(x) = 2^{-dj} \psi(2^{-j} x)$ et notons $\Phi_j(f) = f \star \psi_j$ Alors il existe $C > 0$ telle que, pour toute $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et toute $\tau : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ de gradient assez petit :*

$$||\Phi_j(D_\tau f) - \Phi_j(f)||_2 \leq C ||f||_2 (2^{-j} |\tau|_\infty + |\mathrm{grad}\, \tau|_\infty)$$

En plus de n'être pas exactement invariant par translation, ce type d'opérateur a l'inconvénient de "lisser" les hautes fréquences : si $\psi$ est de classe $L^2$, $\widehat{f \star \psi} = \hat{f} \hat{\psi}$ donc, si $\hat{\psi}$ décroît à l'infini, $||\phi_j(f)||_2$ est d'autant plus petite que $\hat{f}$ a des valeurs importantes surtout en des points éloignés de 0. Cela représente une grande perte d'information, car, en traitement d'images, les hautes fréquences jouent un rôle important.
Le principe de la transformée de scattering va être d'appliquer successivement plusieurs opérateurs de ce type, pour différents $j$, en intercalant des modules complexes destinés à "transformer les hautes fréquences en fréquences plus basses" et en convolant les fonctions obtenues avec une fonction de la forme $\phi_J = 2^{-dJ} \phi(2^{-J}.)$, pour un $J$ assez grand, de façon à assurer une forme d'invariance par translation, qui sera transformée en invariance exacte en faisant tendre $J$ vers $+\infty$.

## 2.2 Définition

Donnons maintenant une définition rigoureuse de la transformée de scattering.

Soit $(\psi_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ une famille d'éléments de $L^2(\mathbb{R}^d)$. On suppose que chaque $\psi_\gamma$ est deux fois dérivable et a ses dérivées premières et secondes majorées par $C(1+|x|)^{-(d+2)}$ pour une certaine constante $C$ indépendante de $\gamma$. Soit également $\phi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ vérifiant les mêmes hypothèses.

Pour tout $j \in \mathbb{Z}$, on pose :

$$\psi_{\gamma,j}(x) = 2^{-dj}\psi_\gamma(2^{-j}x) \qquad \phi_j(x) = 2^{-dj}\phi(2^{-j}x)$$

Soit $J \in \mathbb{Z}$. On note $\mathcal{P}_J = \{((\gamma_1, j_1), ..., (\gamma_n, j_n)) \text{ tq } n \in \mathbb{N} \text{ et } j_k < J, \forall k \leq n\}$.
Pour tout $p = ((\gamma_1, j_1), ..., (\gamma_n, j_n)) \in \mathcal{P}_J$ et pour toute $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ on pose :

$$\begin{aligned} S(p)f &= |||f \star \psi_{\gamma_1,j_1}| \star \psi_{\gamma_2,j_2}| \star ... \star \psi_{\gamma_n,j_n}| && \text{si } n \geq 1 \\ &= f && \text{sinon} \end{aligned}$$

et :

$$S_J(p)f = S(p)f \star \phi_J$$

On définit ainsi la transformée de scattering de $f$ à l'échelle $J$, $S_J f = \{S_J(p)f | p \in \mathcal{P}_J\}$ et une distance associée :

$$||S_J f - S_J g|| = \sqrt{\sum_{p\in\mathcal{P}_J} ||S_J(p)f - S_J(p)g||_2^2}$$

Nous verrons dans le paragraphe suivant que, sous certaines conditions, cette somme converge.

# 3 Propriétés de la transformée de scattering

On suppose $J$, $\phi$ et $(\psi_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ fixés, comme au paragraphe précédent. Expliquons pourquoi sous certaines conditions, la distance ci-dessus est bien définie et vérifie les propriétés voulues.

