

Modèles d’Ising sur des graphes ressemblant à des arbres

Benoît Laslier et Irène Waldspurger

Encadrés par Marc Lelarge et Guilhem Semerjian

1 Introduction

Inventé en 1925, le modèle d’Ising traduit le comportement d’atomes possédant un spin qui peut prendre deux valeurs, $+1$ ou -1 . Toutes les configurations, c’est-à-dire toutes les façons de choisir les valeurs des spins, sont possibles, mais ne sont pas également probables : chaque configuration survient avec une probabilité proportionnelle à $e^{-\beta H}$, H étant l’énergie associée à la configuration, et β l’inverse de la température de l’ensemble. Il existe en effet entre les atomes proches des interactions qui rendent plus probables les configurations dans lesquelles les spins de ces atomes ont tous la même valeur, mais elles sont d’autant plus faibles que la température du milieu est élevée. Ainsi, à basse température, les spins des différents atomes prennent presque tous la même valeur, tandis qu’à haute température, ils se conduisent comme des variables aléatoires indépendantes. Le passage d’un état à l’autre, qui s’accompagne d’une discontinuité de certaines fonctions associées au problème, est appelé une transition de phase et un des intérêts du modèle d’Ising est de permettre son étude.

En outre, il existe de nombreuses applications du modèle d’Ising, qui dépassent le cadre de la physique. Par exemple, certains problèmes d’optimisation consistent, s’ils sont exprimés convenablement, en la recherche du minimum d’une fonction, qui n’est autre que l’énergie dans un certain modèle d’Ising. Or, les configurations pour lesquelles le minimum de l’énergie est atteint ne sont autres que les configurations dont la probabilité d’être observées ne tend pas vers 0 lorsque la température devient nulle. Une bonne connaissance du modèle d’Ising et la possibilité d’effectuer des simulations numériques s’avèreraient donc très utiles dans plusieurs domaines.

Malheureusement, s’il est possible d’effectuer des calculs exacts pour des atomes formant un réseau cubique en dimensions 1 et 2, il devient nécessaire de recourir à des approximations dès la dimension 3. De plus, il est difficile d’obtenir des résultats numériques à l’aide d’un ordinateur, dans la mesure où le nombre de configurations croît exponentiellement en le nombre d’atomes. Il faut donc recourir à des modèles simplifiés. En particulier, on peut étudier des “modèles de champ moyen”, comme le modèle de Curie-Weiss, où les interactions réelles sont remplacées par des interactions moyennes.

Nous nous intéresserons dans ce texte aux modèles d’Ising sur des graphes, dans lesquels on considère que deux atomes sont proches s’ils sont placés sur des nœuds du graphe reliés par une arête. Plus précisément, nous considérerons des graphes qui sont localement des arbres. En effet, il est possible de calculer rapidement de manière exacte certaines quantités dans un modèle d’Ising sur un arbre, et nous verrons dans quelle mesure il est possible d’approximer

une loi d'Ising sur un graphe par une loi d'Ising sur un arbre convenable. Ce problème a été étudié par Dembo et Montanari dans [1] et une grande partie de notre rapport sera consacrée à la présentation des résultats de leur article.

L'étude théorique des graphes aléatoires que nous allons réaliser sera centrée sur le comportement à la limite thermodynamique, c'est-à-dire pour des graphes dont la taille tend vers l'infini. Pour relier ces propriétés limites à celle des graphes de grande taille, mais finis, nous avons mené des simulations numériques informatiques, en nous concentrant sur les deux problèmes suivants : la transition de percolation pour illustrer la structure des graphes aléatoires étudiés et la simulation du modèle d'Ising par une chaîne de Markov avec calcul de la magnétisation. Nous présenterons au cours du rapport les résultats de ces simulations, et une partie du code en C utilisé est disponible dans l'annexe.

Nous définirons d'abord rigoureusement le modèle d'Ising et montrerons brièvement son intérêt dans l'étude des transitions de phase, en donnant quelques résultats précis pour le modèle de Curie-Weiss. Nous nous intéresserons ensuite à la possibilité d'approximer les marginales d'un modèle d'Ising sur un graphe par celles d'un modèle d'Ising sur un arbre, ce qui constitue la première moitié des résultats de [1]. Dans une troisième partie, nous présenterons rapidement la méthode de Monte-Carlo, qui représente un autre moyen d'évaluer numériquement ces marginales. Après cela, nous expliquerons sans les démontrer entièrement les résultats constituant la deuxième moitié de [1], qui donnent une formule exacte pour calculer l'énergie libre par particule dans des modèles d'Ising sur une suite de graphes dont le nombre de sommets tend vers l'infini, lorsque la suite a la propriété de "converger localement vers un arbre aléatoire". Enfin, nous consacrerons une section à l'explication de nos simulations numériques.

Nous remercions MM. Lelarge et Semerjian de nous avoir proposé ce sujet et de nous avoir aidés comme ils l'ont fait.

Un grand merci également à Héloïse pour son précieux soutien moral.

2 Présentation du problème et définitions

2.1 Graphes : définitions

Nous regroupons dans ce paragraphe la plupart des définitions relatives aux graphes que nous utiliserons. La lecture n'en est pas indispensable pour la suite de cette section.

Comme nous l'avons vu, nous étudierons des modèles d'Ising associés à des graphes. Il convient donc de donner quelques définitions relatives aux graphes.

Un **graphe** G est un couple (V, E) , où V est un ensemble d'entiers positifs, qu'on nomme les **sommets** du graphe, et où E est un ensemble de couples d'éléments distincts de V , qu'on appelle les **arêtes** de G . On notera $\langle i, j \rangle$ l'arête de G entre les sommets i et j .

Si i est un entier, il pourra nous arriver d'écrire " $i \in G$ " plutôt que " $i \in V$ " pour traduire le fait que i est un sommet du graphe G .

Si i est un sommet de G , on notera ∂i l'ensemble des **voisins** de i , c'est-à-dire l'ensemble des j tels que $\langle i, j \rangle \in E$

On dira que $G' = (V', E')$ est un **sous-graphe** de G si $V' \subset V$ et $E' \subset E$. Dans ce cas, on appellera **frontière** de G' dans G l'ensemble $\{i \in V' \mid \exists j \in V \setminus V' \text{ tq } \langle i, j \rangle \in E\}$.

Si i et j sont des sommets de G , on peut définir la distance de i à j dans G par $d(i, j) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid \exists i_0, \dots, i_n \text{ tq } i_0 = i, i_n = j, \forall k \leq n \langle i_{k-1}, i_k \rangle \in E\}$, qui peut éventuellement valoir $+\infty$. Si i est un sommet de G et t un entier positif, on notera $B_{G,i}(t)$ (**boule de centre i de rayon t**) le graphe dont les sommets sont les $j \in V$ tels que $d(i, j) \leq t$, et dont les arêtes sont les $\langle i, j \rangle \in E$ telles que i et j sont des sommets de $B_{G,i}(t)$.

L'objet de notre travail est d'étudier dans quelle mesure on peut approximer des quantités définies en fonction de graphes par des quantités définies en fonction de graphes particuliers, les arbres. Passons donc aux définitions concernant les arbres.

Un **arbre** T est un graphe (V, E) tel que tous les couples de sommets de T soient reliés par un unique chemin d'arêtes, c'est-à-dire : $\forall (i, j) \in V^2 \exists ! i_0, \dots, i_n \text{ tq } i_0 = i, i_n = j, \forall k \leq n \langle i_{k-1}, i_k \rangle \in E$.

A partir de maintenant, même si nous ne le précisons pas à nouveau, tous les graphes que nous considérerons seront finis, à l'exception éventuellement des arbres, qui pourront être infinis mais dont tous les sommets auront nécessairement un nombre de voisins fini.

Pour tout arbre $T = (V, E)$, nous noterons $|T| = \text{Card } V$.

La plupart du temps, nous distinguerons un sommet $*$ de T qu'on appellera **racine** de l'arbre. On note \mathcal{A} l'ensemble des arbres munis d'une racine.

A partir de cette racine, nous pouvons transformer notre arbre en arbre généalogique : si i est un sommet de V différent de la racine $*$, on appelle son **parent** l'unique sommet p tel qu'il existe i_0, \dots, i_n tels que $i_0 = *, i_{n-1} = p, i_n = i$ et $\langle i_{k-1}, i_k \rangle \in E$ pour tout $k \leq n$. D'après la définition d'un arbre, tout sommet (autre que la racine) a un et un seul parent.

Si i est un sommet de T , ses **enfants** sont les sommets de T dont i est le parent. On notera généralement Δ_i le nombre d'enfants du sommet i et on appellera **degré maximal** de T l'entier (éventuellement infini) $\max\{\Delta_i \mid i \in V\}$.

Si T et T' sont des arbres, on dira que T' est un **sous-arbre** de T si T' est un sous-graphe de T . De plus, si G est un sous-graphe de l'arbre T et si i est un sommet de G , on appelle **sous-arbre maximal** contenant i de G le plus grand sous-arbre de T dont i est un sommet qui soit un sous-graphe de G (on dit que $T' = (V', E')$ est "plus grand" que $T'' = (V'', E'')$ lorsque $V'' \subset V'$ et $E'' \subset E'$). On vérifie facilement que le sous-arbre maximal existe et est unique.

Si T est un arbre ayant une racine $*$ et l un entier positif ou nul, on notera $T(l)$ le sous-arbre de T constitué des l premières générations de T . Plus précisément, $T(0) = \{\{*\}, \emptyset\}$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $T(k+1)$ est l'arbre dont les sommets sont les sommets de $T(k)$ et les enfants dans T des sommets de $T(k)$, et dont les arêtes sont les arêtes de T qui relient deux sommets de $T(k)$. On notera $\partial T(l+1)$ l'ensemble des sommets appartenant à $T(l+1)$ mais pas à $T(l)$.

On dira que deux arbres $T_1 = (V_1, E_1)$ et $T_2 = (V_2, E_2)$, de racines respectives $*_1$ et $*_2$, sont **égaux** (et on le notera $T_1 \approx T_2$) s'il existe une bijection $f : V_1 \rightarrow V_2$ telle que $f(*_1) = *_2$ et $\langle i, j \rangle \in E_1 \Leftrightarrow \langle f(i), f(j) \rangle \in E_2$. Soit $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ telle que $F(T) \approx T$ pour tout $T \in \mathcal{A}$ et, pour tous T_1 et T_2 tels que $T_1 \approx T_2$, $F(T_1) = F(T_2)$. Soit, pour tout $T \in \mathcal{A}$, f_T la bijection entre les sommets de $F(T)$ et ceux de T .

Terminons ce paragraphe par quelques définitions concernant les arbres aléatoires.

On dira que T est un **arbre aléatoire** si T est une variable aléatoire à images dans \mathcal{A} .

Si T est un arbre aléatoire, A un arbre et r un entier positif ou nul tels que $\mathbb{P}(T(r) \approx A) > 0$, on définit l'espérance sachant que $T(r) \approx A$ par : pour toute fonction $g : \mathcal{A}/\approx \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}_{T,r,A}(g(T)) = \frac{\mathbb{E}(g(T)\mathbb{I}(T(r) \approx A))}{\mathbb{E}(\mathbb{I}(T(r) \approx A))}$$

(où $\mathbb{I}(T(r) \approx A)$ vaut 1 si $T(r) \approx A$ et 0 sinon)

On peut alors définir $\mathbb{E}_{T(r)}$, l'**espérance par rapport à $T(r)$** par $\mathbb{E}_{T(r)} = \mathbb{E}_{T,r,T(r)}$, soit l'espérance conditionnelle par rapport à $T(r)$. Pour toute g , $\mathbb{E}_{T(r)}(g(T))$ est donc une variable aléatoire réelle. On remarquera que, pour toute fonction g bornée, $\mathbb{E}(\mathbb{E}_{T(r)}(g(T))) = \mathbb{E}(g(T))$. Nous nous intéresserons plus particulièrement aux arbres aléatoires conditionnellement indépendants. Soit $T \in \mathcal{A}$. On dit qu'il est **conditionnellement indépendant** si, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, les arbres constitués des descendants d'un sommet de $\partial T(r)$ sont indépendants conditionnellement à $T(r)$. Soyons plus précis. Si i est un sommet de T , on note T_i le sous-arbre de T constitué de i et de tous ses descendants. On dit que T est conditionnellement indépendant si, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, pour tout $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mathbb{P}(F(T(r)) = A) > 0$, en notant i_1, \dots, i_n les sommets de $\partial A(r)$, pour toutes fonctions $g_1, \dots, g_n : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\mathbb{E}_{T,r,A}(g_1(T_{f_{T(r)}(i_1)}) \dots g_n(T_{f_{T(r)}(i_n)})) = \mathbb{E}_{T,r,A}(g_1(T_{f_{T(r)}(i_1)})) \dots \mathbb{E}_{T,r,A}(g_n(T_{f_{T(r)}(i_n)}))$$

Soit $\Delta > 0$. Si $T \in \mathcal{A}$, on dit que T a un **nombre moyen d'enfants borné par Δ** si, pour tout $r \in \mathbb{N}$, pour tout $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mathbb{P}(F(T(r)) = A) > 0$, pour tout sommet i de $\partial A(r)$:

$$\mathbb{E}_{T,r,A}(\Delta_{f_{T(r)}(i)}) \leq \Delta$$

(Δ_j désignant pour tout j le nombre d'enfants du sommet j)

2.2 Le modèle d'Ising

Si N est un entier strictement positif, on appelle **configuration** du modèle d'Ising à N particules un N -uplet $(\sigma_1, \dots, \sigma_N)$ où les σ_i valent $+1$ ou -1 . On appelle alors σ_i le **spin** de la particule i .

On définit l'**énergie** d'une configuration $\sigma_1, \dots, \sigma_N$ par la formule suivante :

$$H(\sigma_1, \dots, \sigma_N) = -\beta \sum_{1 \leq i < j \leq N} J_{i,j} \sigma_i \sigma_j$$

où β et les $J_{i,j}$ sont des constantes, avec $\beta \geq 0$.

On définit enfin une mesure de probabilité μ sur l'ensemble \mathcal{C} des configurations par :

$$\mu(\sigma_1, \dots, \sigma_N) = \frac{e^{-H(\sigma_1, \dots, \sigma_N)}}{Z_N}$$

où $Z_N = \sum_{(\sigma_1, \dots, \sigma_N) \in \mathcal{C}} e^{-H(\sigma_1, \dots, \sigma_N)}$ est appelé la **fonction de partition**.

Nous nous intéresserons ici au cas particulier des modèles d'Ising sur des graphes : pour un graphe $\mathcal{G} = (V, E)$, dont l'ensemble V des sommets est l'ensemble $\{1, \dots, N\}$, on prendra $J_{i,j} = 1$ si les entiers i et j sont reliés par une arête et $J_{i,j} = 0$ sinon. On aura alors :

$$H(\sigma_1, \dots, \sigma_N) = -\beta \sum_{\langle i,j \rangle \in E} \sigma_i \sigma_j$$

Le modèle d'Ising possède plusieurs interprétations physiques. Considérons par exemple un modèle d'Ising sur un graphe cubique de dimension d . Il s'agit alors d'une modélisation du comportement de N atomes répartis sur un réseau cristallin cubique (de dimension d), comme sur la figure 1. Le spin σ_i représente le moment magnétique du i -ème atome (c'est-à-dire un vecteur caractérisant l'interaction de la particule avec le champ magnétique extérieur, qui peut avoir deux orientations opposées : vers le haut, ce qui correspond au cas $\sigma_i = 1$, ou vers le bas, ce qui correspond au cas $\sigma_i = -1$). Les moments magnétiques voisins interagissent entre eux, et l'énergie du système est d'autant plus basse qu'un grand nombre de paires d'atomes voisins ont leurs moments magnétiques respectifs alignés. D'après les lois de la physique statistique, la probabilité d'observer une certaine configuration de moments magnétiques est donnée par la mesure de probabilité μ définie précédemment, où β est l'inverse de la température du réseau cristallin.

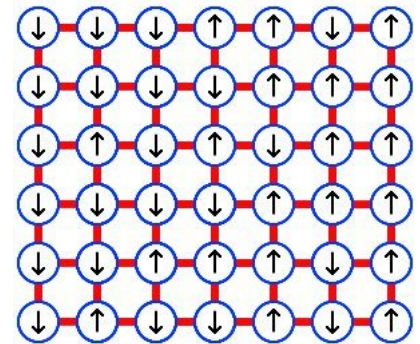


FIG. 1 – Réseau cristallin à deux dimensions

Comme nous l'avons dit dans l'introduction, l'étude du modèle d'Ising dépasse en fait le cadre de la physique, puisqu'il en existe des applications à des sujets comme la théorie de l'information ou certains problèmes d'optimisation.

2.3 Les transitions de phase

Un des intérêts du modèle d'Ising est de permettre l'étude des transitions de phase de certains systèmes physiques. Par exemple, dans le cas d'un matériau constitué d'atomes munis d'un moment magnétique, on peut observer expérimentalement une transition de phase entre les états ferromagnétique et paramagnétique : à basse température, c'est-à-dire quand la constante β du modèle d'Ising est très grande, les configurations où les spins sont tous identiques sont beaucoup plus probables que les autres configurations, et les moments magnétiques des atomes du matériau ont tendance à avoir tous la même orientation. On dit alors que le matériau a un comportement ferromagnétique. A haute température, en revanche, c'est-à-dire quand β est très proche de 0, toutes les configurations ont approximativement la même probabilité et les moments magnétiques des atomes se comportent presque comme s'ils étaient indépendants. On dit que le matériau a un comportement paramagnétique. Le passage d'un état à l'autre constitue une **transition de phase**.

Pour étudier les transitions de phase dans le modèle d'Ising, il est nécessaire d'introduire une

grandeur supplémentaire, l'**aimantation** :

$$m(\sigma_1, \dots, \sigma_N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i$$

Nous nous intéresserons plus précisément à l'aimantation moyenne (c'est-à-dire à la moyenne de l'aimantation sur toutes les configurations, pondérée par les probabilités des configurations) :

$$\langle m \rangle = \frac{1}{Z_N} \sum_{(\sigma_1, \dots, \sigma_N) \in \{-1, +1\}^N} m(\sigma_1, \dots, \sigma_N) e^{-H(\sigma_1, \dots, \sigma_N)}$$

Malheureusement, les configurations $(\sigma_1, \dots, \sigma_N)$ et $(-\sigma_1, \dots, -\sigma_N)$ ont la même probabilité, et l'aimantation moyenne est toujours nulle. Pour que l'étude de cette grandeur soit intéressante, il faut donc briser la symétrie entre les configurations en introduisant un terme supplémentaire dans l'énergie associée à une configuration. Dans la suite du paragraphe, nous utiliserons alors la définition suivante de l'énergie, pour un graphe \mathcal{G} dont l'ensemble des sommets est $V = \{1, \dots, N\}$ et dont l'ensemble des arêtes est noté E :

$$H(\sigma_1, \dots, \sigma_N) = -\beta \sum_{\langle i, j \rangle \in E} \sigma_i \sigma_j - B \sum_{i=1}^N \sigma_i$$

(où B est un réel)

Dans le cadre de l'étude d'un matériau constitué d'atomes possédant un moment magnétique, la modification de l'expression de l'énergie que nous venons d'introduire correspond à l'ajout d'un champ magnétique externe au matériau, selon la direction duquel les spins auront tendance à s'aligner. Lorsque le comportement du matériau est ferromagnétique, la limite de l'aimantation moyenne quand B tend vers 0 en restant positif est strictement positive. En revanche, lorsque le comportement est paramagnétique, cette limite est nulle.

Étudions à titre d'exemple le cas particulier du modèle de Curie-Weiss, dans lequel il est possible d'effectuer des calculs exacts, comme dans [9] et [3]. Le modèle de Curie-Weiss est la restriction du modèle d'Ising au cas des graphes complets (c'est-à-dire des graphes où il existe une arête entre chaque paire de sommets), où l'on modifie légèrement l'expression de l'énergie, en ajoutant un facteur $\frac{1}{N}$, ce qui donne alors :

$$H(\sigma_1, \dots, \sigma_N) = -\frac{\beta}{N} \sum_{1 \leq i < j \leq N} \sigma_i \sigma_j - B \sum_{i=1}^N \sigma_i$$

L'invariance de H par permutation des σ_i permet de simplifier le calcul des différentes quantités du problème. On peut alors démontrer le résultat suivant :

Théorème 2.3.1 *Si on fixe $\beta > 0$ et $B > 0$, l'aimantation moyenne du modèle de Curie-Weiss correspondant à ces constantes β et B , à N particules, qu'on note $\langle m \rangle_N$ admet une limite, m_∞ lorsque N tend vers $+\infty$. Cette limite est l'unique solution sur $[0; 1]$ de l'équation :*

$$m_\infty = \tanh(\beta m_\infty + B)$$

La démonstration de ce théorème se trouve dans l'annexe (section 7.1).

Nous nous intéresserons toujours aux limites des différentes quantités lorsque la taille du système (ici N) tend vers l'infini car, lorsque la taille du système est finie, toutes les grandeurs que nous aurons définies seront des fonctions infiniment dérivables de β et B (puisqu'elle s'exprimeront, comme $\langle m \rangle$, en fonction de sommes finies d'applications infiniment dérivables). Pour pouvoir étudier les discontinuités qui caractérisent les transitions de phase, il nous sera donc nécessaire de considérer les limites en $+\infty$.

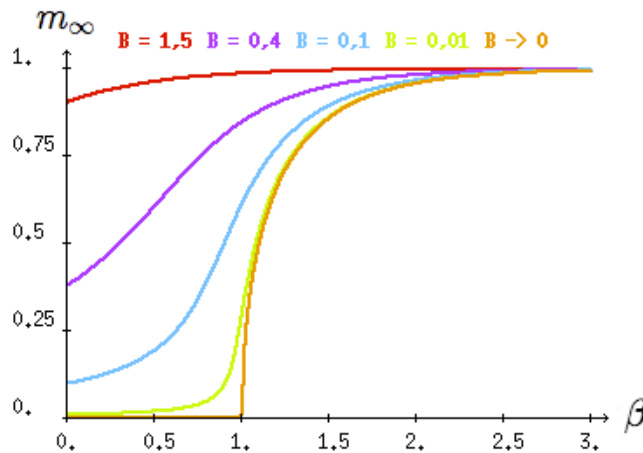


FIG. 2 – Aimantation en fonction de β , pour différentes valeurs de B

à-dire sur une simple chaîne), dans lequel il n'existe pas de transition de phase. En 1944, Lars Onsager réussit, par un calcul exact de l'aimantation limite, à montrer l'existence d'une transition de phase pour un graphe cubique à deux dimensions et à calculer la température de la transition de phase. On ne sait pas, pour l'instant, effectuer ce calcul en trois dimensions.

Remarque : Le modèle de Curie-Weiss est un modèle d'approximation de champ moyen : l'énergie par spin est définie comme la moyenne des énergies dues à l'interaction avec tous les autres spins. C'est ce qui justifie la présence du $\frac{1}{N}$ dans l'expression de l'énergie : il ne s'agit pas d'une somme d'interactions avec toutes les autres particules mais d'une moyenne d'interactions. Pour un système physique de particules munies de moments magnétiques, cela correspondrait à faire l'approximation que, pour une particule donnée, la moyenne du moment magnétique de ses voisines est à peu près la même que la moyenne du moment magnétique de l'ensemble des particules du système, et donc que l'énergie résultant de son interaction avec ses voisines peut s'exprimer comme une moyenne d'énergies d'interaction avec toutes les particules du matériau.

2.4 L'énergie libre

Evoquons maintenant l'**énergie libre**. Il s'agit d'une quantité utile en physique, en particulier car elle permet de calculer le travail pouvant être fourni par un système thermodynamique. Elle est définie de la façon suivante :

La figure 2 représente les variations de m_∞ en fonction de β , à B constant, pour différentes valeurs de B . Nous pouvons observer sur le graphique (et vérifier par le calcul) que, lorsque B tend vers 0 par valeur supérieure, l'aimantation limite m_∞ est nulle si $\beta \leq 1$ et strictement positive si $\beta > 1$. Un matériau constitué de particules munies de moments magnétiques dont l'énergie serait définie comme dans le modèle de Curie-Weiss serait paramagnétique pour $\beta \leq 1$ et ferromagnétique pour $\beta > 1$. Il y a donc une transition de phase en $\beta = 1$.

En 1925, le physicien Ernst Ising étudia dans sa thèse le cas du modèle d'Ising sur un graphe cubique unidimensionnel (c'est-

$$F = \log Z$$

(où Z est la fonction de partition du modèle d'Ising considéré)

En fait, on la définit d'habitude plutôt par $F = \frac{\log Z}{\beta}$, mais nous prendrons $F = \log Z$ pour plus de simplicité.

Dans le cas du modèle de Curie-Weiss, que nous avons étudié au paragraphe précédent, on peut montrer que, lorsque N tend vers $+\infty$, l'énergie libre par particule $F_N = \frac{1}{N} \log Z_N$ converge vers :

$$\inf_{x \in]0;1[} \phi(x)$$

(avec $\phi(x) = 2\beta x^2 + 2x(B - \beta) - x \ln x - (1 - x) \ln(1 - x) + \frac{\beta}{2} - B$)

Cette affirmation constitue le théorème 7.1.4 du paragraphe 7.1 de l'annexe, auquel on pourra se référer pour la démonstration.

Il est difficile, de façon générale, de montrer que l'énergie libre par particule converge, lorsqu'on considère des modèles d'Ising sur une suite de graphes dont la taille tend vers l'infini, et de calculer la limite (si elle existe). En outre, le calcul numérique (même approximatif) de l'énergie libre d'un système est difficile, et le but de la section 5 sera justement de donner une méthode de calcul de la limite à l'infini de cette énergie, pour une suite de graphes vérifiant certaines hypothèses.

3 Calcul approché des marginales par envoi de messages

Calculer de façon exacte une loi d'Ising sur un graphe est difficile, puisqu'il faut effectuer une somme sur l'ensemble des configurations du graphe, dont le cardinal évolue exponentiellement en la taille du graphe. En revanche, il est possible d'effectuer ce calcul rapidement sur un arbre fini, ce qui fournit une méthode pour calculer de façon approximative les marginales d'une loi d'Ising sur un graphe à la présentation et à la justification de laquelle cette partie est consacrée.

3.1 Notations et définitions

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Soit β un réel positif ou nul. Soit $\{B_i\}_{i \in V}$ un ensemble de réels positifs indexés par les éléments de V .