## 3.1 Convergence

On pose, pour toute $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ :

$$\overline{U}_J f = \{f \star \phi_J\} \cup \{|f \star \psi_{\gamma,j}| \text{ tq } \gamma \in \Gamma, j < J\}$$

et on pose $||U_J f|| = \sqrt{||f \star \phi_J||_2^2 + \sum_{\gamma\in\Gamma, j<J} || \, |f \star \psi_{\gamma,j}| \, ||_2^2}$.
On vérifie en appliquant la transformée de Fourier le théorème suivant :

**Théorème 3.1** *L'opérateur $U_J$ est unitaire, i.e. $||U_J f|| = ||f||_2, \forall f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ssi :*

$$1 = |\hat{\phi}(x)|^2 + \sum_{\gamma\in\Gamma, j<0} |\hat{\psi}_{\gamma,j}(x)|^2 \tag{1}$$

*pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$.*

Supposons maintenant que l'égalité 1 est vérifiée. On peut alors démontrer par récurrence le résultat suivant :

**Lemme 3.2** *$\forall f \in L^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$ :*

$$||f||_2^2 = \sum_{p\in\mathcal{P}_J, |p|<n} ||S_J(p)f||_2^2 + \sum_{p\in\mathcal{P}_J, |p|=n} ||S(p)f||_2^2$$

*(où $|p|$ désigne le nombre d'éléments de p)*

On en déduit en particulier que, pour toute $f \in L^2$, $\sum_{p\in\mathcal{P}_J} ||S_J(p)f||_2^2 \leq ||f||_2^2 < +\infty$. La distance introduite dans le paragraphe 2.2 est donc bien définie (et, d'ailleurs, on peut démontrer que $||S_Jf - S_Jg|| \leq ||f-g||_2$).
Sous une condition supplémentaire, qu'on trouvera dans [6] (égalité (31)), on peut même montrer que $\sqrt{\sum_{p\in\mathcal{P}_J} ||S_J(p)f||_2^2} = ||f||_2$.

## 3.2 Stabilité

Notre but était de construire un opérateur vérifiant la propriété 2.1. En fait, la transformée $S_J$ ne vérifie pas cette propriété. En particulier, de même que l'opérateur $\Phi$ du paragraphe 2.1, elle n'est pas invariante par translation. Cependant, on peut obtenir cette invariance par passage à la limite :

**Théorème 3.3**

$$\forall f, g \in L^2(\mathbb{R}^d), \forall J \in \mathbb{Z}, ||S_{J+1}f - S_{J+1}g|| \leq ||S_Jf - S_Jg||$$

La limite $\lim_{J\to+\infty} ||S_Jf - S_Jg||$ existe donc et on peut démontrer que, sous une certaine condition (la même que celle de la fin du paragraphe 3.1), si $g$ se déduit de $f$ par une translation, alors $||S_Jf - S_Jg|| \to 0$.
Quant à la stabilité aux déformations, on a le théorème suivant :

**Théorème 3.4** *Soit $\epsilon > 0$. Alors il existe une constante $C$ telle que, pour tout $\tau \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ vérifiant $|\mathrm{grad}\,\tau|_\infty \leq 1-\epsilon$ et pour toute $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ :*

$$||S_JD_\tau f - S_Jf|| \leq C||Sf||_{1,\mathcal{P}_J}(2^{-J}|\tau|_\infty + |\mathrm{grad}\,\tau|_\infty \max(1, \log\big(\frac{|\tau|_\infty}{|\mathrm{grad}\,\tau|_\infty}\big)) + |H\tau|_\infty)$$

*où $H$ désigne le hessien et où $||Sf||_{1,\mathcal{P}_J} = \sum_{m=0}^{+\infty}\big(\sum_{p\in\mathcal{P}_J, |p|=m} ||S(p)f||^2\big)^{1/2}$.*

En outre, on peut définir de façon similaire un opérateur de scattering sur l'ensemble des processus stationnaires, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions aléatoires $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ telles que $F$ et $F(.-a)$ sont de même loi pour tout $a \in \mathbb{R}^d$, à condition de se limiter aux processus dont la covariance $R_F(x-y) = \mathbb{E}((F(x) - \mathbb{E}(F(x)))(F(y) - \mathbb{E}(F(y))))$ est suffisamment rapidement décroissante. On note $\overline{S_JF}$ la transformée de scattering du processus stationnaire $F$.
Cet opérateur de scattering vérifie une propriété de stabilité similaire à celle énoncée dans le théorème 3.4 et on a également le théorème suivant :

**Théorème 3.5** *Si $F$ et $G$ sont deux processus stationnaires avec des moments d'ordre 2 finis ($\mathbb{E}(F^2(x)), \mathbb{E}(G^2(x)) < +\infty$) vérifiant une certaine propriété de convergence ($\lim_{J\to+\infty} \sum_{p\in\mathcal{P}_J} \mathbb{E}(|S_J(p)F(x) - \overline{S_J(p)F}|^2) = 0$), alors :*

$$\lim_{J\to+\infty} \sum_{p\in\mathcal{P}_J} |S_J(p)F(x) - S_J(p)G(x)|^2 = \lim_{J\to\infty} ||\overline{S_J F} - \overline{S_J G}||^2$$

*pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, avec probabilité 1.*

Ce théorème indique qu'avec probabilité 1, on peut calculer (asymptotiquement) la distance entre deux processus stationnaires à partir d'une réalisation de chaque processus. Il indique aussi que, si l'on dispose de deux réalisations du même processus stationnaire, alors les transformées de scattering qu'on calcule à partir de chaque réalisation sont identiques.

**Remarque 3.6** *Ce n'est pas démontré mais il semble qu'en pratique, un grand nombre de processus stationnaires vérifie la propriété $\lim_{J\to+\infty} \sum_{p\in\mathcal{P}_J} \mathbb{E}(|S_J(p)F(x) - \overline{S_J(p)F}|^2) = 0$.*

### 3.3 Intérêt de ces propriétés : applications

La transformée de scattering a été appliquée au traitement d'images pour des tâches de classification ([4]) : on souhaite réussir à différencier certains types d'images et on dispose d'un ensemble d'images d'entraînement, qui ont été manuellement classifiées, de sorte qu'on en connaît le type. On calcule une approximation de la transformée de scattering de chacune des images d'entraînement et, lorsqu'on reçoit une nouvelle image, on détermine son type selon que sa propre transformée de scattering est proche des transformées de scattering des images d'entraînement de l'un ou l'autre type.
Les résultats obtenus pour la classification de chiffres écrits à la main sont satisfaisants ; ils sont meilleurs que ceux obtenus par les algorithmes connus précédemment lorsque l'ensemble d'entraînement contient un petit nombre d'éléments. La transformée de scattering a également été utilisée pour classifier des textures, assimilées à des processus stationnaires et, dans ce cas, les résultats sont spectaculairement meilleurs que ceux obtenus jusqu'à présent.
De la même façon, on peut utiliser la transformée de scattering pour la classification d'extraits musicaux ([2]).

## 4 Présentation du problème de la reconstruction

Cette dernière partie est consacrée au problème de la reconstruction d'une fonction à partir de sa transformée de scattering.

### 4.1 Intérêt, problèmes

Deux types de raisons justifient que l'on tente de résoudre ce problème de reconstruction. Tout d'abord, disposer d'un algorithme efficace inversant (partiellement) la transformée de scattering

permettrait de mieux étudier le comportement de celle-ci (en particulier, d'espérer savoir quelles fonctions ont la même transformée de scattering ou, en tout cas, des transformées très proches). Ensuite, cette reconstruction pourrait avoir des applications pratiques. Par exemple, on pourrait s'en servir pour faire de la synthèse de textures : à partir de la transformée de scattering d'un échantillon d'une texture, on pourrait reconstruire un autre échantillon, a priori différent du premier puisque, comme nous l'avons vu dans le paragraphe 3.2, tous les échantillons ont quasiment la même transformée de scattering. Des problèmes similaires ont également diverses applications dans le domaine du traitement de signaux audio.
Malheureusement, on sait déjà que ce problème de reconstruction est insoluble (c'est d'ailleurs une partie de son intérêt), puisque deux fonctions différentes peuvent avoir des transformées de scattering très proches lorsque $J$ devient grand. Tout algorithme concret rencontrera donc nécessairement des problèmes de stabilité. Une question importante sera donc de déterminer si ces problèmes de stabilité empêchent ou non l'algorithme de donner des résultats intéressants : même si la fonction reconstruite n'est pas la fonction voulue, en sera-t-elle visuellement proche ?