Soit $\mathcal{C} = \{-1; +1\}^V$ l'ensemble des configurations sur l'ensemble V . Soit μ la mesure (de probabilité) sur \mathcal{C} telle que :

$$\mu(\{\sigma_i\}_{i \in V}) = \frac{e^{-H(\{\sigma_i\})}}{Z_N}$$

où $H(\{\sigma_i\}) = -\beta \sum_{(i,j) \in E} \sigma_i \sigma_j - \sum_{i \in V} B_i \sigma_i$ est l'**énergie** de la configuration $\{\sigma_i\}$

et $Z_N = \sum_{\{\sigma_i\} \in \mathcal{C}} e^{-H(\{\sigma_i\})}$ est la **fonction de partition**.

On appellera μ la **mesure (ou loi) d'Ising associée au graphe G , à la température inverse β et au champ magnétique $\{B_i\}$** .

On parlera parfois, lorsque B sera un réel positif, du champ magnétique B pour désigner le champ magnétique $\{B_i\}$ avec $B_i = B$ pour tout i .

Si U est un sous-ensemble de V , on peut définir μ_U , la **marginale de μ sur U** : μ_U est la mesure de probabilité sur $\{-1; +1\}^U$ telle que :

$$\mu_U(\{\sigma'_i\}_{i \in U}) = \mu(\{\{\sigma_i\} \in \mathcal{C} \text{ tq } \sigma_j = \sigma'_j \forall j \in U\})$$

Pour toute fonction $f : C \rightarrow \mathbb{R}$, on notera $\langle f \rangle_\mu$ la moyenne de f pour la mesure d'Ising μ , c'est-à-dire :

$$\langle f \rangle_\mu = \sum_{\{\sigma_i\} \in \mathcal{C}} f(\{\sigma_i\}) \mu(\{\sigma_i\})$$

Si μ_1 et μ_2 sont deux mesures de probabilité sur un ensemble E , on peut définir leur **distance en variation totale** $\|\mu_1 - \mu_2\|_{VT} = \frac{1}{2} \sum_{i \in E} |\mu_1(\{i\}) - \mu_2(\{i\})|$.

Nous considérerons parfois des modèles d'Ising sur des arbres aléatoires. Il est donc nécessaire de savoir définir un champ magnétique sur un arbre aléatoire.

On dira que $\{B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ est un **champ magnétique** si, pour tout i , B_i est une fonction de \mathcal{A} dans \mathbb{R}^+ , et si la propriété suivante est vérifiée :

pour tout $r \in \mathbb{N}$, pour tous $T_1, T_2 \in \mathcal{A}$ tels que $T_1(r) \approx T_2(r)$, pour tout sommet i de $T_1(r)$, $B_i(T_1) = B_{f_{T_2}(f_{T_1}^{-1}(i))}(T_2)$.

Cette propriété traduit l'idée que, B_i représentant le champ magnétique au sommet i , si deux arbres ont leur r premières générations égales, alors les deux ensembles de champs magnétiques sur les sommets de ces r premières générations sont égaux.

Pour alléger les notations, nous parlerons d'un arbre aléatoire T muni d'un champ magnétique $\{B_i\}$ et nous noterons B_i au lieu de $B_i(T)$.

3.2 Inégalités classiques à propos du modèle d'Ising sur des graphes

Nous admettrons dans la suite de ce texte les deux résultats suivants, qui nous permettront de comparer des lois d'Ising définis à partir de paramètres différents.

L'inégalité de Griffiths est démontrée dans [7]. On trouvera dans [5] une démonstration de l'inégalité GHS (Griffiths-Hurst-Sherman) à l'aide de l'inégalité FKG (Fortuin-Kasteleyn-Ginibre), qui est, quant à elle, démontrée dans [2].

Théorème 3.2.1 (Inégalité de Griffiths) *Soient $G = (V, E)$ et $G' = (V, E')$ deux graphes sur le même ensemble de sommets. Soient β et β' des constantes positives; soient $\{B_i\}_{i \in V}$ et $\{B'_i\}_{i \in V}$ des ensembles de réels positifs. On note μ (resp. μ') la mesure d'Ising associée au*

graphe G (resp. G') avec température inverse β (resp. β') et champ magnétique $\{B_i\}_{(i \in V)}$ (resp. $\{B'_i\}_{(i \in V)}$). Si $E \subset E'$, $\beta \leq \beta'$ et $B_i \leq B'_i$ pour tout $i \in V$, alors pour tout $U \subset V$:

$$0 \leq \langle \prod_{i \in U} \sigma_i \rangle_\mu \leq \langle \prod_{i \in U} \sigma_i \rangle_{\mu'}$$

Dans le cas où $U = \{i\}$ est un singleton, la deuxième partie de l'inégalité peut s'interpréter physiquement de la façon suivante : si on augmente le champ magnétique (qui tend à aligner les spins vers le haut), si on diminue la température (qui réduit l'agitation moléculaire et favorise donc l'alignement dans le même sens des spins), ou si on augmente le nombre d'interactions entre les particules (qui favorisent également l'alignement des spins), alors le spin de la particule i est plus fréquemment orientée vers le haut.

Théorème 3.2.2 (Inégalité GHS) *Soient $G = (V, E)$ un graphe et β un réel positif. Pour tout $\mathbf{B} = \{B_i\}_{(i \in V)}$ un ensemble de réels positifs, soit $\mu_{\mathbf{B}}$ la mesure d'Ising associée au graphe G avec température inverse β et champ magnétique \mathbf{B} . Si j est un élément de V , on note $m_j(\mathbf{B}) = \langle \sigma_j \rangle_{\mu_{\mathbf{B}}}$. La fonction $m_j : \mathbb{R}^V \rightarrow \mathbb{R}$ est deux fois dérivable et, pour tous k et l dans V :*

$$\frac{\partial^2 m_j(\mathbf{B})}{\partial B_k \partial B_l} \leq 0$$

3.3 Le modèle d'Ising sur les arbres

Alors qu'il est difficile d'étudier des lois d'Ising sur des graphes quelconques, on peut obtenir des résultats exacts si les graphes sont des arbres. Notre but est de comprendre dans quelle mesure il est possible d'approximer une loi d'Ising sur un graphe par une loi d'Ising sur un arbre soigneusement choisi. Il nous faut donc tout d'abord obtenir quelques résultats à propos des lois d'Ising sur des arbres ; c'est l'objet de cette sous-partie.

Le lemme suivant nous sera souvent utile, dans la mesure où il permet de ramener l'étude de la marginale sur un sous-arbre d'une loi d'Ising sur un arbre à l'étude directe d'une loi d'Ising sur le sous-arbre.

Lemme 3.3.1 *Soient $T = (V, E)$ un arbre fini et $U = (V', E')$ un sous-arbre de T . On note ∂U la frontière de U dans T . Soit μ la mesure d'Ising associée à T , pour une température inverse β et un champ magnétique $\{B_i\}_{(i \in V)}$. Pour tout $i \in \partial U$, on note $T_i = (V_i, E_i)$ le sous-arbre maximal contenant le sommet i du graphe $(V, E \setminus E')$ et μ_i la mesure d'Ising associée à T_i avec température inverse β et champ magnétique $\{B_j\}_{(j \in V_i)}$. Soit μ_U la marginale de μ sur V' . La mesure μ_U est la mesure d'Ising associée à U , pour la température inverse β et le champ magnétique $\{B'_i\}_{(i \in V')}$, avec :*

$$\begin{aligned} B'_i &= B_i \text{ si } i \in V' \setminus \partial U \\ B'_i &= \operatorname{atanh}(\langle \sigma_i \rangle_{\mu_i}) \geq B_i \text{ si } i \in \partial U \end{aligned}$$

La démonstration de ce lemme se fait par le calcul (on la trouvera dans [1]). Elle permet d'aboutir à l'égalité suivante, qui est intéressante car elle permet, par récurrence, de calculer exactement les aimantations moyennes dans des modèles d'Ising sur des arbres, et sur laquelle repose la définition des h_i du théorème 5.2.1 :

Si on note, pour tout $i \in \partial U$, k_1, \dots, k_{Δ_i} les enfants de i dans T_i (avec racine en i) et T_{k_j} l'arbre constitué de k_j et de tous ses descendants dans T_i , on a :

$$B'_i = \text{atanh}(\langle \sigma_i \rangle_{\mu_i}) = B_i + \sum_{j=1}^{\Delta_i} \text{atanh}(\tanh(\beta) \langle \sigma_{k_j} \rangle_{\mu_{T_{k_j}}})$$

(où $\mu_{T_{k_j}}$ désigne la mesure d'Ising pour l'arbre T_{k_j} , associée à la température inverse β et au champ magnétique $\{B_l\}$)

Deux lois particulières, qui sont définies ci-dessous, joueront un grand rôle dans nos démonstrations, puisque lorsque nous voudrions étudier une loi d'Ising, nous la comparerons généralement à ces deux lois "de référence".

Soient $T = (V, E)$ un arbre et l un entier strictement positif ; soient β une constante positive et $\{B_i\}_{(i \in V)}$ un champ magnétique. La loi d'Ising associée à $T(l) = (V_l, E_l)$ avec **conditions au bord libres**, pour la température inverse β et le champ magnétique $\{B_i\}$ est définie par :

$$\mu^{l,0}(\{\sigma_i\}_{(i \in V_l)}) = \frac{1}{Z^{l,0}} \exp(\beta \sum_{\langle i,j \rangle \in E_l} \sigma_i \sigma_j + \sum_{i \in V_l} B_i \sigma_i)$$

(où $Z^{l,0}$ est la constante de normalisation adaptée)

On définit de même la loi d'Ising associée à $T(l) = (V_l, E_l)$ avec **conditions au bord positives**, pour la température inverse β et le champ magnétique $\{B_i\}$:

$$\mu^{l,+}(\{\sigma_i\}_{(i \in V_l)}) = \frac{1}{Z^{l,+}} \exp(\beta \sum_{\langle i,j \rangle \in E_l} \sigma_i \sigma_j + \sum_{i \in V_l} B_i \sigma_i) \mathbb{I}(\sigma_i = 1 \forall i \in \partial T(l))$$

(où $Z^{l,+}$ est la constante de normalisation adaptée, et où \mathbb{I} désigne la fonction qui vaut 1 si la condition qui suit est vérifiée, et 0 sinon)

La loi d'Ising avec conditions au bord libres est en fait simplement la loi d'Ising sur le graphe $T(l)$, associée à la restriction aux sommets de $T(l)$ du champ magnétique défini sur tous les sommets de T . La loi d'Ising avec conditions au bord positives représente la limite de la loi d'Ising sur le graphe $T(l)$ lorsqu'on fait tendre vers $+\infty$ le champ magnétique appliqué aux sommets de $\partial T(l)$. Il nous arrivera parfois de parler de champ magnétique ayant une (ou plusieurs) composante(s) égales à $+\infty$ au lieu de parler de la limite lorsqu'on fait tendre cette (ou ces) composante(s) vers $+\infty$.

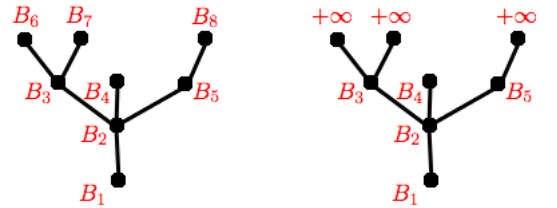


FIG. 3 – Comparaison des modèles d'Ising avec conditions au bord libres (à gauche) et positives (à droite)

Nous verrons par la suite que lorsque nous aurons à considérer un modèle d'Ising sur une partie de T contenant $T(l)$, nous pourrons généralement encadrer sa marginale sur $T(l)$ par les deux lois que nous venons de définir. En utilisant le théorème suivant, qui nous permettra d'évaluer la différence entre ces deux lois, nous pourrons alors majorer la différence entre la loi que nous souhaiterions étudier et les lois avec conditions au bord respectivement libres et positives.

Théorème 3.3.2 *Soit $\Delta > 0$. Soient $0 < B_{\min} \leq B_{\max}$ et $\beta_{\max} \geq 0$. Il existe A et λ dépendant de β_{\max} , B_{\min} , B_{\max} et Δ , et C dépendant de β_{\max} et B_{\max} tels que, pour tous $r, l \in \mathbb{N}$ avec $l > r$ et pour tout arbre aléatoire T conditionnellement indépendant avec un nombre moyen d'enfants borné par Δ , muni d'un champ magnétique $\{B_i\}$ vérifiant que $B_i \leq B_{\max}$ pour tout $i \in T(l-1)$ et $B_i \geq B_{\min}$ pour tout $i \in T(l)$, alors :*

$$\mathbb{E} \|\mu_{T(r)}^{l,+} - \mu_{T(r)}^{l,0}\|_{VT} \leq A e^{-\lambda(l-r)} \mathbb{E}(C^{|T(r)|})$$

où $\mu_{T(r)}^{l,+}$ et $\mu_{T(r)}^{l,0}$ sont les marginales sur $T(r)$ des mesures d'Ising associées à $T(l)$, pour une température inverse $\beta \leq \beta_{\max}$ quelconque et le champ magnétique $\{B_i\}$ avec conditions au bord respectivement positives et libres.

Démonstration :

Soit $\beta_{\max} \geq \beta \geq 0$ une température inverse fixée pour toute la démonstration.

Pour tout $s \in \mathbb{N}$ et pour tout $B_{<} > 0$, on note $\mathcal{T}_{s,B_{<}}$ l'ensemble des arbres aléatoires T conditionnellement indépendants, ayant un nombre moyen d'enfants borné par Δ , munis d'une température inverse $\beta \leq \beta_{\max}$ et d'un champ magnétique $\{B_i\}$ de telle façon que $B_i \geq B_{<}$ pour tout $i \in T(s)$ et $B_i \leq B_{\max}$ pour tout $i \in T(s-1)$.

Première partie :

Dans cette partie, nous montrerons comment nous ramener au cas où $r = 0$.

Soient r et l des entiers, avec $l > r$ et soit T un arbre aléatoire muni d'un champ magnétique $\{B_j\}$ appartenant à $\mathcal{T}_{l,B_{\min}}$.

Pour tout $r \geq 0$, on notera $T(r) = (V_r, E_r)$.

Pour tout $i \in \partial T(r)$, on note T'_i le sous-arbre de T constitué de i et de tous ses descendants. On note ν_i^+ (resp. ν_i^0) la marginale sur $\{i\}$ de la loi d'Ising sur $T'_i(l-r)$ avec la température inverse β et le champ magnétique $\{B_j\}$ restreint à T'_i , pour des conditions au bord positives (resp. libres).

Le principe est d'exprimer $\mu_{T(r)}^{l,+}$ et $\mu_{T(r)}^{l,0}$ en fonction des ν_i^+ et des ν_i^0 , ce qui nous permettra de transformer l'inégalité sur $\|\mu_{T(r)}^{l,+} - \mu_{T(r)}^{l,0}\|_{VT}$ en une inégalité sur les $\|\nu_i^+ - \nu_i^0\|_{VT}$.

On montre par le calcul que, pour tout $\{\sigma_i\}_{i \in V_r}$:

$$\mu_{T(r)}^{l,+}(\{\sigma_i\}) = \frac{f(\{\sigma_i\})}{Z^+} \prod_{j \in \partial T(r)} \nu_j^+(\sigma_j)$$

et :

$$\mu_{T(r)}^{l,0}(\{\sigma_i\}) = \frac{f(\{\sigma_i\})}{Z^0} \prod_{j \in \partial T(r)} \nu_j^0(\sigma_j)$$

$$\text{où } f(\{\sigma_i\}) = \exp(\beta \sum_{\langle i,j \rangle \in E_r} \sigma_i \sigma_j + \sum_{i \in V_{r-1}} B_i \sigma_i)$$

et où Z^+ et Z^0 sont les constantes de normalisation adaptées.

On pose $f_{\min} = e^{-(\beta_{\max} + B_{\max})|T(r)|}$ et $f_{\max} = e^{(\beta_{\max} + B_{\max})|T(r)|}$.

Pour tout $\{\sigma_i\}_{i \in V_r}$, $f_{\min} \leq f(\{\sigma_i\}) \leq f_{\max}$.

On peut déduire de ces remarques l'inégalité suivante :

$$\|\mu_{T(r)}^{l,+} - \mu_{T(r)}^{l,0}\|_{VT} \leq \frac{4f_{\max}^2}{f_{\min}^2} \left(\sum_{i \in \partial T(r)} \|\nu_i^+ - \nu_i^0\|_{VT} \right)$$

(pour plus de précisions, on pourra se référer au paragraphe 7.2.1, dans l'annexe)

Si on pose $c = e^{4(\beta_{\max} + B_{\max})}$, on a :

$$\|\mu_{T(r)}^{l,+} - \mu_{T(r)}^{l,0}\|_{VT} \leq 4c^{|T(r)|} \left(\sum_{i \in \partial T(r)} \|\nu_i^+ - \nu_i^0\|_{VT} \right)$$

Il suffit donc de montrer l'existence de A' et λ ne dépendant que de β_{\max} , B_{\min} , B_{\max} et Δ tels que, pour tous l et r , si $T \in \mathcal{T}_{l, B_{\min}}$, pour tout $i \in \partial T(r)$, $\mathbb{E}_{T(r)}(\|\nu_i^+ - \nu_i^0\|_{VT}) \leq A'e^{-\lambda(l-r)}$, ce qui revient à effectuer la preuve dans le cas où $r = 0$ (en prenant comme arbre aléatoire T'_i , qui est conditionnellement indépendant avec nombre moyen d'enfants borné par Δ , et en remplaçant l par $l - r$).

En effet, on aurait alors, pour tout $T \in \mathcal{T}_{l, B_{\min}}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{T(r)}(\|\mu_{T(r)}^{l,+} - \mu_{T(r)}^{l,0}\|_{VT}) &\leq 4A'e^{-\lambda(l-r)} c^{|T(r)|} \times |\partial T(r)| \\ &\leq 4A'e^{-\lambda(l-r)} c^{|T(r)|} |T(r)| \leq 4A'e^{-\lambda(l-r)} (ec)^{|T(r)|} \end{aligned}$$

(puisque $|T(r)| \leq e^{|T(r)|}$)

Et donc :

$$\mathbb{E}(\|\mu_{T(r)}^{l,+} - \mu_{T(r)}^{l,0}\|_{VT}) \leq Ae^{-\lambda(l-r)} \mathbb{E}(C^{|T(r)|})$$

(si on pose $C = ec$ et $A = 4A'$)

Deuxième partie :

Dans cette partie, nous désignerons toujours par $*$ la racine des arbres que nous considérerons. Si T est un arbre aléatoire, n un entier positif et $\{B_i\}$ un champ magnétique sur $T(n)$ (ou, plus généralement, sur un sous-arbre de T contenant $T(n)$), on notera $m_{T, \{B_i\}}^{n,+}$ (resp. $m_{T, \{B_i\}}^{n,0}$) l'aimantation moyenne à la racine, c'est-à-dire la moyenne de σ_* , dans le modèle d'Ising associé à l'arbre $T(n)$ avec température inverse β et champ magnétique $\{B_i\}$, avec conditions au bord positives (resp. libres). Rappelons qu'il s'agit d'un réel appartenant à l'intervalle $[0; 1]$.

Montrons qu'il existe A' et λ ne dépendant que de β_{\max} , B_{\min} , B_{\max} et Δ tels que, pour tout entier $l \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $T \in \mathcal{T}_{l, B_{\min}}$ muni d'un champ magnétique $\{B_i\}$:

$$\mathbb{E}|m_{T, \{B_i\}}^{l,+} - m_{T, \{B_i\}}^{l,0}| = \frac{1}{2} \mathbb{E}|\mu_{\{*\}}^{l,+} - \mu_{\{*\}}^{l,0}|_{VT} \leq A'e^{-\lambda l}$$

Introduisons la notion de corrélation : si i et j sont deux sommets d'un arbre T , on appelle **corrélation de i et j sur T avec champ magnétique $\{B_k\}$** le réel $\langle \sigma_i; \sigma_j \rangle_{T, \{B_k\}}$ défini de la manière suivante :

$$\langle \sigma_i; \sigma_j \rangle_{T, \{B_k\}} = \langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{\mu_T} - \langle \sigma_i \rangle_{\mu_T} \langle \sigma_j \rangle_{\mu_T}$$

(μ_T désignant la loi d'Ising sur T avec température inverse β et champ magnétique $\{B_k\}$)

La notion de corrélation nous sera utile dans la mesure où, si T est un élément de $\mathcal{T}_{l, B_<}$ pour un certain $l \in \mathbb{N}$ et un certain $B_< > 0$, les deux quantités $m_{T, \{B_i\}}^{l,+} - m_{T, \{B_i\}}^{l,0}$ et $\sum_{i \in \partial T(l)} \langle \sigma_*; \sigma_i \rangle_{T(l), \{B_i\}}$

sont fortement liées :

D'une part,

$$m_{T, \{B_i\}}^{l,+} - m_{T, \{B_i\}}^{l,0} \leq \sum_{i \in \partial T(l)} \langle \sigma_*; \sigma_i \rangle_{T(l), \{B_i\}}$$

D'autre part, si on note $B'_k = B_k$ pour k n'appartenant pas à $\partial T(l)$ et $B'_k = B_k - \frac{B_{\min}}{2}$ sinon, on a :

$$\sum_{i \in \partial T(l)} \langle \sigma_*; \sigma_i \rangle_{T(l), \{B_i\}} \leq \frac{2}{B_{\min}} (m_{T, \{B'_i\}}^{l,+} - m_{T, \{B'_i\}}^{l,0})$$

Pour la démonstration de ces inégalités, on pourra se référer au paragraphe 7.2.2 de l'annexe.

D'après la première de ces deux inégalités, il suffit de démontrer qu'il existe A' et λ dépendant de β_{\max} , B_{\min} , B_{\max} et Δ tels que, pour tout l et pour tout $T \in \mathcal{T}_{l, B_{\min}}$:

$$\mathbb{E} \left(\sum_{i \in \partial T(l)} \langle \sigma_*; \sigma_i \rangle_{T(l), \{B_i\}} \right) \leq A' e^{-\lambda l}$$

Les deux lemmes suivants vont nous permettre d'effectuer cette démonstration :

Lemme 3.3.3 *Il existe une fonction $c : \mathbb{R}^{+2} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ (croissante en chacune de ses deux variables) telle que, pour tout arbre aléatoire T muni d'un champ magnétique $\{B_i\}$ et tout $k \geq 0$, la propriété suivante soit vraie :*

Si s est un sommet de $\partial T(k)$ et si $\langle i, j \rangle$ est une arête de $T(k)$ se trouvant sur le chemin reliant la racine $$ et le sommet s (avec i plus proche de $*$ que de s), et si on note t l'entier tel que i appartient à $\partial T(t)$, alors :*

$$\langle \sigma_*; \sigma_s \rangle_{T(k), \{B_i\}} \leq c(\beta, B_i) \langle \sigma_*; \sigma_i \rangle_{T(t), \{B_i\}} \langle \sigma_j; \sigma_s \rangle_{T'_j(k-t-1), \{B_i\}}$$

(où T'_j est le sous-arbre de T constitué de j et de tous ses descendants, avec racine en j)

Lemme 3.3.4 *Pour tout $B_< > 0$, il existe $(\gamma_{B_<, n})_{(n \in \mathbb{N})}$ une suite de réels ne dépendant que de $B_<$ et de β_{\max} , convergeant vers 0, telle que, pour tout $l \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $T \in \mathcal{T}_{l, B_<}$:*

$$|m_{T, \{B_i\}}^{l,+} - m_{T, \{B_i\}}^{l,0}| \leq \gamma_{B_<, l}$$

Pour les démonstrations, on pourra se référer aux paragraphes 7.2.3 et 7.2.4.

Notons $S_l = \sup_{T \in \mathcal{T}_{l, B_{\min}}} \mathbb{E} \left(\sum_{i \in \partial T(l)} \langle \sigma_*; \sigma_i \rangle_{T(l), \{B_i\}} \right)$.

Comme $\sum_{i \in \partial T(l)} \langle \sigma_*; \sigma_i \rangle_{T(l), \{B_i\}} \leq \frac{2}{B_{\min}} (m_{T, \{B_i'\}}^{l,+} - m_{T, \{B_i'\}}^{l,0}) \leq \frac{2}{B_{\min}}$, $S_l \leq \frac{2}{B_{\min}} < +\infty$ pour tout $l \in \mathbb{N}$.

Soient l_1 et l_2 deux entiers strictement positifs. Montrons que $S_{l_1+l_2} \leq \Delta c(\beta_{\max}, B_{\max}) S_{l_1} S_{l_2-1}$. Soit $T \in \mathcal{T}_{l, B_{\min}}$ quelconque, muni d'un champ magnétique $\{B_i\}$.

Pour tout $i \in \partial T(l_1 + l_2)$, on note j_i le sommet de $\partial T(l_1)$ qui se trouve sur le chemin reliant $*$ à i , et \tilde{j}_i l'enfant de j_i qui se trouve sur ce même chemin. On note, pour tout sommet j de T , T'_j le sous-arbre de T constitué de j et de tous ses descendants, avec racine en j .

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \partial T(l_1+l_2)} \langle \sigma_*; \sigma_i \rangle_{T(l_1+l_2), \{B_i\}} &\leq \sum_{i \in \partial T(l_1+l_2)} c(\beta, B_{j_i}) \langle \sigma_*; \sigma_{j_i} \rangle_{T(l_1), \{B_i\}} \langle \sigma_{\tilde{j}_i}; \sigma_i \rangle_{T'_{\tilde{j}_i}(l_2-1), \{B_i\}} \\ &\text{(d'après le lemme 3.3.3)} \\ &\leq \sum_{i \in \partial T(l_1+l_2)} c(\beta_{\max}, B_{\max}) \langle \sigma_*; \sigma_{j_i} \rangle_{T(l_1), \{B_i\}} \langle \sigma_{\tilde{j}_i}; \sigma_i \rangle_{T'_{\tilde{j}_i}(l_2-1), \{B_i\}} \\ &\text{(puisque } c \text{ est croissante)} \\ &= c(\beta_{\max}, B_{\max}) \sum_{y \in \partial T(l_1)} (\langle \sigma_*; \sigma_y \rangle_{T(l_1), \{B_i\}} \\ &\quad \times \sum_{\substack{z \in \\ \partial y \cap \partial T(l_1+1)}} \sum_{i \in \partial T'_z(l_2-1)} \langle \sigma_z; \sigma_i \rangle_{T'_z(l_2-1), \{B_i\}}) \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{T(l_1+1)} \left(\sum_{i \in \partial T(l_1+l_2)} \langle \sigma_*; \sigma_i \rangle_{T(l_1+l_2), \{B_i\}} \right) &\leq c(\beta_{\max}, B_{\max}) \sum_{y \in \partial T(l_1)} (\langle \sigma_*; \sigma_y \rangle_{T(l_1), \{B_i\}} \\ &\quad \times \sum_{\substack{z \in \\ \partial y \cap \partial T(l_1+1)}} \mathbb{E}_{T(l_1+1)} \left(\sum_{i \in \partial \tilde{T}_z(l_2-1)} \langle \sigma_z; \sigma_i \rangle_{\tilde{T}_z(l_2-1), \{B_i\}} \right)) \\ &\leq c(\beta_{\max}, B_{\max}) \sum_{y \in \partial T(l_1)} (\langle \sigma_*; \sigma_y \rangle_{T(l_1), \{B_i\}} \times \sum_{\substack{z \in \\ \partial y \cap \partial T(l_1+1)}} S_{l_2-1}) \\ &= c(\beta_{\max}, B_{\max}) S_{l_2-1} \sum_{y \in \partial T(l_1)} (\langle \sigma_*; \sigma_y \rangle_{T(l_1), \{B_i\}} \times \Delta_y) \end{aligned}$$

(où Δ_y désigne le nombre d'enfants de y)

(En effet, $\mathbb{E}_{T(l_1+1)} \left(\sum_{i \in \partial \tilde{T}_z(l_2-1)} \langle \sigma_z; \sigma_i \rangle_{\tilde{T}_z(l_2-1), \{B_i\}} \right) \leq S_{l_2-1}$, puisque, si $T(l_1 + 1)$ est fixé

et si $z \in \partial T(l_1 + 1)$, l'arbre aléatoire \tilde{T}_z appartient à $\mathcal{T}_{l_2-1, B_{\min}}$.)

Or, comme $\mathbb{E}_{T(l_1)}(\Delta_y) \leq \Delta$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\sum_{i \in \partial T(l_1+l_2)} \langle \sigma_*; \sigma_i \rangle_{T(l_1+l_2), \{B_i\}}\right) &\leq c(\beta_{\max}, B_{\max}) S_{l_2-1} \Delta \mathbb{E}\left(\sum_{y \in \partial T(l_1)} \langle \sigma_*; \sigma_y \rangle_{T(l_1), \{B_i\}}\right) \\ &\leq \Delta c(\beta_{\max}, B_{\max}) S_{l_2-1} S_{l_1} \end{aligned}$$

Cette inégalité étant vraie pour tout $T \in \mathcal{T}_{l, B_{\min}}$, le résultat annoncé est démontré :

$$S_{l_1+l_2} \leq \Delta c(\beta_{\max}, B_{\max}) S_{l_1} S_{l_2-1}$$

Cette inégalité nous suffit pour établir la décroissance exponentielle de S_l , ce qui est le résultat voulu.

Soit $(\gamma_{\frac{B_{\min}}{2}, n})_{(n \in \mathbb{N})}$ la suite de réels dont le lemme 3.3.4 affirme l'existence.

On a vu que, pour tout $l \in \mathbb{N}$ et tout $T \in \mathcal{T}_{l, B_{\min}}$, muni d'un champ magnétique $\{B_i\}$, $\sum_{i \in \partial T(l)} \langle \sigma_*; \sigma_i \rangle_{T(l), \{B_i\}} \leq \frac{2}{B_{\min}} (m_{T, \{B'_i\}}^{l,+} - m_{T, \{B'_i\}}^{l,0})$, où $\{B'_i\}$ est défini comme précédemment. On a donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\sum_{i \in \partial T(l)} \langle \sigma_*; \sigma_i \rangle_{T(l), \{B_i\}}\right) &\leq \mathbb{E}\left(\frac{2}{B_{\min}} (m_{T, \{B'_i\}}^{l,+} - m_{T, \{B'_i\}}^{l,0})\right) \\ &\leq \frac{2}{B_{\min}} \gamma_{\frac{B_{\min}}{2}, l} \end{aligned}$$

Donc, pour tout $l_2 \in \mathbb{N}^*$, $S_{l_2-1} \leq \frac{2}{B_{\min}} \gamma_{\frac{B_{\min}}{2}, l_2-1}$ et :

$$\lim_{l_2 \rightarrow +\infty} S_{l_2-1} = 0$$

Soit alors L_2 un entier strictement positif tel que $S_{L_2-1} \leq \frac{1}{2\Delta c(\beta_{\max}, B_{\max})}$.

On a alors :

$$S_{l_1+L_2} \leq \frac{S_{l_1}}{2}$$

Pour tout $l \in \mathbb{N}$, on note $l = kL_2 + r$, où r est le reste de l dans la division par L_2 . Par récurrence sur k :

$$S_l \leq \frac{S_r}{2^k} \leq \frac{2}{B_{\min}} \frac{1}{2^k}$$

(puisque l'on a vu que $S_l \leq \frac{2}{B_{\min}}$ pour tout $l \in \mathbb{N}$)

Comme $k \geq \frac{l}{L_2} - 1$, on a :

$$S_l \leq \frac{4}{B_{\min}} \frac{1}{2^{l/L_2}} = A' e^{-\lambda l}$$

(si on pose $A' = \frac{4}{B_{\min}}$ et $\lambda = \frac{\ln 2}{L_2}$)

Le théorème est donc démontré.

□

Corollaire 3.3.5 Soit $\Delta > 0$. Soient $0 < B_{\min} \leq B_{\max}$ et $\beta_{\max} \geq 0$. Soient $r, l \in \mathbb{N}$, avec $l > r$. Soit $T_0 = (V, E)$ un arbre (non aléatoire) de degré maximal inférieur ou égal à Δ et $\{B_i\}_{i \in V}$ un ensemble de constantes positives. Il existe A et λ dépendant uniquement de β_{\max} , B_{\min} , B_{\max} et Δ , et C dépendant uniquement de β_{\max} et B_{\max} tels que, si $B_i \leq B_{\max}$ pour tout $i \in T_0(l-1)$ et $B_i \geq B_{\min}$ pour tout $i \in T_0(l)$, alors, pour tout $\beta \leq \beta_{\max}$:

$$\|\mu_{T(r)}^{l,+} - \mu_{T(r)}^{l,0}\|_{VT} \leq Ae^{-\lambda(l-r)}C^{|T(r)|}$$

Démonstration :

Il suffit d'appliquer le théorème précédent pour un arbre aléatoire T égal à T_0 avec probabilité 1.

3.4 Approximation des marginales

L'objet de cette dernière sous-partie est l'énoncé et la démonstration des deux résultats principaux, qui fournissent un moyen de calculer de façon approximative les marginales des lois d'Ising sur un graphe, par un procédé qui, si le graphe s'avère être un arbre, donne des résultats exacts.

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Si on a choisi une température inverse β et un champ magnétique B , alors pour toute arête $\langle i, j \rangle$ de G , pour tout $l \in \mathbb{N}$, on peut définir de la façon suivante une mesure de probabilité $\nu_{i \rightarrow j}^{(l)}$ sur l'ensemble $\{-1; +1\}$:

On fixe des valeurs initiales $\nu_{i \rightarrow j}^{(0)}$.

On définit par récurrence, pour tout $l \in \mathbb{N}$, pour tout $\sigma_i \in \{-1; +1\}$:

$$\nu_{i \rightarrow j}^{(l+1)}(\{\sigma_i\}) = \frac{1}{z_{i \rightarrow j}^{(l)}} e^{B\sigma_i} \prod_{l \in \partial i \setminus j} \sum_{\sigma_l \in \{-1; +1\}} e^{\beta\sigma_i\sigma_l} \nu_{l \rightarrow i}^{(l)}(\sigma_l) \quad (1)$$

où $z_{i \rightarrow j}^{(l)}$ est la constante de normalisation

(c'est-à-dire un réel choisi de façon à ce que $\nu_{i \rightarrow j}^{(l+1)}(\{-1\}) + \nu_{i \rightarrow j}^{(l+1)}(\{+1\}) = 1$)

On appellera $\nu_{i \rightarrow j}^{(l)}$ le message envoyé par i à j au temps l .

Si $\nu_{i \rightarrow j}^{(0)}(\{+1\}) \geq \nu_{i \rightarrow j}^{(0)}(\{-1\})$, on dira que les messages ont été **initialisés positivement**.

Théorème 3.4.1 Soient $\beta \geq 0$, $B > 0$ et $\Delta \in \mathbb{N}$. Il existe A et λ des réels positifs tels que, pour tout graphe $G = (V, E)$ de degré maximal Δ , il existe un ensemble de mesures de probabilité sur $\{-1; +1\}$, $\{\nu_{i \rightarrow j}^*\}_{\langle i, j \rangle \in E}$ qui est un point fixe de l'équation (1) vérifiant que, pour toute série de messages initialisés positivement :

$$\sup_{\langle i, j \rangle \in E} \|\nu_{i \rightarrow j}^{(t)} - \nu_{i \rightarrow j}^*\|_{VT} \leq Ae^{-\lambda t}$$

pour tout $t \in \mathbb{N}$

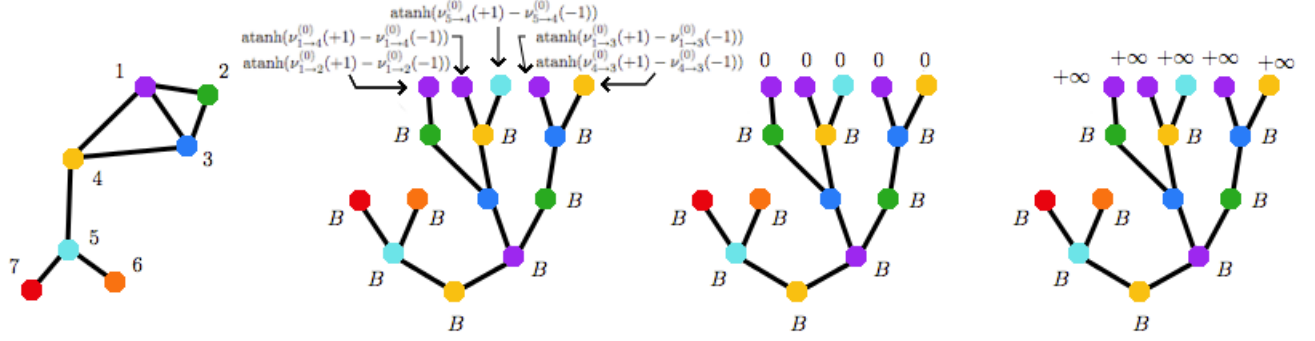


FIG. 5 – A gauche, le graphe G , puis les arbres associés à $\nu_{4 \rightarrow 3}^{(4)}$ avec le champ magnétique correspondant à chaque sommet pour des initialisations respectivement quelconque, uniforme ($\nu_{r \rightarrow s}^{(0)}(+1) = \frac{1}{2}$) et totale ($\nu_{r \rightarrow s}^{(0)}(+1) = 1$)

Démonstration :

Soit pour toute la démonstration $G = (V, E)$ un graphe de degré maximal Δ et $\langle i, j \rangle$ une arête fixée de ce graphe.

Introduisons la notion d'**arbre de calcul**. L'arbre de calcul du graphe G est l'arbre obtenu en "dépliant" G , ainsi que le montre la figure 4. Chaque sommet de l'arbre de calcul est le sosie d'un sommet k du graphe G et il est relié par une arête à un sosie de chaque sommet voisin de k dans le graphe G .

Les messages peuvent s'interpréter comme la marginale à la racine d'une loi d'Ising sur une portion de l'arbre de calcul : soit l un entier. Soit T l'arbre de calcul associé à G ayant pour racine un sosie i^* du sommet i et privé du sosie du sommet j issu de la racine ainsi que de tous les descendants de celui-ci (voir figure 5). On note $T(l) = (V^*, E^*)$. Pour tout $k \in V^*$, on pose :

$$B_k = B \text{ si } k \text{ n'appartient pas à } \partial T(l)$$

$$B_k = \text{atanh}(\nu_{r \rightarrow s}^{(0)}(+1) - \nu_{r \rightarrow s}^{(0)}(-1)) \text{ si } k \text{ appartient à } \partial T(l)$$

(où r est le sommet de G dont k est le sosie
et s le sommet de G dont le parent de k est le sosie)

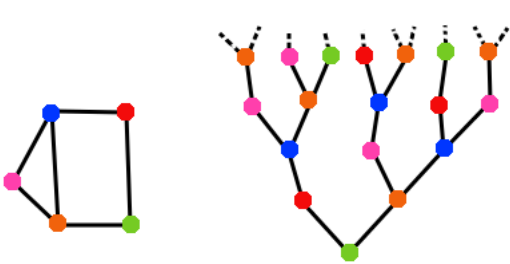


FIG. 4 – A gauche, le graphe G et à droite, l'arbre de calcul associé

Avec ces définitions, $\nu_{i \rightarrow j}^{(l)}$ est la marginale sur $\{i^*\}$ de la loi d'Ising associée à l'arbre $T(l)$, à la température inverse β et au champ magnétique $\{B_k\}$. La démonstration peut s'effectuer par récurrence sur l .

On remarque qu'on a $B_k = 0$ pour tout $k \in \partial T(l)$ si $\nu_{r \rightarrow s}^{(0)}(+1) = \frac{1}{2}$ pour tous r et s et $B_k = +\infty$ si $\nu_{r \rightarrow s}^{(0)}(+1) = 1$ pour tous r et s .

On note $\{\nu_{r \rightarrow s}^{(l), 0}\}$ (resp. $\{\nu_{r \rightarrow s}^{(l), +}\}$) les séries de messages obtenues avec les conditions initiales $\nu_{r \rightarrow s}^{(0)}(+1) = \frac{1}{2}$ (resp. $\nu_{r \rightarrow s}^{(0)}(+1) = 1$). Si $\{\nu_{r \rightarrow s}^{(l)}\}$ est une série de messages avec initialisation positive, alors pour tout l :

$$\nu_{i \rightarrow j}^{(l),0}(+1) \leq \nu_{i \rightarrow j}^{(l)}(+1) \leq \nu_{i \rightarrow j}^{(l),+}(+1)$$

En effet, d'après l'inégalité de Griffiths (3.2.1) pour $G = G' = T(l)$ et $U = \{i^*\}$, puisque $0 \leq \operatorname{atanh}(\nu_{r \rightarrow s}^{(0)}(+1) - \nu_{r \rightarrow s}^{(0)}(-1)) \leq +\infty$ pour tous r et s , on a :

$$\nu_{i \rightarrow j}^{(l),0}(+1) - \nu_{i \rightarrow j}^{(l),0}(-1) \leq \nu_{i \rightarrow j}^{(l)}(+1) - \nu_{i \rightarrow j}^{(l)}(-1) \leq \nu_{i \rightarrow j}^{(l),+}(+1) - \nu_{i \rightarrow j}^{(l),+}(-1)$$

donc, en utilisant l'égalité $\nu_{i \rightarrow j}(-1) = 1 - \nu_{i \rightarrow j}(+1)$, on en déduit :

$$\nu_{i \rightarrow j}^{(l),0}(+1) \leq \nu_{i \rightarrow j}^{(l)}(+1) \leq \nu_{i \rightarrow j}^{(l),+}(+1)$$

Il suffit maintenant d'étudier la convergence des suites $(\nu_{i \rightarrow j}^{(l),0}(+1))_l$ et $(\nu_{i \rightarrow j}^{(l),+}(+1))_l$. Nous montrerons notamment que ces deux suites sont adjacentes. Dans ce but, nous les comparerons aux lois d'Ising sur $T(l)$ avec conditions au bord libres et positives.

Nous avons vu que $\nu_{i \rightarrow j}^{(l+1),0}$ était la marginale d'un modèle d'Ising sur $T(l+1)$ avec un champ magnétique valant B en tous les sommets qui appartiennent aussi à $T(l)$. D'après le lemme 3.3.1, il s'agit donc aussi de la marginale d'un modèle d'Ising sur $T(l)$ avec un champ magnétique valant B en tous les sommets qui appartiennent à $T(l-1)$ et ayant des composantes plus grandes que B (donc plus grandes que 0) en tous les sommets de $\partial T(l)$.

D'après l'inégalité de Griffiths on en déduit comme précédemment que :

$$\nu_{i \rightarrow j}^{(l),0}(+1) \leq \mu_{\{i^*\}}^{l,0}(+1) \leq \nu_{i \rightarrow j}^{(l+1),0}(+1)$$

(où $\mu_{\{i^*\}}^{l,0}$ est la marginale sur $\{i^*\}$ de la loi d'Ising associée à β et B avec conditions au bord libres sur $T(l)$)

(donc la première suite est croissante)

On a, de la même façon :

$$\nu_{i \rightarrow j}^{(l),+}(+1) \geq \nu_{i \rightarrow j}^{(l+1),+}(+1)$$

(donc la deuxième suite est décroissante)

On a de plus $\mu_{\{i^*\}}^{(l,+)}(+1) = \nu_{i \rightarrow j}^{(l),+}(+1)$.

Nous avons donc obtenu les inégalités suivantes :

$$\mu_{\{i^*\}}^{l,0}(+1) \leq \nu_{i \rightarrow j}^{(l+1),0}(+1) \leq \nu_{i \rightarrow j}^{(l+1),+}(+1) \leq \nu_{i \rightarrow j}^{(l),+}(+1) = \mu_{\{i^*\}}^{(l,+)}(+1)$$

Comme le degré maximal de T est borné par le degré maximal de G , soit Δ , d'après le corollaire (3.3.5) du théorème 3.3.2 (pour $r = 0$, $B_{\min} = B_{\max} = B$ et $\beta_{\max} = \beta$), il existe \tilde{A} et λ dépendant seulement de β , B et Δ tels que :

$$|\mu_{\{i^*\}}^{l,+}(+1) - \mu_{\{i^*\}}^{l,0}(+1)| = \|\mu_{\{i^*\}}^{l,+} - \mu_{\{i^*\}}^{l,0}\|_{VT} \leq \tilde{A}e^{-\lambda}$$

Donc $|\nu_{i \rightarrow j}^{(l+1),+}(+1) - \nu_{i \rightarrow j}^{(l+1),0}(+1)| \leq \tilde{A}e^{-\lambda}$ et il existe A dépendant seulement de β , B et Δ tel que :

$$|\nu_{i \rightarrow j}^{(l),+}(+1) - \nu_{i \rightarrow j}^{(l),0}(+1)| \leq Ae^{-\lambda}$$

Les deux suites $(\nu_{i \rightarrow j}^{(l),0}(+1))_t$ et $(\nu_{i \rightarrow j}^{(l),+}(+1))_t$ sont donc adjacentes et convergent vers la même limite $\nu_{i \rightarrow j}^*$. De plus, l'inégalité précédente nous permet de majorer la vitesse de convergence :

$$\|\nu_{i \rightarrow j}^{(l)} - \nu_{i \rightarrow j}^*\|_{VT} = |\nu_{i \rightarrow j}^{(l)}(+1) - \nu_{i \rightarrow j}^*(+1)| \leq |\nu_{i \rightarrow j}^{(l),+}(+1) - \nu_{i \rightarrow j}^{(l),0}(+1)| \leq Ae^{-\lambda t}$$

ce qui est le résultat voulu.

Par passage à la limite, on montre que ν^* est bien un point fixe de (1). □

D'après le théorème précédent, les messages, qu'on peut facilement calculer par récurrence, convergent exponentiellement vers une certaine limite. Lorsque le graphe est un arbre fini, on voit, grâce à l'interprétation que nous avons donné des messages, que cette limite est l'ensemble des marginales du modèle d'Ising sur l'arbre fini. Le théorème suivant nous montre que, même lorsque le graphe n'est pas un arbre, la limite peut constituer une bonne approximation de cet ensemble.

Théorème 3.4.2 *Soit $\Delta \in \mathbb{N}$. Soient $G = (V, E)$ un graphe de degré maximal Δ , β et B des réels positifs. Soient $r \in \mathbb{N}^*$ et $i^* \in V$. Soient $U = (V_U, E_U) = B_{G,i^*}(r)$ et ∂U sa frontière dans G . Pour tout $i \in \partial U$, fixons j_i un élément de V_U voisin de i . On définit une mesure ν_U sur l'ensemble des configurations de U :*

$$\nu_U(\{\sigma_i\}_{i \in V_U}) = \frac{1}{z_U} \exp(\beta \sum_{\langle i,j \rangle \in E_U} \sigma_i \sigma_j + B \sum_{i \in U \setminus \partial U} \sigma_i) \prod_{i \in \partial U} \nu_{i \rightarrow j_i}^*(\sigma_i)$$

(où $\{\nu_{i \rightarrow j}^*\}$ est l'ensemble de mesures dont le théorème 3.4.1 indique l'existence)

Soient μ la mesure d'Ising associée au graphe G avec température inverse β et champ magnétique B et μ_U sa marginale sur U . Il existe c et λ des constantes positives ne dépendant que de β , B et Δ telles que, pour tout $t \in \mathbb{N}$, si $B_{G,i^*}(t)$ est un arbre :

$$\|\mu_U - \nu_U\|_{VT} \leq \exp(c^{r+1} - \lambda(t - r))$$

Démonstration :

Quels que soient c et λ positifs,

$$\|\mu_U - \nu_U\|_{VT} \leq 1 \leq \exp(c^{r+1} - \lambda(t - r))$$

si $t \leq r$. Il suffit donc de considérer le cas où $t > r$.

Le principe de la démonstration sera de montrer que ν_U est une loi d'Ising sur un certain graphe pour un champ magnétique convenable, d'encadrer ν_U et μ_U par deux lois d'Ising "de référence" dont on pourra majorer la distance de l'une à l'autre grâce au théorème 3.3.2 et d'en déduire une majoration de $\|\mu_U - \nu_U\|_{VT}$.

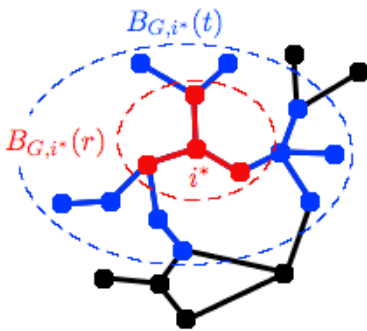


FIG. 6 – Le graphe G

Soit T' l'arbre de calcul associé au graphe G ayant pour racine un sosie de i^* . Puisque $B_{G,i^*}(t)$ est un arbre, $T'(t) \approx B_{G,i^*}(t)$. et $T'(r) \approx B_{G,i^*}(r)$. On note $T = T'(t + 1)$ (voir figure 7).

Pour tout $k \in \partial T(r)$, on note \tilde{T}_k le sous-arbre de T constitué du sommet k et de tous ses descendants.

Puisque $\{\nu_{i \rightarrow j}^*\}$ est un point fixe de l'équation (1), si on note $\{\nu_{i \rightarrow j}^{(l)}\}$ la série de messages ayant comme conditions initiales $\nu_{i \rightarrow j}^{(0)} = \nu_{i \rightarrow j}^*$, alors pour toute arête $\langle i, j \rangle$ de G et pour tout $l \in \mathbb{N}$, alors $\nu_{i \rightarrow j}^{(l)} = \nu_{i \rightarrow j}^*$. Cette égalité est vraie en particulier pour $l = t - r + 1$. Comme on l'a vu au début de la démonstration du théorème 3.4.1, $\nu_{k \rightarrow j_k}^*$ est donc la marginale sur $\{k\}$ de la loi d'Ising sur \tilde{T}_k associée à la température inverse β , avec un champ magnétique dont toutes les composantes valent B , sauf celles correspondant à des sommets qui ne sont pas dans $T(t)$ (qu'on note alors \tilde{B}_s , comme sur la figure 7).

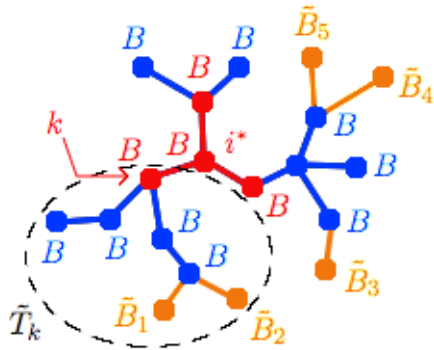


FIG. 7 – L'arbre T

Introduisons maintenant les deux lois “de référence” qui nous permettront d'encadrer ν_U et μ_U :

- μ^+ est la loi d'Ising associée au graphe G , à la température inverse β et au champ magnétique dont les composantes correspondant aux sommets de $B_{G,i^*}(t)$ valent B et les autres composantes valent $+\infty$ et μ_U^+ est sa marginale sur U

- μ^0 est la loi d'Ising associée au graphe G privé de toutes les arêtes qui n'appartiennent pas à $B_{G,i^*}(t)$, pour une température inverse β et un champ magnétique B et μ_U^0 est sa marginale sur U

La figure 8 résume les interprétations des quatre lois étudiées (ν_U , μ_U , μ_U^+ et μ_U^0).

D'après l'inégalité de Griffiths (3.2.1), on a les deux inégalités suivantes, pour tout $F \subset V_U$:

$$\langle \prod_{i \in F} \sigma_i \rangle_{\mu_U^0} \leq \langle \prod_{i \in F} \sigma_i \rangle_{\mu_U} \leq \langle \prod_{i \in F} \sigma_i \rangle_{\mu_U^+}$$

On vérifie alors que ν_U est la marginale sur $T(r)$ de la loi d'Ising sur T , pour un champ magnétique dont toutes les composantes valent B , sauf celles associées aux sommets s de $\partial T(t+1)$ qui valent \tilde{B}_s .

D'après le lemme 3.3.1, ν_U est la marginale sur $T(r)$ de la loi d'Ising sur $T(t)$ associée à la température inverse β et à un certain champ magnétique $\{B'_i\}_{(i \in T(t))}$ qui est tel que $B'_i = B$ si i est un sommet de $T(t-1)$ et $B'_i \geq B$ si i n'est pas un sommet de $T(t-1)$.