Puisque $S_J$ se calcule en itérant l'opérateur $\overline{U}_J$ (défini au paragraphe 3.1), la méthode la plus naturelle pour tenter d'opérer la reconstruction est de trouver un algorithme inversant $\overline{U}_J$ et d'appliquer récursivement cet algorithme. Trois problèmes se posent dans la recherche d'un tel algorithme. Le premier est celui de l'unicité : $\overline{U}_J(f)$ détermine-t-il exactement $f$ ? Le deuxième est celui de la stabilité : même si $\overline{U}_J(f)$ détermine exactement $f$, existe-t-il, pour tout $\epsilon > 0$ un certain $\eta > 0$ tel que $(||\overline{U}_J f - \overline{U}_J g|| < \eta) \Rightarrow (||f-g||_2 < \epsilon)$ ? Si ce n'est pas le cas, comme il est impossible de faire par ordinateur des calculs avec une précision infinie, on ne peut pas espérer calculer $f$ à partir de $\overline{U}_J f$. Enfin, le troisième problème est algorithmique : en supposant que les deux premiers problèmes sont résolus, quel algorithme pouvons-nous trouver qui reconstruire effectivement $f$ à partir de $\overline{U}_J f$ ? Des algorithmes itératifs existent déjà dans des cadres proches mais ils souffrent de problèmes de convergence.

## 4.2 Outils théoriques : un autre problème de reconstruction

Détaillons dans ce paragraphe la nature des problèmes d'unicité et de stabilité en étudiant un problème voisin, à propos duquel beaucoup d'études ont été faites et un cadre mathématique a été developpé, qui pourrait être également utiles pour l'étude de l'inversion de $\overline{U}_J$.

Ce problème voisin est le suivant : soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ une fonction à support compact. Peut-on déterminer $f$ à partir de $|\hat{f}|$, à certaines incertitudes triviales près ?
Le lien entre les deux problèmes provient notamment du fait que, lorsque les $\psi_{\gamma,j}$ ont leurs transformées de Fourier à support compact, savoir calculer $f$ à partir de $|\hat{f}|$ permettrait de calculer chaque $f \star \psi_{\gamma,j}$ à partir de $|f \star \psi_{\gamma,j}|$ (puisque $\widehat{f \star \psi_{\gamma,j}} = \hat{f}\hat{\psi}_{\gamma,j}$ serait à support compact, donc déterminable à partir de sa transformée de Fourier qui, à une constante près, est égale à $|f \star \psi_{\gamma,j}|$).
Ce problème de reconstruction d'une fonction à partir du module de sa transformée de Fourier a été intensivement étudié depuis plus de quarante ans car il intervient dans beaucoup de domaines, en particulier en astronomie ou en cristallographie. Malheureusement, il a été démontré (notamment par Akutowicz dans [1]) que ce problème n'admettait pas de solution : en général,

en dimension 1, la solution du problème $|\hat{f}| = |\hat{g}|$ n'est pas unique à translation, retournement ($g(x) = \overline{f}(-x)$) ou multiplication par un complexe de module 1 près ; on peut d'ailleurs décrire assez précisément l'ensemble des solutions, à l'aide de la transformée de Laplace.
Si $f \in L^2(\mathbb{R})$ est une fonction à support compact, on définit sa transformée de Laplace par :

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x z} dx$$

Il s'agit d'une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.