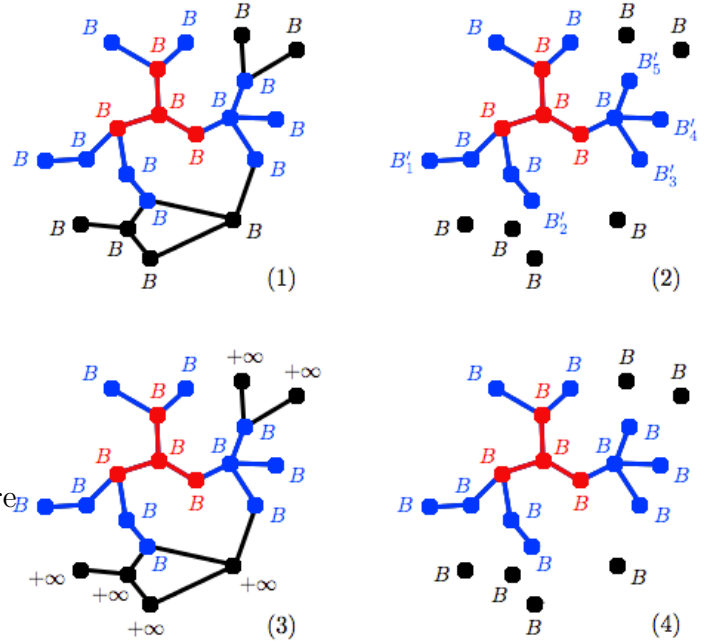


FIG. 8 – Les modèles d'Ising correspondant aux lois μ_U (1), ν_U (2), μ_U^+ (3) et μ_U^0 (4)

$$\langle \prod_{i \in F} \sigma_i \rangle_{\nu_U^0} \leq \langle \prod_{i \in F} \sigma_i \rangle_{\mu_U} \leq \langle \prod_{i \in F} \sigma_i \rangle_{\mu_U^+}$$

Utilisons ces inégalités pour majorer $\|\mu_U - \nu_U\|_{VT}$ en fonction de $\|\mu_U^+ - \mu_U^0\|_{VT}$:
 Pour toute configuration $\{\sigma_i\} \in \{-1; +1\}^{V_U}$, on a :

$$\mathbb{I}(\sigma'_i = \sigma_i \forall i \in V_U) = 2^{-|U|} \prod_{i \in V_U} (1 + \sigma_i \sigma'_i) = 2^{-|U|} \sum_{F \subset V_U} \left(\prod_{i \in F} \sigma'_i \prod_{i \in F} \sigma_i \right)$$

donc :

$$\begin{aligned} |\langle \mathbb{I}(\sigma'_i = \sigma_i \forall i) \rangle_{\mu_U} - \langle \mathbb{I}(\sigma'_i = \sigma_i \forall i) \rangle_{\nu_U}| &= 2^{-|U|} \left| \sum_{F \subset V_U} \left(\prod_{i \in F} \sigma'_i \left(\langle \prod_{i \in F} \sigma_i \rangle_{\mu_U} - \langle \prod_{i \in F} \sigma_i \rangle_{\nu_U} \right) \right) \right| \\ &\leq 2^{-|U|} \sum_{F \subset U} \left| \langle \prod_{i \in F} \sigma_i \rangle_{\mu_U} - \langle \prod_{i \in F} \sigma_i \rangle_{\nu_U} \right| \\ &\leq 2 \|\mu_U^+ - \mu_U^0\|_{VT} \end{aligned}$$

(puisque :

$$\begin{aligned} \left| \langle \prod_{i \in F} \sigma_i \rangle_{\mu_U} - \langle \prod_{i \in F} \sigma_i \rangle_{\nu_U} \right| &\leq \left| \langle \prod_{i \in F} \sigma_i \rangle_{\mu_U^+} - \langle \prod_{i \in F} \sigma_i \rangle_{\mu_U^0} \right| \\ &= \left| \sum_{\{\sigma_i\} \in \{-1; +1\}^{V_U}} (\mu_U^+(\{\sigma_i\}) - \mu_U^0(\{\sigma_i\})) \left(\prod_{i \in F} \sigma_i \right) \right| \\ &\leq \sum_{\{\sigma_i\} \in \{-1; +1\}^{V_U}} |\mu_U^+(\{\sigma_i\}) - \mu_U^0(\{\sigma_i\})| \\ &= 2 \|\mu^+ - \mu^0\|_{VT} \end{aligned}$$

pour tout $F \subset V_U$)

$$\begin{aligned} \|\mu_U - \nu_U\|_{VT} &= \frac{1}{2} \sum_{\{\sigma'_i\} \in \{-1; +1\}^{|U|}} |\mu_U(\{\sigma'_i\}) - \nu_U(\{\sigma'_i\})| \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\{\sigma'_i\} \in \{-1; +1\}^{|U|}} |\langle \mathbb{I}(\sigma'_i = \sigma_i \forall i) \rangle_{\mu_U} - \langle \mathbb{I}(\sigma'_i = \sigma_i \forall i) \rangle_{\nu_U}| \\ &\leq 2^{|U|} \|\mu_U^+ - \mu_U^0\|_{VT} \end{aligned}$$

Il faut maintenant majorer $\|\mu_U^+ - \mu_U^0\|_{VT}$ en utilisant le théorème 3.3.2. Malheureusement, les lois μ_U^+ et μ_U^0 ne vérifient pas tout à fait les hypothèses de ce théorème, et il nous faut alors introduire une autre loi, $\tilde{\mu}^+$, qui est la loi d'Ising associée au graphe $T(t)$, à la température inverse β et au champ B pour des conditions au bord positives. En remarquant (à l'aide du lemme 3.3.1) que μ_U^+ est la marginale sur U de la loi d'Ising associée au graphe $T(t)$ muni d'un

champ magnétique convenable pour des conditions au bord libres et en utilisant le fait que $\|\mu_U^+ - \mu_U^0\|_{VT} \leq \|\mu_U^+ - \tilde{\mu}_U^+\|_{VT} + \|\tilde{\mu}_U^+ - \mu_U^0\|_{VT}$, on trouve :

$$\|\mu_U^+ - \mu_U^0\|_{VT} \leq A'e^{-\lambda(t-r)}C^{|U|}$$

pour des constantes A' , λ et C ne dépendant que de β , B et Δ .

On a donc :

$$\|\mu_U - \nu_U\|_{VT} \leq A'(2C)^{|U|} \exp(-\lambda(t-r))$$

et comme $|U| \leq \Delta^r + 1$, il existe une constante D ne dépendant que de β , B et Δ telle que :

$$\|\mu_U - \nu_U\|_{VT} \leq \exp(D + \ln(2C)\Delta^r) \exp(-\lambda(t-r))$$

Il existe donc c et λ ne dépendant que de β , B et Δ telles que :

$$\|\mu_U - \nu_U\| \leq \exp(c^{r+1} - \lambda(t-r))$$

□

4 Méthode de Monte-Carlo

Le but de cette courte section est de présenter rapidement une autre méthode, beaucoup plus générale, qui permet de calculer approximativement certaines quantités (en particulier les marginales sur un petit sous-graphe) relatives à des lois d'Ising : la méthode de Monte-Carlo.

Le contenu de ces sections s'inspire de [8] et [4].

4.1 Convergence d'une chaîne de Markov

Soient E un ensemble fini et Q une fonction de transition sur E . Soit $(X_n)_{(n \in \mathbb{N})}$ une chaîne de Markov à images dans E et de fonction de transition Q .

Rappelons les définitions suivantes :

Si $(x, y) \in E^2$, si $n \in \mathbb{N}$, on dit que x et y sont reliés par un **chemin de longueur** n s'il existe z_0, \dots, z_n des éléments de E tels que $z_0 = x$, $z_n = y$ et, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $Q(z_{i-1}, z_i) > 0$.

La chaîne de Markov (X_n) est dite **irréductible** si, pour tout $(x, y) \in E^2$, il existe n tel que x et y sont reliés par un chemin de longueur n .

Elle est dite **apériodique** si, pour tout $(x, y) \in E^2$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, x et y sont reliés par un chemin de longueur n .

On dit qu'une mesure de probabilité sur E est **stationnaire** pour Q si, pour tout $x \in E$:

$$\mu(x) = \sum_{y \in E} \mu(y)Q(y, x)$$

Rappelons également le théorème suivant, dont on trouvera la démonstration dans [6].

Théorème 4.1.1 *Si $(X_n)_{(n \in \mathbb{N})}$ est irréductible et apériodique, alors il existe une unique mesure de probabilité μ sur E stationnaire pour Q .*

De plus, pour tout $x \in E$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = x) = \mu(x)$.

Enfin, pour toute fonction $g : E \rightarrow \mathbb{R}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(X_i) = \sum_{x \in E} \mu(x) f(x)$ presque sûrement.

4.2 Application au modèle d'Ising

Soit μ une loi d'Ising. Supposons que l'on veuille simuler une variable aléatoire de loi μ . C'est à priori difficile, dans la mesure où l'espace d'états (l'ensemble des configurations \mathcal{C}) a un cardinal variant exponentiellement en la taille du graphe considéré, et où le calcul exact de μ elle-même est difficile, puisque μ dépend de la fonction de partition, qui est une somme sur l'ensemble des configurations.

D'après le paragraphe 4.1, si on trouve Q , une fonction de transition sur \mathcal{C} pour laquelle μ est stationnaire, et si on est capable de simuler facilement le comportement d'une variable aléatoire de même loi que X_n , pour n assez grand, alors, à condition que (X_n) soit irréductible et apériodique, on aura une approximation du comportement d'une variable de loi μ .

On supposera que l'ensemble des sommets du graphe sur lequel on a défini une loi d'Ising est l'ensemble $\{1, \dots, N\}$. Notons, pour toute configuration σ et pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, $\sigma^{(i)}$ la configuration telle que $\sigma_i^{(i)} = -\sigma_i$ et $\sigma_j^{(i)} = \sigma_j$ pour tout $j \neq i$.

Un choix naturel pour Q consiste à prendre, pour tout $\sigma \in \mathcal{C}$:

$$Q(\sigma, \sigma^{(i)}) = \frac{1}{N} \frac{e^{-H(\sigma^{(i)})}}{e^{-H(\sigma^{(i)})} + e^{-H(\sigma)}} \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, N\}$$

$$Q(\sigma, \sigma) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{e^{-H(\sigma)}}{e^{-H(\sigma^{(i)})} + e^{-H(\sigma)}}$$

$$Q(\sigma, \sigma') = 0 \text{ si } \sigma' \neq \sigma^{(i)} \text{ pour tout } i \text{ et si } \sigma' \neq \sigma$$

Soit (X_n) une chaîne de Markov associée à cette fonction de transition. On peut vérifier qu'elle est bien irréductible et apériodique. De plus, μ est stationnaire pour Q . D'après le théorème 4.1.1, pour tout $\sigma \in \mathcal{C}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = \sigma) = \mu(\sigma)$, donc, pour n assez grand, X_n sera (approximativement) une variable aléatoire de loi μ .

Le calcul pratique d'une réalisation de X_n est assez simple. On choisit tout d'abord X_0 d'une façon quelconque, puis, pour tout k , si on a déterminé une réalisation σ de X_k , on détermine une réalisation de X_{k+1} ainsi : l'entier i ayant été choisi aléatoirement (avec équiprobabilité sur $\{1, \dots, N\}$), on choisit σ comme réalisation de X_{k+1} avec probabilité $\frac{e^{-H(\sigma^{(i)})}}{e^{-H(\sigma^{(i)})} + e^{-H(\sigma)}}$ et $\sigma^{(i)}$ avec probabilité $\frac{e^{-H(\sigma)}}{e^{-H(\sigma^{(i)})} + e^{-H(\sigma)}}$.

Cet algorithme est dit du **bain thermique** (ou **dynamique de Glauber**), car le calcul d'une réalisation modélise le comportement physique de particules soumises à l'agitation thermique.

Un autre choix pour Q serait de prendre, pour tout $\sigma \in \mathcal{C}$:

$$\begin{aligned}
Q(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}^{(i)}) &= \frac{1}{N} \text{ si } H(\boldsymbol{\sigma}^{(i)}) \leq H(\boldsymbol{\sigma}) \ (\forall i \in \{1, \dots, N\}) \\
Q(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}^{(i)}) &= \frac{1}{N} e^{H(\boldsymbol{\sigma}) - H(\boldsymbol{\sigma}^{(i)})} \text{ si } H(\boldsymbol{\sigma}^{(i)}) > H(\boldsymbol{\sigma}) \\
Q(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}) &= 1 - \sum_{i=1}^N Q(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}^{(i)}) \\
Q(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}') &= 0 \text{ si } \boldsymbol{\sigma}' \neq \boldsymbol{\sigma}^{(i)} \text{ pour tout } i \text{ et si } \boldsymbol{\sigma}' \neq \boldsymbol{\sigma}
\end{aligned}$$

Dans le cas d'un modèle d'Ising sur un graphe, une chaîne de Markov correspondant à cette fonction de transition est bien irréductible et apériodique. De plus, on remarque que $Q(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}')\mu(\boldsymbol{\sigma}) = Q(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\sigma})\mu(\boldsymbol{\sigma}')$ pour toutes configurations $\boldsymbol{\sigma}$ et $\boldsymbol{\sigma}'$, ce qui permet de montrer la stationnarité de μ .

Il s'agit de l'algorithme de **Métropolis**. Comme, pour tout k , la probabilité $\mathbb{P}(X_{k+1} \neq X_k)$ est plus grande avec ce choix de fonction de transition que dans l'algorithme du bain thermique, on peut espérer une convergence plus rapide de la loi de X_n vers la loi μ .

5 Calcul de l'énergie libre par particule

Dans la section 3, nous avons présenté des méthodes permettant de calculer rapidement de façon approximative les marginales de modèles d'Ising sur des graphes. Malheureusement, ces méthodes ne permettent pas d'évaluer l'énergie libre du modèle. Le but de cette section est de remédier à ce manque en expliquant comment calculer l'énergie libre : le principe est de définir par récurrence une suite de variables aléatoires qui converge et dont on peut caractériser la limite comme unique point fixe d'une certaine équation. L'énergie libre par particule s'exprime (de façon exacte) en fonction de cette limite.

Après un paragraphe de définitions, nous définirons la suite de variables aléatoires, montrerons qu'elle converge et caractériserons la limite. Enfin, dans un troisième paragraphe, nous donnerons la fonction de cette limite qui permet de calculer l'énergie libre par particule et la justifierons partiellement.

5.1 Notations et définitions

Soit P une mesure de probabilité sur \mathbb{N} , d'espérance finie. On notera $\bar{P} = \sum_{i=0}^{+\infty} iP(\{i\})$ cette espérance. Soit ρ la mesure de probabilité sur \mathbb{N} telle que :

$$\rho(\{k\}) = \frac{kP(\{k\})}{\sum_{l=1}^{\infty} lP(\{l\})}$$

On suppose que ρ est également d'espérance finie.

On étudiera des graphes qui sont localement des arbres. Il nous faut donc définir des arbres aléatoires auxquels nous pourrions comparer nos graphes.

On note $T_{P,\rho}$ un arbre aléatoire construit ainsi : on relie la racine $*$ à Δ_* enfants, Δ_* étant une variable aléatoire de loi P , puis, à chaque étape, on relie chaque enfant i créé à l'étape précédente à $\Delta_i - 1$ nouveaux sommets, Δ_i étant une variable aléatoire de loi ρ .

On note T_ρ un arbre aléatoire défini de la manière suivante : pour tout $t \geq 0$, $T_\rho(t+1)$ est obtenu en reliant par des arêtes chaque sommet i de $\partial T(t)$ à $\Delta_i - 1$ nouveaux sommets, les Δ_i étant des variables aléatoires indépendantes de loi ρ .

Nous aurons besoin pour les démonstrations de définir un arbre supplémentaire, que nous noterons \tilde{T}_ρ . Il s'agit de l'arbre obtenu en reliant par une arête les racines de deux arbres aléatoires indépendants T_1 et T_2 , de même loi que T_ρ . Lorsqu'on parlera du sommet racine de \tilde{T}_ρ , il s'agira de la racine de T_1 , mais il nous arrivera aussi de parler de l'arête racine de \tilde{T}_ρ , qui sera alors l'arête reliant les racines de T_1 et T_2 . On adaptera, si les circonstances l'exigent, les définitions du paragraphe 2.1 aux arbres dont la racine est une arête et non pas un sommet.

Définissons maintenant plus précisément les graphes "qui sont localement des arbres".

On dit qu'une suite de graphes $(G_n = (V_n, E_n))_{(n \in \mathbb{N}^*)}$ **converge localement vers** $T_{P,\rho}$ si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|V_n| = n$ et si, pour tout $t \in \mathbb{N}$ et pour tout $A \in \mathcal{A}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(B_{G_n, i_n}(t) \in \mathcal{A} \text{ et } B_{G_n, i_n}(t) \approx A) = \mathbb{P}(T_{P,\rho}(t) \approx A)$$

(où i_n est un sommet de G_n tiré aléatoirement avec équiprobabilité entre les sommets)

Remarquons que, si (G_n) converge localement vers $T_{P,\rho}$, alors, pour tout $t \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(B_{G_n, i_n}(t) \notin \mathcal{A}) = 0$$

Remarque : La définition de $T_{P,\rho}$ peut sembler compliquée, mais elle se justifie par le fait que, si (G_n) est une suite de graphes dont les nombres de voisins de chaque sommet sont choisis indépendamment (le plus indépendamment possible) de façon aléatoire selon la loi P , telle que, pour tout t , $\mathbb{P}(B_{G_n, i_n}(t) \notin \mathcal{A}) \rightarrow 0$, ce qui est vrai pour beaucoup des suites de graphes auxquelles on est en pratique amené à s'intéresser, alors (G_n) converge localement vers $T_{P,\rho}$.

On dit qu'une suite de graphes $(G_n = (V_n, E_n))_{(n \in \mathbb{N})}$ est **uniformément épars** s'il existe $(\epsilon(l))_{(l \in \mathbb{N})}$ une suite de réels positifs convergeant vers 0 telle que, pour tout n :

$$\frac{1}{n} \sum_{i \in V_n} |\delta_i| \mathbb{I}(|\delta_i| \geq l) \leq \epsilon(l)$$

(où δ_i désigne toujours l'ensemble des voisins de i)

Pour toute cette partie, on fixe $\beta_0 \geq 0$ et $B > 0$.

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles. On dira que X est **inférieure en loi** à Y , et on notera $X \preceq Y$, s'il existe \tilde{X} (resp. \tilde{Y}) de même loi que X (resp. Y) telles que $\tilde{X} \leq \tilde{Y}$ presque sûrement.

Cette propriété est équivalente à la suivante : pour toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue, croissante et bornée, $\mathbb{E}(f(X)) \leq \mathbb{E}(f(Y))$.

On dira qu'une suite de variables aléatoires $(X_n)_{(n \in \mathbb{N})}$ est **croissante en loi** si $X_n \preceq X_{n+1}$ pour tout n .

5.2 Définition et existence de la fonction limite

Théorème 5.2.1 *On définit par récurrence une suite de variables aléatoires réelles $(h_t)_{(t \in \mathbb{N})}$. Soit K une variable aléatoire entière de distribution ρ . On note $\xi(a, b) = \operatorname{atanh}(\tanh(a) \tanh(b))$. Pour tout t , les $h_t^{(1)}, h_t^{(2)} \dots$ désigneront des variables aléatoires indépendantes (et indépendantes de K) de même distribution que h_t . On pose :*

$$h_0 = B$$

$$h_{t+1} = B + \sum_{i=1}^{K-1} \xi(\beta_0, h_t^{(i)}) \quad (2)$$

(pour tout $t \in \mathbb{N}$)

La suite (h_t) est croissante en loi et converge en loi vers une variable aléatoire h^* , qui est l'unique point fixe de l'équation (2) à images dans \mathbb{R}^+ (à égalité en loi près).

Démonstration :

Montrons tout d'abord la croissance en loi et la convergence.

Pour tout $t \geq 0$, on note $m^{t,0}$ (resp. $m^{t,+}$) l'aimantation moyenne à la racine de T_ρ dans le modèle d'Ising sur $T_\rho(t)$ associé à la température inverse β_0 et au champ magnétique B , avec conditions au bord libres (resp. positives).

Les variables h_t et $\operatorname{atanh}(m^{t,0})$ sont de même loi. La démonstration de cette affirmation se fait par récurrence sur t : pour $t = 0$, c'est clair. Si c'est vrai pour t , montrons-le pour $t + 1$. On note $i_1, i_2, \dots, i_{\Delta_*}$ les enfants de la racine de T_ρ , et $m_{i_k}^{t,0}$ l'aimantation moyenne du sommet i_k dans un modèle d'Ising sur les t premières générations du sous-arbre de T_ρ constitué de i_k et de tous ses descendants. On a vu à la suite du lemme 3.3.1 que :

$$\operatorname{atanh}(m^{t+1,0}) = B + \sum_{k=1}^{\Delta_*} \xi(\beta_0, \operatorname{atanh}(m_{i_k}^{t,0}))$$

Le sous-arbre de T_ρ constitué de i_k et de tous ses descendants est de même loi que T_ρ donc, par hypothèse de récurrence, les $\operatorname{atanh}(m_{i_k}^{t,0})$ sont des variables aléatoires de même distribution que h_t . De plus, elles sont indépendantes, puisque les sous-arbres issus des enfants de la racine le sont. Comme Δ_* est une variable aléatoire de même distribution que $K - 1$, $\operatorname{atanh}(m^{t+1,0})$ et h_{t+1} sont de même loi.

Or, d'après l'inégalité de Griffiths et le lemme 3.3.1, pour tout $t \in \mathbb{N}$, $m^{t+1,0} \geq m^{t,0}$. Donc $\operatorname{atanh}(m^{t+1,0}) \geq \operatorname{atanh}(m^{t,0})$, et $\operatorname{atanh}(m^{t+1,0})$ est de même loi que h_{t+1} , tandis que $\operatorname{atanh}(m^{t,0})$ est de même loi que h_t : $h_t : h_t \preceq h_{t+1}$. La suite (h_t) est donc croissante en loi.

Comme $\xi(\beta_0, \operatorname{atanh}(m_{i_k}^{t,0})) \leq \operatorname{atanh}(\tanh(\beta_0)) = \beta_0$ pour tous t et k , $\operatorname{atanh}(m^{t,0}) \leq B + \beta_0 \Delta_*$ pour tout t . Comme $(\operatorname{atanh}(m^{t,0}))$ est croissante, elle converge presque sûrement dans $]0; +\infty[$. Elle converge alors presque sûrement (donc en loi) vers une limite h^* . La suite (h_t) converge donc également en loi vers cette limite.

Montrons maintenant que h^* est un point fixe de l'équation (2), c'est-à-dire montrons que h^* et $H = B + \sum_{i=1}^{K-1} \xi(\beta_0, h^{*,(i)})$ sont de même loi, les $h^{*,(i)}$ étant des variables aléatoires indépendantes de même loi que h^* .

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée quelconque. Montrons que $\mathbb{E}(f(h^*)) = \mathbb{E}(f(H))$. Nous admettrons pour cela le résultat suivant : si $k > 0$ et si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n^{(1)}, \dots, y_n^{(k)}$ sont des variables aléatoires réelles indépendantes de même loi, telles que $(y_n^{(i)})_{(n \in \mathbb{N})}$ converge en loi vers une variable Y , alors, si Y_1, \dots, Y_k sont des variables aléatoires indépendantes de même loi que Y , $(y_n^{(1)}, \dots, y_n^{(k)})$ converge en loi vers (Y_1, \dots, Y_k) .

On a :

$$\mathbb{E}(f(H)) = \mathbb{E}(\lim_{n \rightarrow \infty} f(H)\mathbb{I}(K \leq n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(f(H)\mathbb{I}(K \leq n))$$

(par convergence dominée, puisque $\|f(H)\mathbb{I}(K \leq n)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$)

De même, $\mathbb{E}(f(h^*)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(f(h^*)\mathbb{I}(K \leq n))$.

Or, pour tout $k \geq 1$, puisque (h_n) converge en loi vers h^* :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f(H)\mathbb{I}(K = k)) &= \mathbb{E}(\mathbb{I}(K = k)f(B + \sum_{i=1}^{k-1} \xi(\beta_0, h^{*,(i)}))) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\mathbb{I}(K = k)f(B + \sum_{i=1}^{k-1} \xi(\beta_0, h_n^{(i)}))) \\ &\text{(puisque, comme nous l'avons admis,} \\ &\text{(}h_n^{(1)}, \dots, h_n^{(k)}\text{) converge en loi vers } (H^{(1)}, \dots, H^{(k)})\text{)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\mathbb{I}(K = k)f(h_{n+1})) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{I}(K = k)f(h^*)) \end{aligned}$$

Donc $\mathbb{E}(f(H)\mathbb{I}(K \leq n)) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(f(H)\mathbb{I}(K = k)) = \mathbb{E}(f(h^*)\mathbb{I}(K \leq n))$, et $\mathbb{E}(f(H)) = \mathbb{E}(f(h^*))$.

Les variables H et h^* sont donc de même loi et h^* est bien un point fixe de (2).

Montrons enfin l'unicité du point fixe. Soit H un point fixe ; montrons que H et h^* sont de même loi.

Pour tout $t \in \mathbb{N}$, $\text{atanh}(m^{t,0}) \preceq H \preceq \text{atanh}(m^{t,+})$. En effet, c'est vrai pour $t = 0$: puisque $\text{atanh}(m^{0,+}) = +\infty$, $H < \text{atanh}(m^{0,+})$, et comme H est égale en loi à $B + \sum_{i=1}^{K-1} \xi(\beta_0, H^{(i)}) \geq B$ (les $H^{(i)}$ étant des variables indépendantes de même loi que H), $H \geq B = \text{atanh}(m^{0,0})$ presque sûrement. Comme ξ est une fonction croissante en chacune de ses variables, si la double inégalité est vraie pour t , elle l'est également pour $t + 1$. Par récurrence, elle est donc vraie pour tout $t \in \mathbb{N}$.

De même qu'on a montré que $(m^{t,0})$ convergeait presque sûrement en croissant vers une variable $m^{\infty,0}$, $(m^{t,+})$ est une suite décroissante convergeant presque sûrement vers une variable aléatoire $m^{\infty,+}$.

Puisque, par passage à la limite, $\text{atanh}(m^{\infty,0}) \preceq H \preceq \text{atanh}(m^{\infty,+})$, il existe \tilde{H} de même loi que H telle que $\text{atanh}(m^{\infty,0}) \leq \tilde{H} \leq \text{atanh}(m^{\infty,+})$. D'après le théorème 3.3.2, $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}|m^{t,0} - m^{t,+}| = 0$.

Par convergence dominée, $\mathbb{E}|m^{\infty,0} - m^{\infty,+}| = 0$, et alors $\mathbb{E}|m^{\infty,0} - \tanh(\tilde{H})| \leq \mathbb{E}|m^{\infty,0} - m^{\infty,+}| = 0$. Donc \tilde{H} et $\text{atanh}(m^{\infty,0})$ sont égales presque sûrement, et \tilde{H} (donc H) est de même loi que $\text{atanh}(m^{\infty,0}) = h^*$.

On a bien l'unicité. □

La démonstration du théorème précédent nous permet également d'obtenir un résultat utile :

Remarque 5.2.2 *Pour tout $t \geq 0$, on note $m^{t,0}$ (resp. $m^{t,+}$) l'aimantation moyenne à la racine de T_ρ dans le modèle d'Ising sur $T_\rho(t)$ associé à la température inverse β_0 et au champ magnétique B , avec conditions au bord libres (resp. positives).*

Les suites $(\text{atanh}(m^{t,0}))_{(t \in \mathbb{N})}$ et $(\text{atanh}(m^{t,+}))_{(t \in \mathbb{N})}$ convergent en loi vers la variable aléatoire h^ définie au théorème 5.2.1.*

Démonstration :

On a vu au début de la démonstration du théorème 5.2.1 que la suite croissante $(\text{atanh}(m^{t,0}))$ convergeait en loi vers h^* .

On montre de la même façon que $(\text{atanh}(m^{t,+}))$ est une suite décroissante convergeant sûrement (donc en loi) vers une variable aléatoire \tilde{h}^* . Toujours de la même façon que dans la démonstration du théorème 5.2.1, on peut montrer que \tilde{h}^* est un point fixe de l'équation (2), et comme on a vu que ce point fixe était unique, \tilde{h}^* et h^* sont de même loi. La suite $(\text{atanh}(m^{t,+}))$ converge donc également en loi vers h^* . □

5.3 Calcul de l'énergie libre par particule

Pour tout graphe $G = (V, E)$, pour toute $\langle i, j \rangle \in E$ et pour tout $t \in \mathbb{N}$ on note $B_{G, \langle i, j \rangle}(t)$ le sous-graphe de G constitué de l'ensemble des sommets de G qui sont à une distance inférieure ou égale à t de i ou de j et des arêtes qui relient deux de ces sommets. S'il s'agit d'un arbre, on prendra l'arête $\langle i, j \rangle$ pour racine.

La dérivée de l'énergie libre peut facilement s'encadrer par des sommes de quantités définies à partir des propriétés locales du graphe. Le lemme suivant nous donne un moyen de calculer de telles sommes.

Lemme 5.3.1 *Soit $(G_n)_{(n \in \mathbb{N})}$ une suite uniformément éparse de graphes convergeant localement vers $T_{P,\rho}$. Soit $t \in \mathbb{N}^*$. Soit $H : \mathcal{A}/ \approx \rightarrow \mathbb{R}$ bornée. Alors, si on note $G_n = (V_n, E_n)$ pour tout n :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{\langle i, j \rangle \in E_n} H(B_{G_n, \langle i, j \rangle}(t)) = \frac{\bar{P}}{2} \mathbb{E}(H(\bar{T}_\rho(t)))$$

Remarque :

Avant de présenter une démonstration rigoureuse de ce résultat, donnons-en une idée générale : en utilisant la convergence locale de (G_n) vers $T_{P,\rho}$, on montre que, si $\langle i, j \rangle$ est une arête tirée au hasard dans E_n , $B_{G_n, \langle i, j \rangle}(t)$ se comporte “à peu près” comme $\bar{T}_\rho(t)$, et donc :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{E_n} \sum_{\langle i, j \rangle \in E_n} H(B_{G_n, \langle i, j \rangle}(t)) = \mathbb{E}(H(\bar{T}_\rho(t)))$$

Comme $\frac{2E_n}{n}$ est le nombre moyen de voisins d’un sommet de G_n et comme ce nombre tend vers \bar{P} , puisque, pour n grand, $B_{G_n, i}(1)$ est à peu près de même loi que $T_{P,\rho}(1)$ (si on tire i au hasard dans V_n), on obtient l’égalité voulue.

Démonstration :

Commençons par interpréter $\frac{1}{n} \sum_{\langle i, j \rangle \in E_n} H(B_{G_n, \langle i, j \rangle}(t))$ comme une espérance.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note i_n une variable aléatoire à images dans V_n telle que, pour tout $i \in V_n$, $\mathbb{P}(i_n = i) = \frac{1}{V_n}$. Pour tout sommet i de G_n tel que $\Delta_i > 0$, on note $j_{n,i}$ une variable aléatoire indépendante de i_n , à images dans ∂i , telle que, pour tout $j \in \partial i$, $\mathbb{P}(j_{n,i} = j) = \frac{1}{\Delta_i}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{\langle i, j \rangle \in E_n} H(B_{G_n, \langle i, j \rangle}(t)) &= \frac{1}{2n} \sum_{i \in V_n} \sum_{\substack{j \in \partial i \\ \text{tq } \Delta_i > 0}} H(B_{G_n, \langle i, j \rangle}(t)) \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{\substack{i \in V_n \\ \text{tq } \Delta_i > 0}} \Delta_i \frac{\sum_{j \in \partial i} H(B_{G_n, \langle i, j \rangle}(t))}{\Delta_i} \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{\substack{i \in V_n \\ \text{tq } \Delta_i > 0}} \Delta_i \mathbb{E}(H(B_{G_n, \langle i, j_{n,i} \rangle}(t))) \\ &= \frac{1}{2} \mathbb{E}(\Delta_{i_n} H(B_{G_n, \langle i_n, j_{n,i_n} \rangle}(t))) \end{aligned}$$

Utilisons maintenant l’hypothèse selon laquelle $(G_n)_{(n \in \mathbb{N})}$ converge localement vers $T_{P,\rho}$, pour montrer que l’espérance obtenue à la ligne précédente converge vers l’espérance d’une fonction de l’arbre aléatoire $T_{P,\rho}$. Pour tout $l \in \mathbb{N}^*$, on peut écrire, si F est la fonction définie au paragraphe 2.1 :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\Delta_{i_n} H(B_{G_n, \langle i_n, j_{n,i_n} \rangle}(t)) \mathbb{I}(\Delta_{i_n} \leq l)) &= \mathbb{E}(\Delta_{i_n} H(B_{G_n, \langle i_n, j_{n,i_n} \rangle}(t)) \mathbb{I}(B_{G_n, i_n}(t+1) \notin \mathcal{A}) \mathbb{I}(\Delta_{i_n} \leq l)) \\ &\quad + \sum_{A \in \mathcal{A}} \mathbb{E}(\Delta_{i_n} H(B_{G_n, \langle i_n, j_{n,i_n} \rangle}(t)) \mathbb{I}(\Delta_{i_n} \leq l) \\ &\quad \quad \quad \times \mathbb{I}(B_{G_n, i_n}(t+1) \in \mathcal{A} \text{ et } F(B_{G_n, i_n}) = A)) \end{aligned}$$

Or, quand n tend vers $+\infty$:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(\Delta_{i_n} H(B_{G_n, \langle i_n, j_n, i_n \rangle}(t))) \mathbb{I}(B_{G_n, i_n}(t+1) \notin \mathcal{A}) \mathbb{I}(\Delta_{i_n} \leq l)) \\ & \leq l \|H\|_\infty \mathbb{P}(B_{G_n, i_n}(t+1) \notin \mathcal{A}) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(B_{G_n, i_n}(t+1) \in \mathcal{A} \text{ et } F(B_{G_n, i_n}(t+1)) = A) = \mathbb{P}(F(T_{P, \rho}(t+1)) = A)$.

On note $*$ la racine de $T_{P, \rho}$ et $j_{T, *}$ un des enfants de $*$ (choisi aléatoirement, de façon uniforme, indépendamment de toutes les variables aléatoires déjà définies). De même, pour tout $A \in \mathcal{A}$, on note $*_A$ la racine de A et $j_{A, *}$ un des enfants de $*_A$ (choisi aléatoirement, de façon uniforme, indépendamment de toutes les variables aléatoires déjà définies).

On a alors, pour tout $A \in \mathcal{A}$:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(\Delta_{i_n} H(B_{G_n, \langle i_n, j_n, i_n \rangle}(t))) \mathbb{I}(\Delta_{i_n} \leq l) \mathbb{I}(B_{G_n, i_n}(t+1) \in \mathcal{A} \text{ et } F(B_{G_n, i_n}(t+1)) = A)) \\ & = \mathbb{E}(\Delta_{*_A} H(B_{A, \langle *_A, j_{A, *} \rangle}(t))) \mathbb{I}(\Delta_{*_A} \leq l) \mathbb{I}(B_{G_n, i_n}(t+1) \in \mathcal{A} \text{ et } F(B_{G_n, i_n}(t+1)) = A)) \\ & = \mathbb{E}(\Delta_{*_A} H(B_{A, \langle *_A, j_{A, *} \rangle}(t))) \mathbb{I}(\Delta_{*_A} \leq l) \times \mathbb{E}(\mathbb{I}(B_{G_n, i_n}(t+1) \in \mathcal{A} \text{ et } F(B_{G_n, i_n}(t+1)) = A)) \\ & \quad (\text{les deux fonctions étant indépendantes}) \\ & \rightarrow \mathbb{E}(\Delta_{*_A} H(B_{A, \langle *_A, j_{A, *} \rangle}(t))) \mathbb{I}(\Delta_{*_A} \leq l) \times \mathbb{E}(\mathbb{I}(F(T_{P, \rho}(t+1)) = A)) \\ & = \mathbb{E}(\Delta_* H(B_{T_{P, \rho}, \langle *, j_{T, *} \rangle}(t))) \mathbb{I}(\Delta_* \leq l) \mathbb{I}(F(T_{P, \rho}(t+1)) = A)) \end{aligned}$$

Pour tout ϵ , il existe un ensemble fini $\mathcal{B} \subset A$ tel que $\mathbb{P}(F(T_{P, \rho}(t+1)) \notin \mathcal{B}) < \frac{\epsilon}{l \|G\|_\infty}$, et comme

$$\sum_{A \notin \mathcal{B}} \mathbb{P}(B_{G_n, i_n}(t+1) \in \mathcal{A} \text{ et } F(B_{G_n, i_n}(t+1)) = A) \rightarrow \mathbb{P}(F(T_{P, \rho}(t+1)) \notin \mathcal{B})$$

il existe N tel que $\forall n \geq N$:

$$\left| \sum_{A \notin \mathcal{B}} \mathbb{E}(\Delta_{i_n} H(B_{G_n, \langle i_n, j_n, i_n \rangle}(t))) \mathbb{I}(\Delta_{i_n} \leq l) \mathbb{I}(B_{G_n, i_n}(t+1) \in \mathcal{A} \text{ et } F(B_{G_n, i_n}(t+1)) = A) \right| < \epsilon$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(\Delta_{i_n} H(B_{G_n, \langle i_n, j_n, i_n \rangle}(t))) \mathbb{I}(\Delta_{i_n} \leq l) \\ & \rightarrow \sum_{A \in \mathcal{A}} \mathbb{E}(\Delta_* H(B_{T_{P, \rho}, \langle *, j_{T, *} \rangle}(t))) \mathbb{I}(\Delta_* \leq l) \mathbb{I}(F(T_{P, \rho}(t+1)) = A)) \\ & = \mathbb{E}(\Delta_* H(B_{T_{P, \rho}, \langle *, j_{T, *} \rangle}(t))) \mathbb{I}(\Delta_* \leq l) \end{aligned}$$

Comme $\mathbb{E}(\Delta_{i_n} H(B_{G_n, \langle i_n, j_n, i_n \rangle}(t))) \mathbb{I}(\Delta_{i_n} > l) \leq \|H\|_\infty \mathbb{E}(\Delta_{i_n} \mathbb{I}(\Delta_{i_n} > l)) \rightarrow 0$ uniformément en n quand $l \rightarrow +\infty$, puisque (G_n) est uniformément éparse, on a :

$$\mathbb{E}(\Delta_{i_n} H(B_{G_n, \langle i_n, j_n, i_n \rangle}(t))) \rightarrow \mathbb{E}(\Delta_* H(B_{T_{P, \rho}, \langle *, j_{T, *} \rangle}(t)))$$

Exprimons maintenant $\mathbb{E}(\Delta_* H(B_{T_{P, \rho}, \langle *, j_{T, *} \rangle}(t)))$ en fonction de $\mathbb{E}(H(\bar{T}_\rho(t)))$.

Remarquons que, étant donnée la façon dont on construit les différents arbres aléatoires, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la loi de $B_{T_{P,\rho},\langle *,j_{T,*} \rangle}(t)$ sachant que $\Delta_* = k$ est la même que la loi de $\bar{T}_\rho(t)$ sachant que $\Delta_{\bar{*}} = k$, où $\bar{*}$ désigne le sommet racine de \bar{T}_ρ . Autrement dit, pour tout $A \in \mathcal{A}$:

$$\frac{\mathbb{P}(F(B_{T_{P,\rho},\langle *,j_{T,*} \rangle}(t)) = A \text{ et } \Delta_* = k)}{\mathbb{P}(\Delta_* = k)} = \frac{\mathbb{P}(F(\bar{T}_\rho(t)) = A \text{ et } \Delta_{\bar{*}} = k)}{\mathbb{P}(\Delta_{\bar{*}} = k)}$$

Donc, puisque $\frac{\mathbb{P}(\Delta_* = k)}{\mathbb{P}(\Delta_{\bar{*}} = k)} = \frac{P(\{k\})}{\rho(\{k\})} = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} iP(\{i\})}{k} = \frac{\bar{P}}{k}$:

$$\mathbb{P}(F(B_{T_{P,\rho},\langle *,j_{T,*} \rangle}(t)) = A \text{ et } \Delta_* = k) = \frac{\bar{P}}{k} \mathbb{P}(F(\bar{T}_\rho(t)) = A \text{ et } \Delta_{\bar{*}} = k)$$

Nous déduisons de la dernière inégalité que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{E}(H(B_{T_{P,\rho},\langle *,j_{T,*} \rangle}(t))\mathbb{I}(\Delta_* = k)) = \frac{\bar{P}}{k} \mathbb{E}(H(\bar{T}_\rho(t))\mathbb{I}(\Delta_{\bar{*}} = k))$$

On a enfin :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\Delta_* H(B_{T_{P,\rho},\langle *,j_{T,*} \rangle}(t))) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}(k\mathbb{I}(\Delta_* = k)H(B_{T_{P,\rho},\langle *,j_{T,*} \rangle}(t))) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \bar{P} \mathbb{E}(\mathbb{I}(\Delta_{\bar{*}} = k)H(\bar{T}_\rho(t))) \\ &= \bar{P} \mathbb{E}(H(\bar{T}_\rho(t))) \end{aligned}$$

En combinant tous les résultats obtenus :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{\langle i,j \rangle \in E_n} H(B_{G_n,\langle i,j \rangle}(t)) &= \frac{1}{2} \mathbb{E}(\Delta_{i_n} H(B_{G_n,\langle i_n,j_n,i_n \rangle}(t))) \\ &\rightarrow \frac{1}{2} \mathbb{E}(\Delta_* H(B_{T_{P,\rho},\langle *,j_{T,*} \rangle}(t))) \\ &= \frac{\bar{P}}{2} \mathbb{E}(H(\bar{T}_\rho(t))) \end{aligned}$$

□

Voilà finalement le théorème qui permet le calcul de l'énergie libre.

Théorème 5.3.2 *Soit $(G_n)_{(n \in \mathbb{N})}$ une suite uniformément éparse de graphes convergeant localement vers $T_{P,\rho}$. On note $h^{(1)}, h^{(2)} \dots$ des variables aléatoires indépendantes de même distribution que h^* , dont nous avons établi l'existence au théorème 5.2.1. Soit L une variable aléatoire entière, indépendante des $h^{(i)}$, de loi P . On définit :*

$$\begin{aligned}\phi(\beta_0, B) &= \bar{P} \log(\cosh \beta_0) - \frac{\bar{P}}{2} \mathbb{E}(\log(1 + \tanh(\beta_0) \tanh(h^{(1)}) \tanh(h^{(2)}))) \\ &\quad + \mathbb{E}(\log(e^B \prod_{i=1}^L (1 + \tanh(\beta_0) \tanh(h^{(i)})) + e^{-B} \prod_{i=1}^L (1 - \tanh(\beta_0) \tanh(h^{(i)}))))\end{aligned}$$

Alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(Z_n) = \phi(\beta_0, B)$$

(où, pour tout n , Z_n désigne la fonction de partition associée à la loi d'Ising sur G_n pour la température inverse β_0 et le champ magnétique B)

Démonstration :

On note $G_n = (V_n, E_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Première partie :

Nous commencerons par montrer qu'il suffit d'étudier les dérivées par rapport à β des quantités considérées pour parvenir au résultat.

Si $\beta_0 = 0$:

$$\begin{aligned}\phi(\beta_0, B) &= \log(2 \cosh(B)) \\ Z_n &= \sum_{\{\sigma_i\} \in \{-1; +1\}^n} \exp(B \sum_{i \in V_n} \sigma_i) = (2 \cosh(B))^n\end{aligned}$$

donc :

$$\frac{1}{n} \log(Z_n) = \log(2 \cosh(B))$$

et on a bien l'égalité.

Il est également vrai que :

$$\frac{\partial(\frac{1}{n} \log(Z_n))}{\partial \beta} = \frac{1}{n} \sum_{\langle i, j \rangle \in E_n} \langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{\mu_n(\beta)}$$

(où μ_n est la loi d'Ising sur G_n , pour la température inverse β et le champ magnétique B)
Comme cette dérivée est bornée, puisque $|\frac{\partial(\frac{1}{n} \log(Z_n))}{\partial \beta}| \leq \frac{|E_n|}{n} \leq \frac{\epsilon(1)}{2}$, il suffit, pour démontrer le résultat, de montrer qu'elle converge simplement, lorsque $n \rightarrow +\infty$, vers $\frac{\partial \phi(\beta, B)}{\partial \beta}$.

On trouve, par un calcul partiellement détaillé dans le paragraphe 7.3 de l'annexe :

$$\frac{\partial \phi(\beta, B)}{\partial \beta} = \frac{\bar{P}}{2} \mathbb{E}(\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{\mu_{h^{(1)}, h^{(2)}}(i, j)})$$

(où $\mu_{h^{(1)}, h^{(2)}}(i, j)$ est la loi d'Ising sur le graphe $(\{i, j\}, \{\langle i, j \rangle\})$, i ayant le champ

magnétique (aléatoire) $h^{(1)}$ et j le champ magnétique $h^{(2)}$)

Il suffit donc de montrer que, pour tout $\beta \geq 0$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{\langle i,j \rangle \in E_n} \langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{\mu_n(\beta)} = \frac{\bar{P}}{2} \mathbb{E}(\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{\mu_{h^{(1)}, h^{(2)}}(i,j)})$$

Deuxième partie :

Soit $\beta \geq 0$ fixé.

Dans cette deuxième partie, nous calculerons $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{\langle i,j \rangle \in E_n} \langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{\mu_n(\beta)}$. Afin de pouvoir utiliser l'hypothèse de la convergence locale de (G_n) , à travers le lemme 5.3.1, il nous faut tout d'abord exprimer (ou, en fait, encadrer) $\frac{1}{n} \sum_{\langle i,j \rangle \in E_n} \langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{\mu_n(\beta)}$ en fonction d'une moyenne de quantités locales (c'est-à-dire ne dépendant que des $B_{G_n, \langle i,j \rangle}(t)$). Pour réaliser l'encadrement, nous utiliserons à nouveau les deux lois "de référence" de la section 3.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout sous-graphe $S = (V_S, E_S)$ de G_n , on note $\mu_{n,S}^0$ (resp. $\mu_{n,S}^+$) la loi d'Ising sur S associée à la température inverse β et au champ magnétique B , avec conditions sur la frontière ∂S de S dans G libres (resp. positives).

Comme $\mu_{n,S}^0$ est la marginale sur S de la loi d'Ising sur le graphe $\tilde{G}_n = (V_n, E_S)$, associée à la température inverse β et au champ magnétique B , et comme $E_S \subset E_n$, d'après l'inégalité de Griffiths (3.2.1), pour tous sommets distincts i et j de V_S , $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{\mu_{n,S}^0} \leq \langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{\mu_n(\beta)}$ (où $\mu_n(\beta)$ désigne toujours la loi d'Ising sur G_n associée aux constantes β et B).

De même, $\mu_{n,S}^+$ étant la marginale sur S de la loi d'Ising sur le graphe G_n associée à la température inverse β et au champ magnétique qui vaut B sur $V_S \setminus \partial S$ et $+\infty$ sinon, d'après l'inégalité de Griffiths, $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{\mu_{n,S}^+} \geq \langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{\mu_n(\beta)}$.

Donc, pour tout $t \geq 0$:

$$\frac{1}{n} \sum_{\langle i,j \rangle \in E_n} \langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{\mu_{n, B_{G_n, \langle i,j \rangle}(t)}^0} \leq \frac{1}{n} \sum_{\langle i,j \rangle \in E_n} \langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{\mu_n(\beta)} \leq \frac{1}{n} \sum_{\langle i,j \rangle \in E_n} \langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{\mu_{n, B_{G_n, \langle i,j \rangle}(t)}^+}$$

D'après le lemme 5.3.1 :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{\langle i,j \rangle \in E_n} \langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{\mu_{n, B_{G_n, \langle i,j \rangle}(t)}^0} &= \frac{\bar{P}}{2} \mathbb{E}(\langle \sigma_{*1} \sigma_{*2} \rangle_{\mu_{\bar{T}_\rho(t)}^0}) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{\langle i,j \rangle \in E_n} \langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{\mu_{n, B_{G_n, \langle i,j \rangle}(t)}^+} &= \frac{\bar{P}}{2} \mathbb{E}(\langle \sigma_{*1} \sigma_{*2} \rangle_{\mu_{\bar{T}_\rho(t)}^+}) \end{aligned}$$

(où $\mu_{\bar{T}_\rho(t)}^0$ (resp. $\mu_{\bar{T}_\rho(t)}^+$) est la loi d'Ising sur $\bar{T}_\rho(t)$ associée aux constantes β et B , avec conditions au bord libres (resp. positives), et où on note $\langle *1, *2 \rangle$ l'arête racine de \bar{T}_ρ)

Et :

$$\frac{\bar{P}}{2} \mathbb{E}(\langle \sigma_{*1} \sigma_{*2} \rangle_{\mu_{\bar{T}_\rho(t)}^0}) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{\langle i,j \rangle \in E_n} \langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{\mu_n(\beta)} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{\langle i,j \rangle \in E_n} \langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{\mu_n(\beta)} \leq \frac{\bar{P}}{2} \mathbb{E}(\langle \sigma_{*1} \sigma_{*2} \rangle_{\mu_{\bar{T}_\rho(t)}^+})$$

Il suffit donc d'étudier $\mathbb{E}(\langle \sigma_{*1} \sigma_{*2} \rangle_{\mu_{\bar{T}_\rho(t)}^0})$ et $\mathbb{E}(\langle \sigma_{*1} \sigma_{*2} \rangle_{\mu_{\bar{T}_\rho(t)}^+})$.

Notons $\bar{T}_{\rho,1}$ le sous-arbre de \bar{T}_ρ constitué de $*_1$ et de tous ses descendants. Définissons de même $\bar{T}_{\rho,2}$. Ces deux sous-arbres sont, par construction de \bar{T}_ρ , indépendants et de même loi que T_ρ . Notons, pour $i = 1$ ou 2 , $m_i^{t,0}$ (resp. $m_i^{t,+}$) l'aimantation moyenne à la racine de $\bar{T}_{\rho,i}$ dans le modèle d'Ising sur $\bar{T}_\rho(t)$ associé à la température inverse β et au champ magnétique B , avec conditions au bord libres (resp. positives).

D'après le lemme 3.3.1, $\mu_{\bar{T}_\rho(t)}^0$ (resp. $\mu_{\bar{T}_\rho(t)}^+$) a pour marginale sur $Q = \{\{*_1, *_2\}, \{\langle *_1, *_2 \rangle\}\}$ la loi d'Ising sur Q associée à la température inverse β et au champ magnétique qui vaut $\text{atanh}(m_i^{t,0})$ (resp. $\text{atanh}(m_i^{t,+})$) en $*_i$. Comme, d'après la remarque 5.2.2, $\text{atanh}(m_i^{t,0})$ et $\text{atanh}(m_i^{t,+})$ convergent en loi vers h^* , les lois $\mu_{\bar{T}_\rho(t)}^0$ et $\mu_{\bar{T}_\rho(t)}^+$ convergent vers $\mu_{h^{(1)}, h^{(2)}}$.

Donc $\mathbb{E}(\langle \sigma_{*1} \sigma_{*2} \rangle_{\mu_{\bar{T}_\rho(t)}^0})$ et $\mathbb{E}(\langle \sigma_{*1} \sigma_{*2} \rangle_{\mu_{\bar{T}_\rho(t)}^+})$ convergent vers $\mathbb{E}(\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{\mu_{h^{(1)}, h^{(2)}}(i,j)})$.

Ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{\langle i,j \rangle \in E_n} \langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{\mu_n(\beta)} = \frac{\bar{P}}{2} \mathbb{E}(\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{\mu_{h^{(1)}, h^{(2)}}(i,j)})$$

ce qui conclut la démonstration. □

6 Simulations numériques

Nous présentons dans cette dernière partie les simulations numériques que nous avons effectuées, d'une part à propos des graphes d'Erdős-Rényi et d'autre part à propos de la méthode de Monte-Carlo.

6.1 Graphes d'Erdős-Rényi

Les graphes d'Erdős-Rényi nous intéressent car ils appartiennent à la famille des graphes "qui convergent localement vers un arbre" lorsqu'on fait tendre leur taille vers l'infini. Un tel graphe est obtenu en fixant un nombre de sommets n puis en tirant pour chaque arête possible de manière indépendante si elle est présente ou pas avec probabilité c/n où c est une constante donnant le degré moyen du graphe. Dans un premier temps, nous avons construit nos graphes en suivant ce protocole mais sa complexité en n^2 nous interdisait de construire des graphes de taille supérieure à 10000.

Cependant, nous avons été capables de construire des graphes en temps linéaire en utilisant les propriétés des graphes : dans un graphe d'Erdős-Rényi le degré des sommets suit une loi binômiale de paramètre $\frac{c}{n}$, donc, pour un sommet fixé, le nombre d'arêtes le reliant à un sous

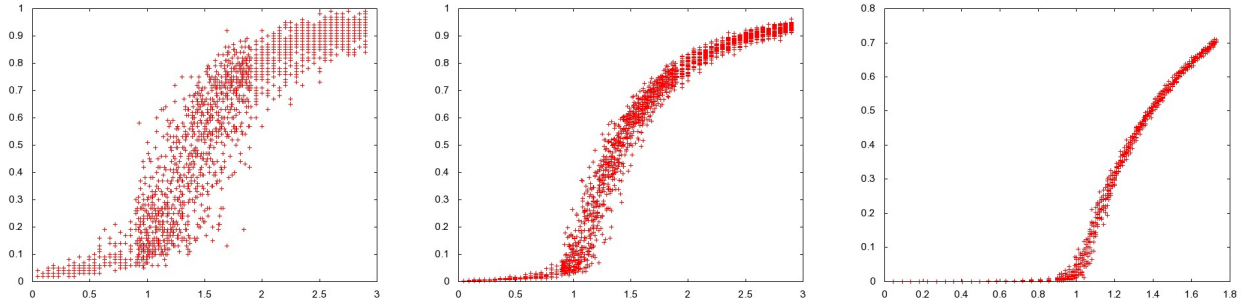


FIG. 9 – Proportion de sommets dans la plus grande composante connexe en fonction du degré moyen pour des graphes de tailles 100, 1000 et 30000

ensemble donné de sommets suit aussi une loi binômiale facile à calculer. Il est donc possible de construire un graphe d’Erdős-Renyi en numérotant les sommets et en déterminant, pour chaque sommet, les arêtes le reliant à des sommets d’indice plus grand. On trouvera le code dans le paragraphe 7.4.1 de l’annexe.