**Théorème 4.1** *Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ à support compact inclus dans $[A; B]$ dont on supposera, pour simplifier, que la transformée de Laplace vérifie $F(0) \neq 0$.*
*Soit $g \in L^2(\mathbb{R})$ une fonction à support compact telle que $|\hat{f}(x)| = |\hat{g}(x)|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors la transformée de Laplace $G$ de $g$ est de la forme :*

$$G(z) = \exp(i\delta_1 + i\delta_2 z)\Big(\prod_{n \in I} \frac{1 - z/\alpha_n^*}{1 - z/\alpha_n}\Big) F(z) \tag{2}$$

*où les $(\alpha_n)_{n \in I}$ sont des zéros de $F$ et où $\delta_1$ et $\delta_2$ sont des constantes réelles*
*Réciproquement, si $G$ est une fonction de la forme ci-dessus, alors il existe $g \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ à support compact inclus dans $[A - \frac{\delta_2}{2\pi}; B - \frac{\delta_2}{2\pi}]$, ayant $G$ pour transformée de Laplace et telle que $\forall x \in \mathbb{R}, |\hat{f}(x)| = |\hat{g}(x)|$.*

**Idée de démonstration :**
La première partie du théorème se démontre en remarquant que $F(\theta) = \hat{f}(\theta)$ et $G(\theta) = \hat{g}(\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. Si l'égalité $|\hat{f}| = |\hat{g}|$ est vérifiée, on a donc :

$$\forall z \in \mathbb{R}, F(z)\overline{F(\overline{z})} = |\hat{f}(z)|^2 = |\hat{g}(z)|^2 = G(z)\overline{G(\overline{z})}$$

Puisque les fonctions $z \to F(z)\overline{F(\overline{z})}$ et $z \to G(z)\overline{G(\overline{z})}$ sont holomorphes, elles sont donc égales sur tout $\mathbb{C}$.
Or, d'après le théorème d'Hadamard (voir [9]), puisque $F$ et $G$ sont d'ordre 1, elles s'écrivent sous la forme :

$$F(z) = \exp(c_1 + c_2 z) \prod_n (1 - z/\alpha_n) \exp(z/\alpha_n)$$

$$G(z) = \exp(d_1 + d_2 z) \prod_n (1 - z/\beta_n) \exp(z/\beta_n)$$

On doit donc avoir, pour tout $z \in \mathbb{C}$ :

$$\begin{aligned} & \exp(2\Re(c_1) + 2\Re(c_2)z) \prod_n (1 - z/\alpha_n)(1 - z/\alpha_n^*) \exp(z/\alpha_n + z/\alpha_n^*) \\ &= F(z)\overline{F(\overline{z})} \\ &= G(z)\overline{G(\overline{z})} \\ &= \exp(2\Re(d_1) + 2\Re(d_2)z) \prod_n (1 - z/\beta_n)(1 - z/\beta_n^*) \exp(z/\beta_n + z/\beta_n^*) \end{aligned}$$

Quitte à réordonner les $\beta_n$, on a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\beta_n = \alpha_n$ ou $\beta_n = \alpha_n^*$, ainsi que $\Re(d_1) = \Re(c_1)$ et $\Re(d_2) = \Re(c_2)$. On note $I = \{n \text{ tq } \beta_n \neq \alpha_n\}$.
Comme on peut montrer que les produits $\prod\limits_{n\in I} \frac{1-z/\alpha_n^*}{1-z/\alpha_n}$ et $\prod\limits_{n\in I} \exp(z/\beta_n^* - z/\beta_n)$ convergent, on peut récrire $G$ sous la forme :

$$\begin{aligned}
G(z) &= \exp(d_1 + d_2 z)\prod_n (1 - z/\beta_n)\exp(z/\beta_n) \\
&= \exp(\Im(d_1 - c_1) + \Im(d_2 - c_2)z)F(z)\prod_{n\in I}\frac{(1 - z/\alpha_n^*)\exp(z/\alpha_n^*)}{(1 - z/\alpha_n)\exp(z/\alpha_n)} \\
&= \exp(\Im(d_1 - c_1) + (\Im(d_2 - c_2) + A)z)F(z)\prod_{n\in I}\frac{1 - z/\alpha_n^*}{1 - z/\alpha_n}
\end{aligned}$$

où $A = \sum\limits_{n\in I} \frac{1}{\alpha_n^*} - \frac{1}{\alpha_n} \in i\mathbb{R}$, ce qui est bien en accord avec l'égalité 2.
La deuxième partie du théorème consiste à montrer que, si $G$ est de la forme donnée par 2, alors il s'agit de la transformée de Laplace d'une fonction $g \in L^2(\mathbb{R})$ à support compact inclus dans $[A - \delta_2/(2\pi); B - \delta_2/(2\pi)]$. On commence par le cas où $I$ est fini, en utilisant un théorème dû à Paley et Wiener ([7], théorème 19.3) :