Puisqu’il suffit pour déterminer les composantes connexes d’un graphe d’un simple parcours linéaire, dans le cas présent d’un degré borné, nous avons pu mettre la transition de percolation en évidence en générant des courbes montrant la taille de la plus grande composante connexe en fonction du degré moyen du graphe. La transition de percolation s’explique facilement par la comparaison avec un arbre aléatoire de type processus de Galton-Watson. Puisque qu’un graphe d’Erdos-Renyi converge localement vers un arbre, à partir d’un sommet fixé on peut obtenir une bonne approximation de sa composante connexe par un arbre aléatoire où la loi du nombre de descendants d’un sommet est égale à la loi conditionnelle du degré d’un sommet dans le graphe sachant qu’il a au moins un voisin (ici une loi de Poisson pour un grand graphe). Si l’arbre aléatoire est presque sûrement fini, alors les composantes connexes seront petites (en pratique de taille au plus logarithmique) mais si l’arbre est infini avec une probabilité positive, alors une composante au moins sera assez grande pour que l’approximation ne soit plus du tout valable, c’est à dire de taille $O(n)$. Une étude précise permet d’obtenir que la proportion de sommets dans la plus grande composante connexe converge vers une valeur déterministe à la limite des graphes infinis.

Nous pouvons voir que les simulations convergent bien vers les valeurs théoriques, avec une incertitude qui devient faible quand la taille dépasse 10000, et on peut observer la transition entre un comportement où la plus grande composante connexe est de taille d’ordre n et un autre où elle est négligeable devant n . On voit surtout que les écarts entre les différentes réalisations, et à la valeur théorique, sont d’autant plus faibles que l’on est éloigné du point critique de degré moyen 1. Pour étudier le comportement au point critique ou en dessous nous avons généré des graphes de taille variable mais ayant le même degré moyen. On peut y voir clairement qu’en dessous du point critique la plus grande composante croît en $O(\ln n)$. Enfin exactement au point critique la plus grande composante connexe est de taille $O(n^{\frac{2}{3}})$ et il n’y a pas de convergence (ou une convergence à une vitesse bien plus faible qu’ailleurs) vers une valeur déterministe du préfacteur mais une distribution non triviale de celui-ci.

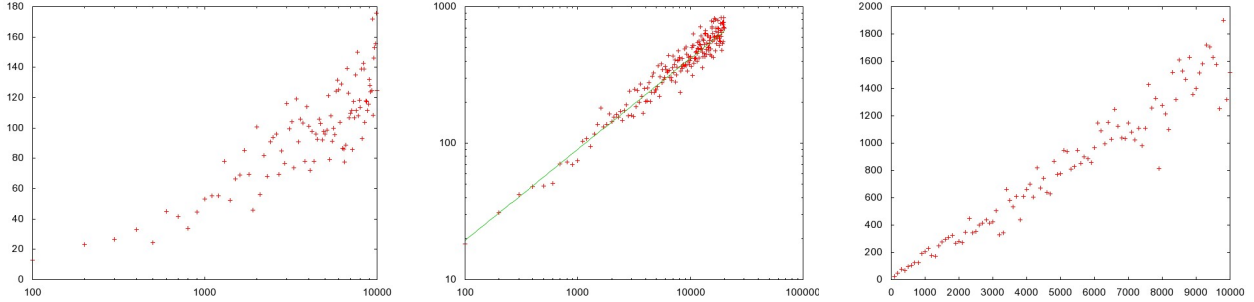


FIG. 10 – Taille de la plus grande composante connexe en fonction de celle du graphe pour des degrés moyens 0.9, 1 et 1.1

6.2 Méthode de Monte-Carlo

Nous avons déjà présenté de façon théorique la méthode de Monte-Carlo dans la section 4. L’algorithme que nous avons utilisé est la dynamique de Glauber. On trouvera le code correspondant à une itération (i.e. au retournement éventuel d’un seul spin) dans le paragraphe 7.4.2.

6.2.1 Réalisation pratique

Nous avons représenté les graphes par des tableaux dont chaque emplacement représente un sommet et contient la liste des sommets adjacents. Cela nous permet d’avoir un calcul en temps $O(1)$ d’une itération de la chaîne puisque chaque sommet n’est adjacent qu’à un nombre constant d’autres. Sur l’ordinateur avec lequel nous avons travaillé nous avons pu effectuer des simulations avec de l’ordre de 10^{10} itérations.

Nous obtenons une approximation de la marginale de la mesure de Boltzman sur un sommet en comptant combien de fois ce sommet est mis à +1 et le nombre de fois qu’il est observé. Nous utilisons comme variable de sortie la moyenne (arithmétique) de ces estimations des marginales.

6.2.2 Convergence

Nous avons commencé par étudier la vitesse de convergence de la chaîne de Markov. Pour cela sur un graphe fixé (de taille 10000 et de degré moyen 10) nous avons réalisé un très grand nombre d’itérations en réinitialisant le décompte régulièrement (ici toutes les 10^6 itérations). Nous avons obtenu les résultats suivants :

Comme nous pouvons le voir le système converge rapidement vers un état stationnaire où il ne reste plus que de petites variations dues en partie à l’incertitude statistique et en partie aux fluctuations thermiques. En particulier pour $\beta = 0.1$ les fluctuations sont 1000 fois plus importantes qu’aux deux autres températures ce qui montre bien qu’elles sont d’origine thermique. Ceci est conforme à la théorie puisque pour les graphes considérés la température inverse critique est très proche de $\beta = 0.1$.

Il est possible de trouver exactement quelle est la vitesse à laquelle le processus converge en calculant la magnétisation sur très peu d’itérations. En réinitialisant toutes les 10^4 itérations

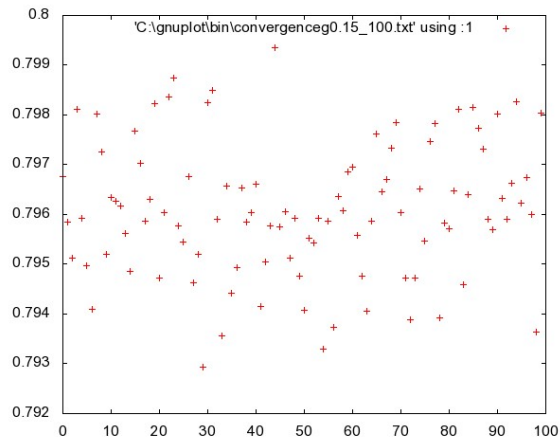
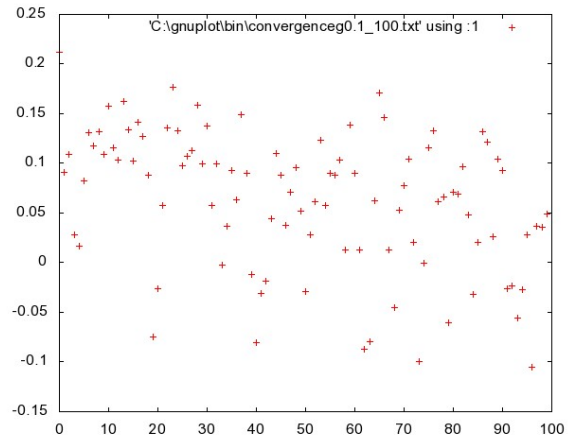
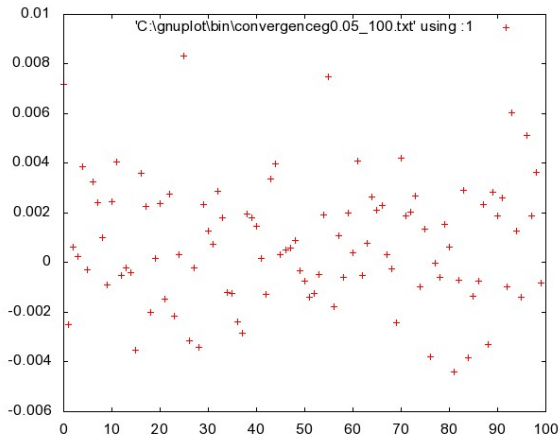


FIG. 11 – Distribution des magnétisations calculées calculées avec $\beta = 0.05$, $\beta = 0.1$ et $\beta = 0.15$

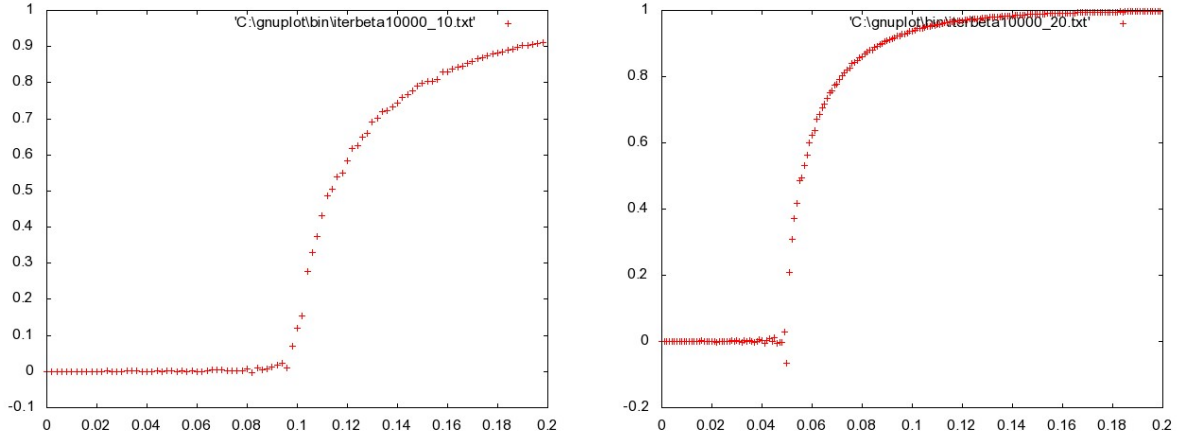


FIG. 12 – Magnétisation en fonction de β pour des graphes de degré moyen 10 et 20

soit seulement une par sommet en moyenne, on trouve que l’incertitude statistique devient dominante après moins de 10 itérations par sommet.

6.2.3 Changement de phase

Le modèle d’Ising présente un changement de phase que l’on peut clairement voir en faisant varier la température. À haute température (β petit), la magnétisation devient très faible quand B diminue et, surtout, il y a peu de variation dans les valeurs de la magnétisation. Par contre, à basse température, la magnétisation peut être non nulle même avec un champ extérieur quasi nul, en effet (pour $B = 0$) l’énergie libre possède deux minima distincts correspondant à des états symétriques.

Ces graphiques ont été réalisés en construisant des graphes de taille 10^5 avec un champ extérieur de 0,01. On constate très clairement un changement de phase avec une magnétisation nulle jusqu’à une valeur β_c puis strictement positive. Conformément à la théorie, la température critique vérifie $\beta_c \simeq \frac{1}{\text{degré}}$ pour de grands degrés comme ceux que nous utilisons. Les courbes ayant été tracées en utilisant un seul graphe par point, nous voyons qu’à part au voisinage de la température critique la convergence est très précise.

Il est aussi possible de mettre en évidence la présence de deux minima locaux de l’énergie libre. En effet nous initialisons avec tous les spins dans l’état +1. Quand le champ magnétique tend à mettre les spins dans l’état -1 le système doit passer par un état métastable avant d’arriver à l’équilibre. En réglant le champ magnétique nous avons pu obtenir un temps caractéristique de métastabilité visible sur un graphique de convergence. Ici pour un graphe de taille 10^4 de degré moyen 10 avec une température inverse $\beta = 0.15$ et un champ magnétique de 1.08, nous avons utilisé 10^5 itérations par point. On voit bien que le système est d’abord resté dans l’état métastable de magnétisation positive où il y avait des fluctuations importantes puis qu’il a basculé vers l’état d’équilibre où ces grandes fluctuations ont disparu.

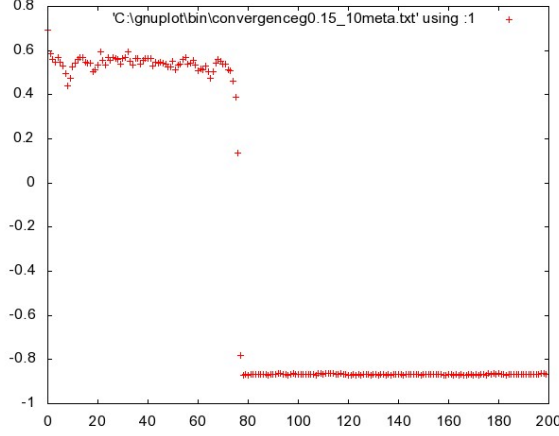


FIG. 13 – Métastabilité de l'état de magnétisation non nulle mais opposée au champ extérieur

7 Annexe : démonstrations

7.1 Modèle de Curie-Weiss

Dans le cas du modèle de Curie-Weiss, on a :

$$H(\sigma_1, \dots, \sigma_N) = -\frac{\beta}{N} \sum_{\langle i,j \rangle \in E} \sigma_i \sigma_j - B \sum_{i=1}^N \sigma_i$$

L'énergie est invariante par permutation des σ_i et elle ne dépend donc que du nombre d'entiers i tels que σ_i vaut $+1$. Grâce à cette remarque, nous allons pouvoir remplacer toutes les sommes sur l'ensemble des configurations par des sommes sur ce nombre d'entiers, ce qui simplifiera nettement les calculs. Pour toute configuration $(\sigma_1, \dots, \sigma_N)$, on note $K(\sigma_1, \dots, \sigma_N)$ le nombre de i tels que $\sigma_i = +1$.

Comme on a défini $m(\sigma_1, \dots, \sigma_N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i$, on a :

$$H(\sigma_1, \dots, \sigma_N) = -\frac{\beta N}{2} m(\sigma_1, \dots, \sigma_N)^2 - BNm(\sigma_1, \dots, \sigma_N) + \frac{\beta}{2}$$

On notera alors ici $H(m) = -\frac{\beta N}{2} m^2 - BNm + \frac{\beta}{2}$ pour tout $m \in [-1; 1]$.

Comme $m(\sigma_1, \dots, \sigma_N) = \frac{2K(\sigma_1, \dots, \sigma_N)}{N} - 1$, on a :

$$\begin{aligned}
\langle m \rangle &= \frac{\sum_{(\sigma_1, \dots, \sigma_N) \in \{-1, +1\}^N} m(\sigma_1, \dots, \sigma_N) e^{-H(\sigma_1, \dots, \sigma_N)}}{\sum_{(\sigma_1, \dots, \sigma_N) \in \{-1, +1\}^N} e^{-H(\sigma_1, \dots, \sigma_N)}} \\
&= \frac{\sum_{(\sigma_1, \dots, \sigma_N) \in \{-1, +1\}^N} \left(\frac{2K(\sigma_1, \dots, \sigma_N)}{N} - 1 \right) e^{-H\left(\frac{2K(\sigma_1, \dots, \sigma_N)}{N} - 1\right)}}{\sum_{(\sigma_1, \dots, \sigma_N) \in \{-1, +1\}^N} e^{-H\left(\frac{2K(\sigma_1, \dots, \sigma_N)}{N} - 1\right)}} \\
&= \frac{\sum_{k=0}^N C_N^k \left(\frac{2k}{N} - 1 \right) e^{-H\left(\frac{2k}{N} - 1\right)}}{\sum_{k=0}^N C_N^k e^{-H\left(\frac{2k}{N} - 1\right)}}
\end{aligned}$$

(puisque'il y a C_N^k configurations $(\sigma_1, \dots, \sigma_N)$ telles que $K(\sigma_1, \dots, \sigma_N) = k$)

Si on pose $x = \frac{k}{N}$, $-H\left(\frac{2k}{N} - 1\right) = 2N(\beta x^2 + (B - \beta)x) + \left(\frac{\beta}{2} - B\right)N - \frac{\beta}{2}$. De plus, si k et N tendent vers $+\infty$, $C_N^k \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi N x(1-x)}} \left(\frac{1}{x^x(1-x)^{1-x}}\right)^N$, d'après la formule de Stirling. On aura donc, pour k et N tendant vers $+\infty$,

$$C_N^k e^{-H\left(\frac{2k}{N} - 1\right)} \sim \frac{e^{N\phi(x) - \frac{\beta}{2}}}{\sqrt{2\pi N x(1-x)}}$$

où $\phi(x) = 2\beta x^2 + 2x(B - \beta) - x \ln x - (1-x) \ln(1-x) + \frac{\beta}{2} - B$, qu'on définit sur $[0; 1]$ en prolongeant par continuité en 0 et en 1.

On vérifie en étudiant les dérivées de ϕ que, lorsque $B > 0$, le maximum de ϕ sur $[0; 1]$ est atteint en un unique point, qui n'est ni 0 ni 1. On pose alors $x_m \in [0; 1]$ tel que $\phi(x_m) = \max_{x \in [0; 1]} \phi(x)$.

L'idée qui va permettre de simplifier l'écriture de $\langle m \rangle$ pour N grand, et qui est décrite rigoureusement par le lemme suivant, est que, pour N tendant vers $+\infty$, nous pourrions négliger dans les sommes sur k tous les termes correspondant à des k tels que $\frac{k}{N}$ n'est pas assez proche de x_m .

Lemme 7.1.1 *Soit $\epsilon > 0$. On a :*

$$\sum_{\substack{k \in \{0, \dots, N\} \\ \text{tq } |\frac{k}{N} - x_m| > \epsilon}} C_N^k e^{-H\left(\frac{2k}{N} - 1\right)} = o\left(\sum_{k=0}^N C_N^k e^{-H\left(\frac{2k}{N} - 1\right)}\right)$$

quand N tend vers $+\infty$.

Démonstration :

On admettra le résultat suivant :

Il existe $0 < D_1 < D_2$ tels que, pour tout $N > 0$ et pour tout $k \in \{1, \dots, N-1\}$, si on pose $\lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Nx(1-x)}} \left(\frac{1}{x^x(1-x)^{1-x}} \right)^N$, alors :

$$D_1 \lambda\left(\frac{k}{N}\right) \leq C_N^k \leq D_2 \lambda\left(\frac{k}{N}\right)$$

Pour tout $N > k > 0$, $D_1 \frac{e^{N\phi(x) - \frac{\beta}{2}}}{\sqrt{2\pi Nx(1-x)}} \leq C_N^k e^{-H(\frac{2k}{N}-1)} \leq D_2 \frac{e^{N\phi(x) - \frac{\beta}{2}}}{\sqrt{2\pi Nx(1-x)}}$.

(avec $x = \frac{k}{N}$)

Puisque ϕ admet un unique maximum sur $[0; 1]$, il existe $\eta > 0$ tel que, si $|x - x_m| > \epsilon$, alors $\phi(x) < \phi(x_m) - \eta$. De plus, il existe $\tilde{\epsilon} \in]0; \epsilon[$ et $\tilde{\eta} \in]0; \eta[$ tel que, si $|x - x_m| \leq \tilde{\epsilon}$, alors $\phi(x) > \phi(x_m) - \tilde{\eta} > \phi(1) = \frac{\beta}{2} + B$.

On a donc, pour tout $N \geq 2$:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{k \in \{0, \dots, N\} \\ \text{tq } |\frac{k}{N} - x_m| > \epsilon}} C_N^k e^{-H(\frac{2k}{N}-1)} &< D_2 \frac{e^{N(\phi(x_m) - \eta) - \frac{\beta}{2}}}{\sqrt{2\pi N}} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{N}(1 - \frac{k}{N})}} + e^{-H(-1)} + e^{-H(1)} \\ &\leq e^{-\frac{\beta}{2}} (D_2 e^{N(\phi(x_m) - \eta)} \frac{N-1}{\sqrt{\pi}} + e^{(\frac{\beta}{2}-B)N} + e^{(\frac{\beta}{2}+B)N}) \end{aligned}$$

(puisque $\frac{1}{\frac{k}{N}(1 - \frac{k}{N})} \leq \sqrt{2N}$ si $N \geq 2$)

D'autre part, puisque $\text{Card} \{k \in \{1, \dots, N-1\} \text{ tq } |\frac{k}{N} - x_m| \leq \tilde{\epsilon}\} \geq 1$ pour tout N assez grand, on a, pour N assez grand :

$$\sum_{k=0}^N C_N^k e^{-H(\frac{2k}{N}-1)} \geq D_1 \frac{e^{N(\phi(x_m) - \tilde{\eta}) - \frac{\beta}{2}}}{\sqrt{2\pi N}} \min_{x \in]0; 1[} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} = 2D_1 \frac{e^{N(\phi(x_m) - \tilde{\eta}) - \frac{\beta}{2}}}{\sqrt{2\pi N}}$$

Comme $\phi(x_m) - \tilde{\eta} > \phi(x_m) - \eta$, $\frac{\beta}{2} - B$ et $\frac{\beta}{2} + B$:

$$e^{-\frac{\beta}{2}} (D_2 e^{N(\phi(x_m) - \eta)} \frac{N-1}{\sqrt{\pi}} + e^{(\frac{\beta}{2}-B)N} + e^{(\frac{\beta}{2}+B)N}) = o\left(2D_1 \frac{e^{N(\phi(x_m) - \tilde{\eta}) - \frac{\beta}{2}}}{\sqrt{2\pi N}}\right)$$

Et donc, quand N tend vers $+\infty$:

$$\sum_{\substack{k \in \{0, \dots, N\} \\ \text{tq } |\frac{k}{N} - x_m| > \epsilon}} C_N^k e^{-H(\frac{2k}{N}-1)} = o\left(\sum_{k=0}^N C_N^k e^{-H(\frac{2k}{N}-1)}\right)$$

□

Ce lemme nous permet maintenant de calculer simplement $\lim_{N \rightarrow +\infty} \langle m \rangle$.

Théorème 7.1.2 $\lim_{N \rightarrow +\infty} \langle m \rangle = (2x_m - 1)$

Démonstration :

Soit $\epsilon > 0$ quelconque.

$$\begin{aligned}
\langle m \rangle &= \frac{\sum_{k=0}^N C_N^k \left(\frac{2k}{N} - 1\right) e^{-H(\frac{2k}{N}-1)}}{\sum_{k=0}^N C_N^k e^{-H(\frac{2k}{N}-1)}} \\
&= \frac{\sum_{\substack{k \in \{0, \dots, N\} \\ \text{tq } |\frac{k}{N} - x_m| \leq \epsilon}} C_N^k \left(\frac{2k}{N} - 1\right) e^{-H(\frac{2k}{N}-1)} + \sum_{\substack{k \in \{0, \dots, N\} \\ \text{tq } |\frac{k}{N} - x_m| > \epsilon}} C_N^k \left(\frac{2k}{N} - 1\right) e^{-H(\frac{2k}{N}-1)}}{\sum_{k=0}^N C_N^k e^{-H(\frac{2k}{N}-1)}} \\
&= \frac{\sum_{\substack{k \in \{0, \dots, N\} \\ \text{tq } |\frac{k}{N} - x_m| \leq \epsilon}} C_N^k \left(\frac{2k}{N} - 1\right) e^{-H(\frac{2k}{N}-1)}}{\sum_{k=0}^N C_N^k e^{-H(\frac{2k}{N}-1)}} + o(1)
\end{aligned}$$

(d'après le lemme 7.1.1, puisque

$$\left| \sum_{\substack{k \in \{0, \dots, N\} \\ \text{tq } |\frac{k}{N} - x_m| > \epsilon}} C_N^k \left(\frac{2k}{N} - 1\right) e^{-H(\frac{2k}{N}-1)} \right| \leq \sum_{\substack{k \in \{0, \dots, N\} \\ \text{tq } |\frac{k}{N} - x_m| > \epsilon}} C_N^k e^{-H(\frac{2k}{N}-1)} = o\left(\sum_{k=0}^N C_N^k e^{-H(\frac{2k}{N}-1)}\right) \quad)$$

Pour $k \in \{0, \dots, N\}$ tel que $|\frac{k}{N} - x_m| \leq \epsilon$, $2x_m - 1 - 2\epsilon \leq \frac{2k}{N} - 1 \leq 2x_m - 1 + 2\epsilon$, donc :

$$(2x_m - 1 - 2\epsilon) \frac{\sum_{\substack{k \in \{0, \dots, N\} \\ \text{tq } |\frac{k}{N} - x_m| \leq \epsilon}} C_N^k e^{-H(\frac{2k}{N}-1)}}{\sum_{k=0}^N C_N^k e^{-H(\frac{2k}{N}-1)}} + o(1) \leq \langle m \rangle \leq (2x_m - 1 + 2\epsilon) \frac{\sum_{\substack{k \in \{0, \dots, N\} \\ \text{tq } |\frac{k}{N} - x_m| \leq \epsilon}} C_N^k e^{-H(\frac{2k}{N}-1)}}{\sum_{k=0}^N C_N^k e^{-H(\frac{2k}{N}-1)}} + o(1)$$

D'après le lemme 7.1.1,

$$\sum_{\substack{k \in \{0, \dots, N\} \\ \text{tq } |\frac{k}{N} - x_m| \leq \epsilon}} C_N^k e^{-H(\frac{2k}{N}-1)} \sim \sum_{k=0}^N C_N^k e^{-H(\frac{2k}{N}-1)}$$

donc, d'après la double inégalité précédente,

$$2x_m - 1 - 2\epsilon \leq \liminf_{N \rightarrow \infty} \langle m \rangle \leq \limsup_{N \rightarrow \infty} \langle m \rangle \leq 2x_m - 1 + 2\epsilon$$

Ce résultat étant vrai pour tout ϵ , $\lim_{N \rightarrow \infty} \langle m \rangle = 2x_m - 1$.

Théorème 7.1.3 *Si on note $m_\infty = \lim_{N \rightarrow \infty} \langle m \rangle$, alors m_∞ est l'unique solution sur $[0; 1]$ de l'équation en y :*

$$y = \tanh(\beta y + B)$$

Démonstration :

Comme $\phi(1-x) = \phi(x) + 2B(1-2x)$, si $B > 0$ et si $x < \frac{1}{2}$, $\phi(x) < \phi(1-x)$. La fonction ϕ ne peut donc pas atteindre son maximum x_m sur l'intervalle $[0; \frac{1}{2}[$, et $x_m \in [\frac{1}{2}, 1[$, donc $1 \geq m_\infty = 2x_m - 1 \geq 0$.

La dérivée de ϕ par rapport à x s'annule en x_m :

$$4\beta x_m + 2(B - \beta) - \ln x_m + \ln(1 - x_m) = 0$$

Comme $m_\infty = 2x_m - 1$, on en déduit une équation en m_∞ :

$$2(\beta m_\infty + B) - \ln\left(\frac{1 + m_\infty}{1 - m_\infty}\right) = 0$$

En prenant l'exponentielle de cette dernière equation, on trouve :

$$m_\infty = \tanh(\beta m_\infty + B)$$

On vérifie en dérivant que cette équation admet une unique solution sur l'intervalle $[0; 1]$; m_∞ est donc cette unique solution.

□

Grâce au lemme 7.1.1, nous pouvons aussi calculer la valeur limite de l'énergie libre par particule.

Théorème 7.1.4 *Lorsque N tend vers $+\infty$, l'énergie libre par particule $F_N = \frac{1}{N} \log Z_N$ admet une limite :*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} F_N = \phi(x_m)$$

Démonstration :

Soit $\eta > 0$ quelconque. Soit $\epsilon > 0$ tel que, pour tout $x \in [x_m - \epsilon; x_m + \epsilon]$, $\phi(x) \geq \phi(x_m) - \eta$. On peut choisir ϵ suffisamment petit pour que $x_m - \epsilon > 0$ et $x_m + \epsilon < 1$. D'après le lemme 7.1.1,

$$\sum_{\substack{k \in \{0, \dots, N\} \\ \text{tq } |\frac{k}{N} - x_m| \leq \epsilon}} C_N^k e^{-H(\frac{2k}{N}-1)} \sim \sum_{k=0}^N C_N^k e^{-H(\frac{2k}{N}-1)} = Z_N$$

donc $F_N = \frac{1}{N} (\log (\sum_{\substack{k \in \{0, \dots, N\} \\ \text{tq } |\frac{k}{N} - x_m| \leq \epsilon}} C_N^k e^{-H(\frac{2k}{N}-1)}) + o(1))$.

Si on choisit D_1 et D_2 comme dans la démonstration du lemme 7.1.1, et si on pose $C_{N,\epsilon} = \text{Card} \{k \in \{0, \dots, N\} \text{ tq } |\frac{k}{N} - x_m| \leq \epsilon\}$, on a :

$$\begin{aligned} 2\sqrt{2}N\epsilon D_1 \frac{e^{N(\phi(x_m)-\eta)-\frac{\beta}{2}}}{\sqrt{\pi N}} &\leq C_{N,\eta} D_1 \frac{e^{N(\phi(x_m)-\epsilon)-\frac{\beta}{2}}}{\sqrt{2\pi N}} \inf_{x \in [\frac{1}{N}; \frac{N-1}{N}]} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \\ &\leq \sum_{\substack{k \in \{0, \dots, N\} \\ \text{tq } |\frac{k}{N} - x_m| \leq \epsilon}} C_N^k e^{-H(\frac{2k}{N}-1)} \\ &\leq C_{N,\epsilon} D_2 \frac{e^{N(\phi(x_m))-\frac{\beta}{2}}}{\sqrt{2\pi N}} \sup_{x \in [\frac{1}{N}; \frac{N-1}{N}]} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \\ &\leq (2N\epsilon + 1) D_2 \frac{e^{N(\phi(x_m))-\frac{\beta}{2}}}{\sqrt{\pi}} \end{aligned}$$

(puisque $2 = \inf_{x \in [\frac{1}{N}; \frac{N-1}{N}]} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \leq \sup_{x \in [\frac{1}{N}; \frac{N-1}{N}]} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \leq \sqrt{2N}$ pour $N \geq 2$
et puisque $2N\epsilon \leq C_{N,\epsilon} \leq 2N\epsilon + 1$)

Donc :

$$\phi(x_m) - \eta \leq \liminf_{N \rightarrow +\infty} \phi(x_m) \leq \limsup_{N \rightarrow \infty} \leq \phi(x_m)$$

L'inégalité précédente étant vraie pour tout $\eta > 0$, le théorème est démontré. □

7.2 Compléments pour la démonstration du théorème 3.3.2

7.2.1 Majoration de $\|\mu_{T(r)}^{l,+} - \mu_{T(r)}^{l,0}\|_{VT}$

Nous reprendrons ici les notations utilisées lors de la démonstration du théorème 3.3.2 et démontrerons l'inégalité :

$$\|\mu_{T(r)}^{l,+} - \mu_{T(r)}^{l,0}\|_{VT} \leq \frac{4f_{\max}^2}{f_{\min}^2} \left(\sum_{i \in \partial T(r)} \|\nu_i^+ - \nu_i^0\|_{VT} \right)$$

Effectuons tout d'abord quelques remarques.

Premièrement, pour tout ensemble F de sommets de $\partial T(r)$:

$$\sum_{\{\sigma_i\} \in \{-1, +1\}^F} \left(\prod_{j \in F} \nu_j^0(\sigma_j) \right) = \prod_{j \in F} (\nu_j^0(-1) + \nu_j^0(+1)) = 1$$

(puisque, pour tout $j \in \partial T(r)$, ν_j^0 est une mesure de probabilité sur l'ensemble $\{-1; +1\}$)
On en déduit en particulier :

$$\sum_{\{\sigma_i\} \in \{-1; +1\}^{V_r}} \left(\prod_{j \in \partial T(r)} \nu_j^0(\sigma_j) \right) = \sum_{\{\sigma_i\} \in \{-1; +1\}^{V_r \setminus \partial T(r)}} \sum_{\{\sigma_i\} \in \{-1; +1\}^{\partial T(r)}} \left(\prod_{j \in \partial T(r)} \nu_j^0(\sigma_j) \right) = 2^{|\partial T(r)|}$$

Ces égalités restent vraies lorsqu'on remplace ν_j^0 par ν_j^+ .

Deuxièmement :

$$Z^0 = \sum_{\{\sigma_i\} \in \{-1; +1\}^{V_r}} f(\{\sigma_i\}) \prod_{j \in \partial T(r)} \nu_j^0(\sigma_j)$$

Donc :

$$f_{\min} 2^{|\partial T(r)|} = f_{\min} \sum_{\{\sigma_i\} \in \{-1; +1\}^{V_r}} \left(\prod_{j \in \partial T(r)} \nu_j^0(\sigma_j) \right) \leq Z^0 \leq f_{\max} 2^{|\partial T(r)|}$$

De même pour Z^+ .

Enfin, si on note $\partial T(r) = \{k_1, \dots, k_n\}$:

$$\begin{aligned} \sum_{\{\sigma_i\} \in \{-1; +1\}^{\partial T(r)}} \left| \prod_{j \in \partial T(r)} \nu_j^+(\sigma_j) - \prod_{j \in \partial T(r)} \nu_j^0(\sigma_j) \right| &= \sum_{\{\sigma_i\} \in \{-1; +1\}^n} \left| \sum_{i=1}^n \left(\left(\prod_{j=1}^{i-1} \nu_{k_j}^0(\sigma_j) \right) \left(\prod_{j=i}^n \nu_{k_j}^+(\sigma_j) \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(\prod_{j=1}^i \nu_{k_j}^0(\sigma_j) \right) \left(\prod_{j=i+1}^n \nu_{k_j}^+(\sigma_j) \right) \right) \right| \\ &\leq \sum_{\{\sigma_i\} \in \{-1; +1\}^n} \left(\sum_{i=1}^n \left(\prod_{j \neq i} \nu_{k_j}(\sigma_j) \right) \left| \nu_{k_i}^+(\sigma_i) - \nu_{k_i}^0(\sigma_i) \right| \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{\{\sigma_i\} \in \{-1; +1\}^{n-1}} \left(\prod_{j \neq i} \nu_{k_j}(\sigma_j) \right) \right) \\ &\quad \times \left(\left| \nu_{k_i}^+(-1) - \nu_{k_i}^0(-1) \right| + \left| \nu_{k_i}^+(+1) - \nu_{k_i}^0(+1) \right| \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\left| \nu_{k_i}^+(-1) - \nu_{k_i}^0(-1) \right| + \left| \nu_{k_i}^+(+1) - \nu_{k_i}^0(+1) \right| \right) \\ &= \sum_{i=1}^n 2 \left\| \nu_{k_i}^+ - \nu_{k_i}^0 \right\|_{VT} \end{aligned}$$

Nous pouvons donc écrire :

$$\begin{aligned}
\|\mu_{T(r)}^{l,+} - \mu_{T(r)}^{l,0}\|_{VT} &= \sum_{\{\sigma_i\} \in \{-1,+1\}^{V_r}} |\mu_{T(r)}^{l,+}(\{\sigma_i\}) - \mu_{T(r)}^{l,0}(\{\sigma_i\})| \\
&= \sum_{\{\sigma_i\} \in \{-1,+1\}^{V_r}} |f(\{\sigma_i\}) \left(\frac{\prod_{j \in \partial T(r)} \nu_j^+(\sigma_j)}{Z^+} - \frac{\prod_{j \in \partial T(r)} \nu_j^0(\sigma_j)}{Z^0} \right)| \\
&\leq f_{\max} \sum_{\{\sigma_i\} \in \{-1,+1\}^{V_r}} \left| \frac{\prod_{j \in \partial T(r)} \nu_j^+(\sigma_j)}{Z^+} - \frac{\prod_{j \in \partial T(r)} \nu_j^0(\sigma_j)}{Z^0} \right| \\
&= 2^{|T(r-1)|} f_{\max} \sum_{\{\sigma_i\} \in \{-1,+1\}^{\partial T(r)}} \left| \frac{\prod_{j \in \partial T(r)} \nu_j^+(\sigma_j)}{Z^+} - \frac{\prod_{j \in \partial T(r)} \nu_j^0(\sigma_j)}{Z^0} \right| \\
&\leq 2^{|T(r-1)|} f_{\max} \sum_{\{\sigma_i\} \in \{-1,+1\}^{\partial T(r)}} \left(\frac{1}{Z^+} \left| \prod_{j \in \partial T(r)} \nu_j^+(\sigma_j) - \prod_{j \in \partial T(r)} \nu_j^0(\sigma_j) \right| \right. \\
&\quad \left. + \left(\prod_{j \in \partial T(r)} \nu_j^0(\sigma_j) \right) \left| \frac{1}{Z^+} - \frac{1}{Z^0} \right| \right) \\
&= 2^{|T(r-1)|} f_{\max} \left(\frac{1}{Z^+} \sum_{\{\sigma_i\} \in \{-1,+1\}^{\partial T(r)}} \left| \prod_{j \in \partial T(r)} \nu_j^+(\sigma_j) - \prod_{j \in \partial T(r)} \nu_j^0(\sigma_j) \right| \right. \\
&\quad \left. + \left| \frac{1}{Z^+} - \frac{1}{Z^0} \right| \right) \\
&= 2^{|T(r-1)|} f_{\max} \left(\frac{1}{Z^+} \sum_{\{\sigma_i\} \in \{-1,+1\}^{\partial T(r)}} \left| \prod_{j \in \partial T(r)} \nu_j^+(\sigma_j) - \prod_{j \in \partial T(r)} \nu_j^0(\sigma_j) \right| \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{Z^0 Z^+} \left| \sum_{\{\sigma_i\} \in \{-1,+1\}^{V_r}} f(\{\sigma_i\}) \left(\prod_{j \in \partial T(r)} \nu_j^+(\sigma_j) - \prod_{j \in \partial T(r)} \nu_j^0(\sigma_j) \right) \right| \right) \\
&\leq 2^{|T(r-1)|} f_{\max} \left(\frac{1}{Z^+} + \frac{2^{|T(r-1)|} f_{\max}}{Z^0 Z^+} \right) \\
&\quad \times \sum_{\{\sigma_i\} \in \{-1,+1\}^{\partial T(r)}} \left| \prod_{j \in \partial T(r)} \nu_j^+(\sigma_j) - \prod_{j \in \partial T(r)} \nu_j^0(\sigma_j) \right| \\
&\leq \frac{2f_{\max}}{f_{\min}} \left(1 + \frac{f_{\max}}{f_{\min}} \right) \left(\sum_{i \in \partial T(r)} \|\nu_i^+ - \nu_i^0\|_{VT} \right) \\
&\leq \frac{4f_{\max}^2}{f_{\min}^2} \left(\sum_{i \in \partial T(r)} \|\nu_i^+ - \nu_i^0\|_{VT} \right)
\end{aligned}$$

(puisque $f_{\max} \geq f_{\min}$ donc $1 + \frac{f_{\max}}{f_{\min}} \leq 2 \frac{f_{\max}}{f_{\min}}$)

7.2.2 Inégalités reliant $m_{T,\{B_i\}}^{l,+} - m_{T,\{B_i\}}^{l,0}$ et $\sum_{i \in \partial T(l)} \langle \sigma_*; \sigma_i \rangle_{T(l),\{B_i\}}$

Nous démontrerons ici les deux inégalités entre les quantités $m_{T,\{B_i\}}^{l,+} - m_{T,\{B_i\}}^{l,0}$ et $\sum_{i \in \partial T(l)} \langle \sigma_*; \sigma_i \rangle_{T(l),\{B_i\}}$ que nous avons admises lors de la démonstration du théorème 3.3.2.

Fixons T un arbre aléatoire muni d'un champ magnétique $\{B_i\}$.

Effectuons tout d'abord une remarque préliminaire.

Le calcul montre que, si, pour tout arbre fini \tilde{T} , on note $m_i^{\tilde{T}}(\{B_k\})$ l'aimantation moyenne au sommet i pour la loi d'Ising associée à \tilde{T} avec température inverse β et champ magnétique $\{B_k\}$, alors, pour tout champ magnétique $\{B'_k\}$ sur \tilde{T} :

$$\langle \sigma_i; \sigma_j \rangle_{\tilde{T},\{B'_k\}} = \frac{\partial m_i^{\tilde{T}}(\{B'_k\})}{\partial B_j}$$

D'après l'inégalité GHS (3.2.2), $\frac{\partial \langle \sigma_i; \sigma_j \rangle_{\tilde{T},\{B_k\}}}{\partial B_k} \leq 0$ donc, si $B'_k \geq B_k$ pour tout k , on a :

$$\langle \sigma_i; \sigma_j \rangle_{\tilde{T},\{B'_k\}} \leq \langle \sigma_i; \sigma_j \rangle_{\tilde{T},\{B_k\}}$$

Démonstration de la première inégalité :

Montrons que $m_{T,\{B_k\}}^{l,+} - m_{T,\{B_k\}}^{l,0} \leq \sum_{i \in \partial T(l)} \langle \sigma_*; \sigma_i \rangle_{T(l),\{B_i\}}$.

On note s_1, \dots, s_n les sommets de $\partial T(l)$. Pour tout $t \in \{0, 1, \dots, n\}$, on note $\{B_k^{(t)}\}_{(k \in T(l))}$ le champ magnétique tel que $B_k^{(t)} = B_k$ pour tout $k \notin \{s_1, \dots, s_t\}$ et $B_k^{(t)} = +\infty$ sinon. On a :

$$m_{T,\{B_k\}}^{l,+} - m_{T,\{B_k\}}^{l,0} = m^{T(l)}(\{B_k^{(n)}\}) - m^{T(l)}(\{B_k^{(0)}\}) = \sum_{r=1}^n (m^{T(l)}(\{B_k^{(r)}\}) - m^{T(l)}(\{B_k^{(r-1)}\}))$$

Or, pour tout $r \in \{1, \dots, n\}$, $m^{T(l)}(\{B_k^{(r)}\}) - m^{T(l)}(\{B_k^{(r-1)}\}) \leq \langle \sigma_*; \sigma_{s_r} \rangle_{T(l),\{B_i\}}$.

En effet, si on note, pour tout r , μ_r la loi d'Ising sur $T(l)$ avec température inverse β et champ magnétique $\{B^{(r)}\}$, on remarque que, pour toute fonction $f : \{-1; +1\}^{T(l)} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\langle f \rangle_{\mu_r} = \frac{\langle f \mathbb{I}(\sigma_{s_r} = +1) \rangle_{\mu_{r-1}}}{\langle \mathbb{I}(\sigma_{s_r} = +1) \rangle_{\mu_{r-1}}}$$

(Cette égalité se démontre facilement par le calcul, elle exprime que μ_r est, en un certain sens, la restriction de μ_{r-1} à l'ensemble des configurations pour lesquelles $\sigma_{s_r} = +1$.)

Donc :

$$m^{T(l)}(\{B_k^{(r)}\}) = \frac{\langle \sigma_* \mathbb{I}(\sigma_{s_r} = +1) \rangle_{\mu_{r-1}}}{\langle \mathbb{I}(\sigma_{s_r} = +1) \rangle_{\mu_{r-1}}}$$

Et puisque, pour tout r , $\mathbb{I}(\sigma_{s_r} = +1) = \frac{1+\sigma_{s_r}}{2}$, on a :

$$m^{T(l)}(\{B_k^{(r)}\}) = \frac{\langle \sigma_* \rangle_{\mu_{r-1}} + \langle \sigma_* \sigma_{s_r} \rangle_{\mu_{r-1}}}{1 + \langle \sigma_{s_r} \rangle_{\mu_{r-1}}}$$

Donc, comme $m^{T(l)}(\{B_k^{(r-1)}\}) = \langle \sigma_* \rangle_{\mu_{r-1}}$:

$$\begin{aligned} m^{T(l)}(\{B_k^{(r)}\}) - m^{T(l)}(\{B_k^{(r-1)}\}) &= \frac{\langle \sigma_*; \sigma_{s_r} \rangle_{T(l), \{B_i^{(r-1)}\}}}{1 + \langle \sigma_{s_r} \rangle_{\mu_{r-1}}} \\ &\leq \langle \sigma_*; \sigma_{s_r} \rangle_{T(l), \{B_i^{(r-1)}\}} \end{aligned}$$

(puisque $\langle \sigma_{s_r} \rangle_{\mu_{r-1}} \geq 0$ d'après l'inégalité de Griffiths (3.2.1))

Puisque $B_k^{(r-1)} \geq B_k$ pour tout sommet k de $T(l)$, $\langle \sigma_*; \sigma_{s_r} \rangle_{T(l), \{B_k^{(r-1)}\}} \leq \langle \sigma_*; \sigma_{s_r} \rangle_{T(l), \{B_k\}}$ et on a bien, pour tout $r \in \{1, \dots, n\}$:

$$m^{T(l)}(\{B_k^{(r)}\}) - m^{T(l)}(\{B_k^{(r-1)}\}) \leq \langle \sigma_*; \sigma_{s_r} \rangle_{T(l), \{B_i\}}$$

Donc $m_{T, \{B_k\}}^{l,+} - m_{T, \{B_k\}}^{l,0} \leq \sum_{i \in \partial T(l)} \langle \sigma_*; \sigma_i \rangle_{T(l), \{B_i\}}$.

Démonstration de la deuxième inégalité :

On rappelle qu'on note $B'_k = B_k - \frac{B_{\min}}{2}$ si $k \in \partial T(l)$ et $B'_k = B_k$ sinon.

Montrons que $\sum_{i \in \partial T(l)} \langle \sigma_*; \sigma_i \rangle_{T(l), \{B_i\}} \leq \frac{2}{B_{\min}} (m_{T, \{B'_k\}}^{l,+} - m_{T, \{B'_k\}}^{l,0})$.

On note $\tilde{B}_k(t) = B_k$ pour k n'appartenant pas à $\partial T(l)$ et $\tilde{B}_k(t) = B_k + t$ sinon. Si on note $f(t) = m_*^{T(l)}(\{\tilde{B}_k(t)\})$ pour tout $t > -B_{\min}$, c'est-à-dire l'aimantation à la racine pour un modèle d'Ising sur $T(l)$ avec température inverse β et champ magnétique $\{\tilde{B}_k(t)\}$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \partial T(l)} \langle \sigma_*; \sigma_i \rangle_{T(l), \{B_i\}} &= \sum_{i \in \partial T(l)} \frac{\partial m_*^{T(l)}}{\partial B_i}(\{B_k\}) \\ &= f'(0) \end{aligned}$$

Or f est concave (puisque $f''(t) = \sum_{i,j \in \partial T(l)} \frac{\partial^2 m_*^{T(l)}}{\partial B_i \partial B_j}(\{\tilde{B}_k(t)\}) \leq 0$ d'après l'inégalité GHS (3.2.2)), donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in \partial T(l)} \langle \sigma_*; \sigma_i \rangle_{T(l), \{B_i\}} &= f'(0) \\
&\leq \frac{f(0) - f(-\frac{B_{\min}}{2})}{B_{\min}/2} \\
&= \frac{2}{B_{\min}} (m^{T(l)}(\{\tilde{B}_k(0)\}) - m^{T(l)}(\{\tilde{B}_k(-\frac{B_{\min}}{2})\})) \\
&= \frac{2}{B_{\min}} (m^{T(l)}(\{\tilde{B}_k(0)\}) - m_{T, \{B'_k\}}^{l,0}) \\
&\leq \frac{2}{B_{\min}} (m_{T, \{B'_k\}}^{l,+} - m_{T, \{B'_k\}}^{l,0})
\end{aligned}$$

(d'après l'inégalité de Griffiths (3.2.1) : puisque $\tilde{B}(+\infty) \geq \tilde{B}(0)$ pour tout k , $m_{T, \{B'_k\}}^{l,+} = m^{T(l)}(\{\tilde{B}(+\infty)\}) \geq m^{T(l)}(\{\tilde{B}(0)\})$)

7.2.3 Démonstration du lemme 3.3.3

Nous démontrerons ici le lemme dont l'énoncé suit :

Lemme 7.2.1 *Il existe une fonction $c : \mathbb{R}^{+2} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ (croissante en chacune de ses deux variables) telle que, pour tout arbre aléatoire T muni d'un champ magnétique $\{B_i\}$ et tout $k \geq 0$, la propriété suivante soit vraie :*

Si s est un sommet de $\partial T(k)$ et si $\langle i, j \rangle$ est une arête de $T(k)$ se trouvant sur le chemin reliant la racine $$ et le sommet s (avec i plus proche de $*$ que de s), et si on note t l'entier tel que i appartient à $\partial T(t)$, alors :*

$$\langle \sigma_*; \sigma_s \rangle_{T(k), \{B_i\}} \leq c(\beta, B_i) \langle \sigma_*; \sigma_i \rangle_{T(t), \{B_i\}} \langle \sigma_j; \sigma_s \rangle_{T'_j(k-t-1), \{B_i\}}$$

(où T'_j est le sous-arbre de T constitué de j et de tous ses descendants, avec racine en j)

Démonstration :

Nous allons démontrer plus précisément que, si on note $c(\beta, B_i) = \cosh^2(2\beta + B_i)$, alors :

$$\langle \sigma_*; \sigma_s \rangle_{T(k), \{B_i\}} \leq c(\beta, B_i) \langle \sigma_*; \sigma_i \rangle_{T(t), \{B_i\}} \langle \sigma_j; \sigma_s \rangle_{T'_j(k-t-1), \{B_i\}}$$

Nous aurons à effectuer quelques calculs au cours de la démonstration, qui utiliseront les notations suivantes.

On note $T_* = (V_*, E_*)$ le sous-graphe de $T(k) = (V, E)$ constitué des sommets reliés à $*$ par un chemin ne passant pas par i (ainsi que des arêtes qui les lient) et $T_s = (V_s, E_s)$ le sous-graphe constitué des sommets qui ne sont pas dans T_* et qui ne sont pas i , comme l'indique la figure 14. Notons \mathcal{C} , \mathcal{C}_s et \mathcal{C}_* les ensembles de configurations correspondant aux ensembles de sommets V , V_s et V_* .

L'idée qui simplifiera les calculs sera d'exprimer les grandeurs étudiées en fonction d'un petit nombre de quantités ne dépendant que des propriétés de T_* d'une part, et de celles de T_s d'autre part.

Si \mathbf{x}_s est un élément de \mathcal{C}_s et \mathbf{x}_* un élément de \mathcal{C}_* , on notera, pour tout $\epsilon \in \{-1; +1\}$, $(\mathbf{x}_*, \epsilon, \mathbf{x}_s)$ l'élément de \mathcal{C} dont la composante indexée par i vaut ϵ et dont les composantes indexées par un sommet de T_s (resp. T_*) sont égales aux composantes de \mathbf{x}_s (resp. \mathbf{x}_*) indexées par le même sommet.