**Théorème 4.2** *Soit $H : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. On suppose qu'il existe des réels $K, C > 0$ tels que $\forall z \in \mathbb{C}, |f(z)| \leq C\exp(2\pi K|z|)$. Alors $H$ est la transformée de Laplace d'une certaine fonction $h \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ à support compact inclus dans $[-K; K]$.*

On déduit le cas où $I$ est infini du cas où il est fini par un argument de convergence dans $L^2$. □

Ainsi, en dimension 1, la solution du problème $|\hat{g}| = |\hat{f}|$ n'est généralement pas unique et il n'est pas possible de reconstruire $f$ à partir de $|\hat{f}|$.
Cependant, on a presque toujours unicité de la solution en dimension 2 (voir [3] ou [8]) mais, même dans ce cas, la reconstruction n'est pas possible : on ne connaît pas d'algorithme exact pour effectuer la reconstruction et les algorithmes approchés sont limités par des problèmes de stabilité. En effet, ils reconstruisent généralement une fonctions $g$ telle que $|\hat{f}|$ et $|\hat{g}|$ soient proches mais que $f$ et $g$ ne le soient pas.

Le problème de la reconstruction de $f$ à partir de $\overline{U}_J f$ présente des similarités avec le problème de la reconstruction de $f$ à partir de $|\hat{f}|$ mais il est possible que, sous certaines conditions, on puisse être assuré de l'unicité de la solution de $\overline{U}_J f = \overline{U}_J g$, voire même de sa stabilité. En effet, les $|f \star \psi_j|$ ne sont pas indépendantes les unes des autres et cette non-indépendance pourrait restreindre beaucoup le nombre de solutions.

## 4.3 Outils algorithmiques : la méthode de projection alternée

Venons-en au troisième problème, celui de la détermination d'un bon algorithme. Si les expériences numériques menées ne semblent pas contredire les hypothèses précédentes, selon lesquelles le problème $\overline{U}_J f = \overline{U}_J g$ aurait une unique solution et serait stable, il n'a pas encore été possible de trouver un algorithme qui calcule effectivement la solution.

Fig. 1 – À gauche, une photo définissant une fonction $f$ ; à droite, la reconstruction de cette photo à partir de $\overline{U}_J f$

L'algorithme utilisé jusqu'à présent est un algorithme de projection alternée, semblable à celui introduit par Gerchberg et Saxton dans [5]. Son principe est le suivant :
On connaît $f \star \phi_J$ et $(|f \star \psi_{\gamma,j}|)_{\gamma\in\Gamma, j<J}$ et on veut déterminer $(f \star \phi, (f \star \psi_{\gamma,j}))$, ce qui permettra de reconstruire $f$. Il s'agit donc de trouver un élément $(l, (h_{\gamma,j}))$ vérifiant les deux conditions suivantes :
- $\exists g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ tq $l = g \star \phi_J$ et $h_{\gamma,j} = g \star \psi_{\gamma,j}, \forall j < J, \gamma \in \Gamma$
- $l = f \star \phi_J$ et $|h_{\gamma,j}| = |f \star \psi_{\gamma,j}|, \forall j < J, \gamma \in \Gamma$

c'est-à-dire un élement $(l, (h_{\gamma,j})) \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$, pour :
- $\mathcal{C}_1 = \{(l, (h_{\gamma,j}))$ tq $\exists g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ tq $l = g \star \phi_J$ et $h_{\gamma,j} = g \star \psi_{\gamma,j}, \forall j < J, \gamma \in \Gamma\}$
- $\mathcal{C}_2 = \{(l, (h_{\gamma,j}))$ tq $l = f \star \phi_J$ et $|h_{\gamma,j}| = |f \star \psi_{\gamma,j}|, \forall j < J, \gamma \in \Gamma\}$

Comme on peut calculer les projections orthogonales sur $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, on choisit $A'_0$ aléatoirement dans $\mathcal{C}_2$ puis on calcule les suites $(A_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ et $(A'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telles que $A_{k+1}$ est la projection orthogonale de $A'_k$ sur $\mathcal{C}_1$ et $A'_k$ celle de $A_k$ sur $\mathcal{C}_2$.

Si les ensembles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ étaient convexes, alors un théorème démontré dans [10] nous assurerait que les suites $(A_k)$ et $(A'_k)$ convergeraient vers un point de $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$. Malheureusement, $\mathcal{C}_2$ n'est pas convexe et, en pratique, on observe que les suites convergent bien mais pas vers un élément de l'intersection.
Un exemple est représenté sur la figure 1. On constate que l'image reconstruite ressemble assez fortement à l'image initiale mais qu'elle en est encore trop différente pour que l'algorithme puisse être considéré comme satisfaisant et utilisé pour l'inversion de l'opérateur de scattering.
L'observation des $|g\star\psi_{\gamma,j}|$ (où $g$ est la fonction reconstruite), qui sont significativement différents de $|f \star \psi_{\gamma,j}|$ montre qu'on n'a pas affaire à un problème d'unicité ou de stabilité mais bien à un problème algorithmique de convergence.

### 4.4 À venir

Achevons cette présentation de la reconstruction en rappelant les questions qui se posent maintenant.
Le premier problème à résoudre sera cette double question d'unicité et de stabilité, dans le cas de la reconstruction de $f$ à partir de $\overline{U}_J f$. Il est possible qu'elle soit un cas particulier d'un problème plus général, par exemple le suivant, après discrétisation :
On se place dans $\mathbb{R}^N$ (ou $\mathbb{C}^N$) et on considère une famille $(g_n) \in (\mathbb{R}^N)^{\mathbb{Z}}$. À quelle(s) condition(s) la suite $(|\langle f, g_n\rangle|)_{n\in\mathbb{Z}}$ détermine-t-elle uniquement le $N$-uplet $f$, à certaines opérations triviales près ?

Ensuite reviendra le problème de trouver un bon algorithme, éventuellement en utilisant l'analyse harmonique ou en explorant des techniques de convexification puis, en cas de succès, il faudra l'utiliser pour inverser l'opérateur de scattering en évitant dans la mesure du possible les problèmes d'instabilité et en veillant à ce que le temps d'exécution de l'algorithme ne devienne pas déraisonnable.

## Références


[1] Edwin J. Akutowicz. On the determination of the phase of a fourier integral, i. *Trans. Am. Math. Soc.*, 83 :179–192, 1956.

[2] J. Andén and S. Mallat. Multiscale scattering for audio classification. 2011.

[3] R. Barakat and G. Newsam. Necessary conditions for a unique solution to two-dimensional phase recovery. *J. Math. Phys.*, 25 :3190–3193, 1984.

[4] J. Bruna and S. Mallat. Classification with scattering operators. *Proceedings of the IEEE*, 2010.

[5] R. Gerchberg and W. Saxton. A practical algorithm for the determination of phase from image and diffraction plane pictures. *Optik*, 35 :237–246, 1972.

[6] S. Mallat. Group invariant scattering. janvier 2011.

[7] W. Rudin. *Analyse réelle et complexe*. Masson et Cie, 1975.

[8] J. L. C. Sanz. Mathematical considerations for the problem of fourier transform phase retrieval from magnitude. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 45 :651–664, Août 1985.

[9] Edward C. Titchmarsh. *The theory of functions*. Oxford University Press, 1932.

[10] H. Webb and D. C. Youla. Image restoration by the method of convex projections : Part i-theory. *IEEE Trans. Med. Imaging*, 1 :81–94, 1982.