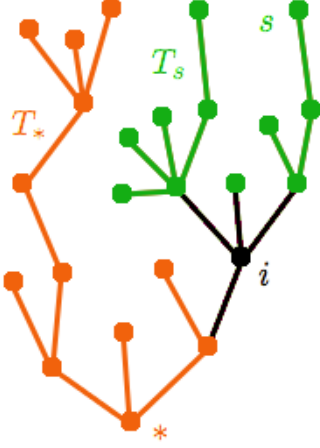


FIG. 14 – L'arbre $T(k)$

Remarquons qu'il existe des fonctions f_s^+ , f_s^- , f_*^+ et f_*^- telles que, si $\mathbf{x}_s \in \mathcal{C}_s$ et $\mathbf{x}_* \in \mathcal{C}_*$, alors :

$$\mu(\mathbf{x}_*, -1, \mathbf{x}_s) = \frac{f_*^-(\mathbf{x}_*)f_s^-(\mathbf{x}_s)e^{-B_i}}{Z}$$

$$\mu(\mathbf{x}_*, +1, \mathbf{x}_s) = \frac{f_*^+(\mathbf{x}_*)f_s^+(\mathbf{x}_s)e^{B_i}}{Z}$$

(où μ est la loi d'Ising associée à $T(k)$, à la température inverse β et au champ magnétique $\{B_i\}$, et Z la fonction de partition correspondante)

On définit ces fonctions de la façon suivante :

Si $\mathbf{x}_s = (\sigma_{r_1}, \dots, \sigma_{r_n})$, où les r_l sont les éléments de V_s :

$$f_s^\eta(\mathbf{x}_s) = \exp(\beta(\sum_{\langle r, r' \rangle \in E_s} \sigma_r \sigma_{r'} + \epsilon(\eta) \sum_{r \in V_s} \sigma_r) + \sum_{r \in V_s} B_r \sigma_r)$$

Si $\mathbf{x}_* = (\sigma_{q_1}, \dots, \sigma_{q_n})$, où les q_l sont les éléments de V_* :

$$f_*^\eta(\mathbf{x}_*) = \exp(\beta(\sum_{\langle q, q' \rangle \in E_*} \sigma_q \sigma_{q'} + \epsilon(\eta) \sum_{q \in V_*} \sigma_q) + \sum_{q \in V_*} B_q \sigma_q)$$

(où $\epsilon(\eta) = -1$ si $\eta = -$ et $\epsilon(\eta) = +1$ si $\eta = +$)

Pour tout $w \in \{*, s\}$ et tout $\eta = -$ ou $+$, on note :

$$\alpha_{w, \eta} = \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{C}_w} \sigma_w(\mathbf{x}) f_w^\eta(\mathbf{x})$$

$$\delta_{w, \eta} = \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{C}_w} f_w^\eta(\mathbf{x})$$

(où $\sigma_w(\mathbf{x})$ désigne la composante de \mathbf{x} indexée par le sommet w)

On vérifie facilement par le calcul les égalités suivantes :

$$\langle \sigma_*; \sigma_s \rangle_{T(k), \{B_j\}} = \frac{(\alpha_{*,+} \delta_{*,-} - \alpha_{*,-} \delta_{*,+})(\alpha_{s,+} \delta_{s,-} - \alpha_{s,-} \delta_{s,+})}{(\delta_{*,+} \delta_{s,+} e^{B_i} + \delta_{*,-} \delta_{s,-} e^{-B_i})^2}$$

$$\langle \sigma_i; \sigma_* \rangle_{T(k), \{B_j\}} = \frac{2\delta_{s,+}\delta_{s,-}(\alpha_{*,+}\delta_{*, -} - \alpha_{*, -}\delta_{*, +})}{(\delta_{*,+}\delta_{s,+}e^{B_i} + \delta_{*, -}\delta_{s,-}e^{-B_i})^2}$$

$$\langle \sigma_i; \sigma_s \rangle_{T(k), \{B_j\}} = \frac{2\delta_{*,+}\delta_{*, -}(\alpha_{s,+}\delta_{s,-} - \alpha_{s,-}\delta_{s,+})}{(\delta_{*,+}\delta_{s,+}e^{B_i} + \delta_{*, -}\delta_{s,-}e^{-B_i})^2}$$

Première partie :

Dans cette première partie, nous démontrerons que, si le sommet i n'a qu'un seul enfant, alors :

$$\langle \sigma_*; \sigma_s \rangle_{T(k), \{B_i\}} \leq c(\beta, B_i) \langle \sigma_*; \sigma_i \rangle_{T(k), \{B_i\}} \langle \sigma_i; \sigma_s \rangle_{T(k), \{B_i\}}$$

D'après les égalités qui viennent d'être énoncées, si on effectue quelques simplifications, on a :

$$\langle \sigma_*; \sigma_s \rangle_{T(k), \{B_i\}} \leq c(\beta, B_i) \langle \sigma_*; \sigma_i \rangle_{T(k), \{B_i\}} \langle \sigma_i; \sigma_s \rangle_{T(k), \{B_i\}}$$

$$\leftrightarrow (\delta_{*,+}\delta_{s,+}e^{B_i} + \delta_{*, -}\delta_{s,-}e^{-B_i})^2 \leq 4c(\beta, B_i)\delta_{*,+}\delta_{*, -}\delta_{s,+}\delta_{s,-}$$

$$\leftrightarrow \left(\frac{\lambda e^{B_i} + \frac{e^{-B_i}}{\lambda}}{2}\right)^2 \leq c(\beta, B_i)$$

(si on pose $\lambda = \sqrt{\frac{\delta_{*,+}\delta_{s,+}}{\delta_{*, -}\delta_{s,-}}}$)

$$\leftrightarrow \cosh(B_i + \mu) \leq \cosh(2\beta + B_i)$$

(si on note $\lambda = e^\mu$)

$$\leftrightarrow \mu \leq 2\beta$$

Or, pour tout $\mathbf{x}_s \in \mathcal{C}_s$, $f_s^+(\mathbf{x}_s) = \exp(2\beta \sum_{r \in V_s \cap \partial i} \sigma_r) f_s^-(\mathbf{x}_s)$.

Comme on a fait l'hypothèse que i n'avait qu'un seul fils, $\{r \in V_s \text{ tq } \langle r, i \rangle \in E\}$ est réduit à un seul élément, donc

$$\sum_{r \in V_s \cap \partial i} \sigma_r = -1 \text{ ou } +1$$

et :

$$f_s^+(\mathbf{x}_s) = e^{2\beta} f_s^-(\mathbf{x}_s) \text{ ou } e^{-2\beta} f_s^-(\mathbf{x}_s)$$

Donc $f_s^+(\mathbf{x}_s) \leq e^{2\beta} f_s^-(\mathbf{x}_s)$.

On en déduit :

$$\delta_{s,+} \leq e^{2\beta} \delta_{s,-}$$

De même :

$$\delta_{*,+} \leq e^{2\beta} \delta_{*, -}$$

Donc $\lambda \leq e^{2\beta}$ et $\mu \leq 2\beta$.

Le résultat voulu est donc démontré.

Deuxième partie :

Commençons par deux remarques.

Première remarque :

Rappelons qu'on a déjà vu, au paragraphe 7.2.2 que, si \tilde{T} est un arbre fini et si $\{B_k\}$ et $\{B'_k\}$ sont deux champs magnétiques sur T tels que $B'_k \geq B_k$ pour tout sommet k de \tilde{T} , alors :

$$\langle \sigma_i; \sigma_j \rangle_{\tilde{T}, \{B'_k\}} \leq \langle \sigma_i; \sigma_j \rangle_{\tilde{T}, \{B_k\}}$$

En conséquence, si T' est un sous-arbre de \tilde{T} , pour tout champ magnétique $\{B_k\}$ sur \tilde{T} , puisqu'on sait, d'après le lemme 3.3.1, que la marginale sur T' de la loi d'Ising sur \tilde{T} avec température inverse β et champ magnétique $\{B_k\}$ est une loi d'Ising sur T' avec un champ magnétique $\{B'_k\}$ tel que $B'_k \geq B_k$ pour tout sommet k de T' , on a :

$$\langle \sigma_q; \sigma_r \rangle_{T, \{B_k\}_{(k \in T)}} = \langle \sigma_q; \sigma_r \rangle_{T', \{B'_k\}_{(k \in T')}} \leq \langle \sigma_q; \sigma_r \rangle_{T', \{B_k\}_{(k \in T')}}$$

(pour tous sommets q et r de T')

Deuxième remarque :

Chaque sommet est d'autant plus fortement corrélé avec un autre sommet qu'il en est proche, ce qui s'exprime par l'inégalité suivante :

$$\langle \sigma_*; \sigma_s \rangle_{T(k), \{B_j\}} \leq \langle \sigma_i; \sigma_s \rangle_{T(k), \{B_j\}}$$

La démonstration se fait grâce aux égalités que nous avons écrites au début du paragraphe :

$$\begin{aligned} & \langle \sigma_*; \sigma_s \rangle_{T(k), \{B_j\}} \leq \langle \sigma_i; \sigma_s \rangle_{T(k), \{B_j\}} \\ & \rightarrow \frac{(\alpha_{*,+} \delta_{*,-} - \alpha_{*,-} \delta_{*,+})(\alpha_{s,+} \delta_{s,-} - \alpha_{s,-} \delta_{s,+})}{(\delta_{*,+} \delta_{s,+} e^{B_i} + \delta_{*,-} \delta_{s,-} e^{-B_i})^2} \leq \frac{2\delta_{*,+} \delta_{*,-} (\alpha_{s,+} \delta_{s,-} - \alpha_{s,-} \delta_{s,+})}{(\delta_{*,+} \delta_{s,+} e^{B_i} + \delta_{*,-} \delta_{s,-} e^{-B_i})^2} \\ & \rightarrow \alpha_{*,+} \delta_{*,-} - \alpha_{*,-} \delta_{*,+} \leq 2\delta_{*,+} \delta_{*,-} \\ & \rightarrow \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathcal{C}_*} \sigma_*(\mathbf{x}) f_*^+(\mathbf{x}) f_*^-(\mathbf{x}') - \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathcal{C}_*} \sigma_*(\mathbf{x}') f_*^+(\mathbf{x}) f_*^-(\mathbf{x}') \leq 2 \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathcal{C}_*} f_*^+(\mathbf{x}) f_*^-(\mathbf{x}') \end{aligned}$$

Ce qui est vrai, puisque les f_*^+ et f_*^- sont positives, et puisque $\sigma_*(\mathbf{x}) - \sigma_*(\mathbf{x}') \leq 2$ pour tous \mathbf{x} et \mathbf{x}' dans \mathcal{C}_* .

Nous pouvons maintenant achever la preuve du lemme. Notons, comme sur la figure 15, \tilde{T} l'arbre $T'_j(k-t-1)$ auquel on ajoute le sommet i et l'arête $\langle i, j \rangle$. Soit \mathcal{T} l'union des arbres \tilde{T} et $T(t)$.

Comme i n'a qu'un seul enfant dans \mathcal{T} , d'après la première partie de la démonstration, appliquée à l'arbre \mathcal{T} plutôt qu'à $T(k)$:

$$\langle *; s \rangle_{T, \{B_i\}} \leq c(\beta, B_i) \langle \sigma_*; \sigma_i \rangle_{T, \{B_i\}} \langle \sigma_i; \sigma_s \rangle_{T, \{B_i\}}$$

D'après la première remarque :

$$\langle *; s \rangle_{T(k), \{B_i\}} \leq \langle *; s \rangle_{T, \{B_i\}}$$

et :

$$\langle \sigma_i; \sigma_s \rangle_{T, \{B_i\}} \leq \langle \sigma_i; \sigma_s \rangle_{\tilde{T}, \{B_i\}}$$

et :

$$\langle \sigma_*; \sigma_i \rangle_{T, \{B_i\}} \leq \langle \sigma_*; \sigma_i \rangle_{T(t), \{B_i\}}$$

Donc :

$$\langle *; s \rangle_{T, \{B_i\}} \leq c(\beta, B_i) \langle \sigma_*; \sigma_i \rangle_{T(t), \{B_i\}} \langle \sigma_i; \sigma_s \rangle_{\tilde{T}, \{B_i\}}$$

De plus :

$$\langle \sigma_i; \sigma_s \rangle_{\tilde{T}, \{B_i\}} \leq \langle \sigma_j; \sigma_s \rangle_{\tilde{T}, \{B_i\}}$$

(d'après la deuxième remarque, en rempaçant $T(k)$ par \tilde{T} , $*$ par i et i par j)

Enfin, d'après la première remarque :

$$\langle \sigma_j; \sigma_s \rangle_{\tilde{T}, \{B_i\}} \leq \langle \sigma_j; \sigma_s \rangle_{T'_j(k-t-1), \{B_i\}}$$

Donc :

$$\langle \sigma_*; \sigma_s \rangle_{T(k), \{B_i\}} \leq c(\beta, B_i) \langle \sigma_*; \sigma_i \rangle_{T(t), \{B_i\}} \langle \sigma_j; \sigma_s \rangle_{T'_j(k-t-1), \{B_i\}}$$

□

7.2.4 Démonstration du lemme 3.3.4

On rappelle que β_{\max} est fixé.

Pour tout $s \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{T}_{s, B_<}$ l'ensemble des arbres T , munis d'une température inverse $\beta \leq \beta_{\max}$ et d'un champ magnétique $\{B_i\}$ de façon à ce que $B_i \geq B_<$ pour tout $i \in T(s)$. On remarquera que cette définition est légèrement différente de celle qui figure dans le paragraphe 3.3, mais cela généralise légèrement le lemme.

Lemme 7.2.2 *Pour tout $B_< > 0$, il existe $(\gamma_{B_<, n})_{(n \in \mathbb{N})}$ une suite de réels ne dépendant que de $B_<$ et de β_{\max} , convergeant vers 0, telle que, pour tout $l \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $T \in \mathcal{T}_{l, B_<}$:*

$$|m_{T, \{B_i\}}^{l,+} - m_{T, \{B_i\}}^{l,0}| \leq \gamma_{B_<, l}$$

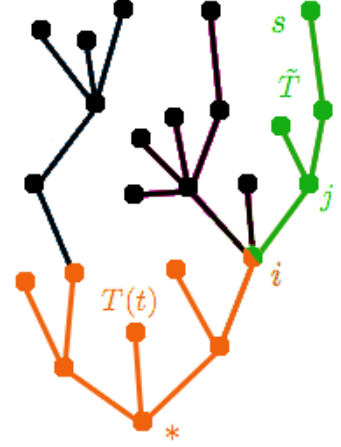


FIG. 15 – L'arbre $T(k)$

Démonstration :

Soit $B_{<} > 0$.

Nous démontrerons en fait plus précisément le résultat suivant.

Il existe $M > 0$ ne dépendant que de $B_{<}$ et de β_{\max} tel que, pour tout $l \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $T \in \mathcal{T}_{l, B_{<}}$:

$$|m_{T, \{B_i\}}^{l,+} - m_{T, \{B_i\}}^{l,0}| \leq \frac{M}{l}$$

On en déduit le résultat voulu en posant $\gamma_{B_{<}, n} = \frac{M}{n}$.

D'après l'inégalité de Griffiths, pour tout T et tout l , $m_{T, \{B_i\}}^{l,+} \geq m_{T, \{B_i\}}^{l,0}$, donc :

$$|m_{T, \{B_i\}}^{l,+} - m_{T, \{B_i\}}^{l,0}| = m_{T, \{B_i\}}^{l,+} - m_{T, \{B_i\}}^{l,0}$$

Montrons donc l'existence de M tel que, pour tout $T \in \mathcal{T}_{l, B_{<}}$ et pour tout $l > 0$:

$$m_{T, \{B_i\}}^{l,+} - m_{T, \{B_i\}}^{l,0} \leq \frac{M}{l}$$

Commençons par remarquer que la suite $(m_{T, \{B_i\}}^{k,+} - m_{T, \{B_i\}}^{k,0})_{(k \in \mathbb{N})}$ est décroissante.

En effet, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout arbre T , $m_{T, \{B_i\}}^{k,+} \geq m_{T, \{B_i\}}^{k+1,+}$: d'après le lemme 4.1, la loi d'Ising sur $T(k+1)$ avec conditions au bord positives est une loi d'Ising sur $T(k)$ sans conditions au bord, pour un champ certain magnétique $\{B'_i\}$ qui vérifie que $B'_i = B_i$ pour tout sommet i de $T(k-1)$. D'autre part, la loi d'Ising sur $T(k)$ avec conditions au bord positives est la loi d'Ising sur $T(k)$ sans conditions au bord associée à un champ magnétique $\{B''_i\}$ qui est tel que $B''_i = B_i$ pour tout $i \in T(k-1)$ et $B''_i = +\infty$ pour tout $i \in \partial T(k)$. Comme $B'_i \leq B''_i$ pour tout sommet i de $T(k)$, d'après l'inégalité de Griffiths, $m_{T, \{B_i\}}^{k,+} \geq m_{T, \{B_i\}}^{k+1,+}$.

De même, $m_{T, \{B_i\}}^{k,0} \leq m_{T, \{B_i\}}^{k+1,0}$.

Donc, pour tout k , $m_{T, \{B_i\}}^{k,+} - m_{T, \{B_i\}}^{k,0} \geq m_{T, \{B_i\}}^{k+1,+} - m_{T, \{B_i\}}^{k+1,0}$ et la suite est bien décroissante.

Montrons maintenant (ce qui nous permettra de conclure presque immédiatement) qu'il existe M dépendant uniquement de β_{\max} et $B_{<}$ tel que, pour tout $T \in \mathcal{T}_{l, B_{<}}$ muni d'un champ magnétique $\{B_i\}$, et pour tout $l \in \mathbb{N}^*$:

$$m_{T, \{B_i\}}^{l,+} - m_{T, \{B_i\}}^{l,0} \leq M(m_{T, \{B_i\}}^{l,0} - m_{T, \{B_i\}}^{l-1,0})$$

Soit $l \in \mathbb{N}^*$.

Introduisons une nouvelle fonction : si $\{H_i\}_{(i \in \partial T(l-1))}$ est un ensemble de réels positifs indexés par les sommets de $\partial T(l-1)$, on note $\tilde{m}_{T, \{B_i\}}^{l-1}(\{H_i\})$ l'aimantation moyenne à la racine de l'arbre T pour un modèle d'Ising sur $T(l-1) = (V_{l-1}, E_{l-1})$, associé à la température inverse β et au champ magnétique $\{B'_i\}_{(i \in V_{l-1})}$ défini par :

$$\begin{aligned} B'_i &= B_i + H_i \text{ si } i \in \partial T(l-1) \\ B'_i &= B_i \text{ sinon} \end{aligned}$$

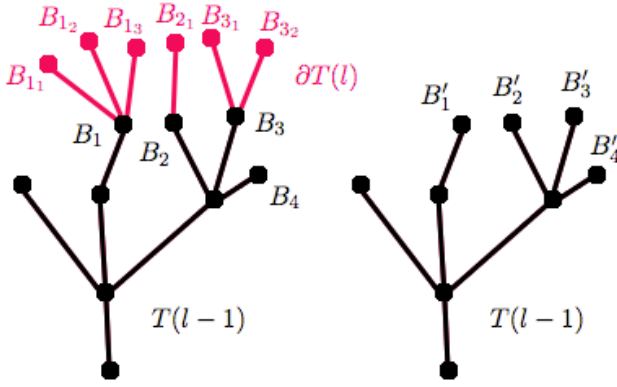
La démonstration de l'inégalité se fera en exprimant les deux quantités à comparer en fonction de l'application que nous venons de définir, puis en utilisant la concavité de cette application.

Nous utiliserons le fait que, si T est un arbre et si $\{B_i\}$ est un champ magnétique sur T , alors, d'après le lemme 4.1, comme l'illustre la figure 16, la marginale sur $T(l-1)$ de la loi d'Ising associée à l'arbre $T(l)$ et au champ magnétique $\{B_i\}$ est la loi d'Ising associée à l'arbre $T(l-1)$ et au champ magnétique $\{B'_i\}$, où :

$$B'_i = \operatorname{atanh}(\langle \sigma_i \rangle_{\mu_i}) = B_i + \sum_{k=1}^{\Delta_i} \operatorname{atanh}(\tanh(\beta) \tanh(B_{i_k})) \text{ si } i \in \partial T(l-1)$$

$$B'_i = B_i \text{ sinon}$$

(où les i_1, \dots, i_{Δ_i} sont les enfants de i ,
et où μ_i désigne la loi d'Ising associée à l'arbre constitué de i et de ses descendants dans $T(l)$, avec champ magnétique $\{B_i\}$)



Fixons un arbre $T \in \mathcal{T}_{l, B_<}$ muni d'un champ magnétique $\{B_i\}$ et d'une température inverse β .

Comme la loi d'Ising sur $T(l)$ associée au champ magnétique $\{B_i\}$ avec conditions au bord positives est la loi d'Ising sur $T(l)$ avec conditions au bord libres pour un champ magnétique $\{\tilde{B}_i\}$ tel que $\tilde{B}_i = +\infty$ si $i \in \partial T(l)$ et $\tilde{B}_i = B_i$ sinon, et comme $\operatorname{atanh}(\tanh(\beta) \tanh(+\infty)) = \beta$, on a :

FIG. 16 – Représentation de l'équivalence entre les modèles d'Ising sur $T(l)$ et $T(l-1)$

$$m_{T, \{B_i\}}^{l,+} = \tilde{m}_{T, \{B_i\}}^{l-1}(\{\beta \Delta_i\})$$

D'autre part, comme on a vu que $(m_{T, \{B_i\}}^{k,0})_{(k \in \mathbb{N})}$ était croissante :

$$m_{T, \{B_i\}}^{l,0} \geq \tilde{m}_{T, \{B_i\}}^{l-1}(\{0\})$$

Enfin, comme $\tilde{m}_{T, \{B_i\}}^{l-1}$ est croissante en chacune de ses variables (d'après l'inégalité de Griffiths), on a :

$$m_{T, \{B_i\}}^{l,0} = \tilde{m}_{T, \{B_i\}}^{l-1}(\{\sum_{k=1}^{\Delta_i} \operatorname{atanh}(\tanh(\beta) \tanh(B_{i_k}))\})$$

$$\geq \tilde{m}_{T, \{B_i\}}^{l-1}(\{\Delta_i \xi(\beta, B_<)\})$$

(si on note $\xi(\beta, b) = \operatorname{atanh}(\tanh(\beta) \tanh(b))$ pour tout $b \geq 0$)

Les trois égalités ou inégalités précédentes nous permettent d'obtenir les deux affirmations suivantes :

$$m_{T,\{B_i\}}^{l,+} - m_{T,\{B_i\}}^{l,0} \leq \tilde{m}_{T,\{B_i\}}^{l-1}(\{\beta\Delta_i\}) - \tilde{m}_{T,\{B_i\}}^{l-1}(\{0\})$$

$$m_{T,\{B_i\}}^{l,0} - m_{T,\{B_i\}}^{l-1,0} \geq \tilde{m}_{T,\{B_i\}}^{l-1}(\{\Delta_i\xi(\beta, B_{<})\}) - \tilde{m}_{T,\{B_i\}}^{l-1}(\{0\})$$

Or la fonction $f : t \rightarrow \tilde{m}_{T,\{B_i\}}^{l-1}(\{t\Delta_i\})$ est concave, d'après l'inégalité GHS.

Donc, puisque $\xi(\beta, B_{<}) \leq \operatorname{atanh}(\tanh(\beta)) = \beta$, $\frac{f(\xi(\beta, B_{<})) - f(0)}{\xi(\beta, B_{<})} \geq \frac{f(\beta) - f(0)}{\beta}$, et :

$$m_{T,\{B_i\}}^{l,+} - m_{T,\{B_i\}}^{l,0} \leq f(\beta) - f(0) \leq \frac{\beta}{\xi(\beta, B_{<})} (f(\xi(\beta, B_{<})) - f(0)) \leq \frac{\beta}{\xi(\beta, B_{<})} (m_{T,\{B_i\}}^{l,0} - m_{T,\{B_i\}}^{l-1,0})$$

Notons $M = \sup_{0 < \beta \leq \beta_{\max}} \frac{\beta}{\xi(\beta, B_{<})}$.

Puisque $\beta \rightarrow \frac{\beta}{\xi(\beta, B_{<})}$ est une fonction continue sur $]0; \beta_{\max}]$ prolongeable par continuité en 0 (par $\frac{1}{B_{<}}$), $M < +\infty$. De plus, M ne dépend que de β_{\max} et $B_{<}$, et on a :

$$m_{T,\{B_i\}}^{l,+} - m_{T,\{B_i\}}^{l,0} \leq M(m_{T,\{B_i\}}^{l,0} - m_{T,\{B_i\}}^{l-1,0})$$

Nous sommes maintenant en mesure de conclure :

Pour tout $T \in \mathcal{T}_{l, B_{<}}$ muni d'une température inverse β et d'un champ magnétique $\{B_i\}$, on a :

$$\begin{aligned} m_{T,\{B_i\}}^{l,+} - m_{T,\{B_i\}}^{l,0} &= \frac{1}{l} \sum_{k=1}^l (m_{T,\{B_i\}}^{k,+} - m_{T,\{B_i\}}^{k,0}) \\ &\leq \frac{1}{l} \sum_{k=1}^l (m_{T,\{B_i\}}^{k,+} - m_{T,\{B_i\}}^{k,0}) \\ &\text{(puisque la suite } (m_{T,\{B_i\}}^{k,+} - m_{T,\{B_i\}}^{k,0})_{(k \in \mathbb{N})} \text{ est décroissante)} \\ &\leq \frac{M}{l} \sum_{k=1}^l (m_{T,\{B_i\}}^{k,0} - m_{T,\{B_i\}}^{k-1,0}) \\ &= \frac{M}{l} (m_{T,\{B_i\}}^{l,0} - m_{T,\{B_i\}}^{0,0}) \leq \frac{M}{l} \end{aligned}$$

(puisque l'aimantation moyenne dans un modèle d'Ising avec champ magnétique positif est un réel compris entre 0 et 1)

□

7.3 Complément à la démonstration du théorème 5.3.2

Le but de ce paragraphe est de calculer $\frac{\partial \phi(\beta, B)}{\partial \beta}$.

On admettra qu'on peut, au cours de la dérivation, négliger la dépendance en β de h^* . Ce résultat (difficile) est démontré dans [1]. On trouve alors :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi(\beta, B)}{\partial \beta} &= \frac{\bar{P}}{2} \tanh(\beta) - \frac{\bar{P}}{2} (1 - \tanh^2(\beta)) \mathbb{E} \left(\frac{\tanh(h^{(1)}) \tanh(h^{(2)})}{1 + \tanh(\beta) \tanh(h^{(1)}) \tanh(h^{(2)})} \right) \\
&\quad + (1 - \tanh^2(\beta)) \times \\
&\quad \mathbb{E} \left(\frac{\sum_{i=1}^L \tanh(h^{(i)}) (e^B \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^L (1 + \tanh(\beta) \tanh(h^{(j)})) - e^{-B} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^L (1 - \tanh(\beta) \tanh(h^{(j)})))}{e^B \prod_{i=1}^L (1 + \tanh(\beta_0) \tanh(h^{(i)})) + e^{-B} \prod_{i=1}^L (1 - \tanh(\beta_0) \tanh(h^{(i)}))} \right) \\
&= \frac{\bar{P}}{2} \tanh(\beta) - \frac{\bar{P}}{2} (1 - \tanh^2(\beta)) \mathbb{E} \left(\frac{\tanh(h^{(1)}) \tanh(h^{(2)})}{1 + \tanh(\beta) \tanh(h^{(1)}) \tanh(h^{(2)})} \right) \\
&\quad + (1 - \tanh^2(\beta)) \mathbb{E} \left(\frac{L \tanh(h^{(1)}) \tanh(B + \sum_{j=2}^L \operatorname{atanh}(\tanh(\beta) \tanh(h^{(j)})))}{1 + \tanh(\beta) \tanh(h^{(1)}) \tanh(B + \sum_{j=2}^L \operatorname{atanh}(\tanh(\beta) \tanh(h^{(j)})))} \right) \\
&= \frac{\bar{P}}{2} \tanh(\beta) - \frac{\bar{P}}{2} (1 - \tanh^2(\beta)) \mathbb{E}(\lambda(\beta, h^{(1)}, h^{(2)})) \\
&\quad + (1 - \tanh^2(\beta)) \mathbb{E}(L \lambda(\beta, h^{(1)}, B + \sum_{j=2}^L \operatorname{atanh}(\tanh(\beta) \tanh(h^{(j)})))
\end{aligned}$$

(si on pose $\lambda(x, y, z) = \frac{\tanh(y) \tanh(z)}{1 + \tanh(x) \tanh(y) \tanh(z)}$)

On montre en sommant sur toutes les valeurs possibles de L que :

$$\mathbb{E}(L \lambda(\beta, h^{(1)}, B + \sum_{j=2}^L \operatorname{atanh}(\tanh(\beta) \tanh(h^{(j)}))) = \bar{P} \mathbb{E}(\lambda(\beta, h^{(1)}, B + \sum_{j=2}^K \operatorname{atanh}(\tanh(\beta) \tanh(h^{(j)})))$$

(où K est une variable aléatoire indépendante de toutes les autres, de loi ρ)

Comme $B + \sum_{j=2}^K \operatorname{atanh}(\tanh(\beta) \tanh(h^{(j)}))$ et $h^{(2)}$ sont de même loi, puisque h^* est un point fixe de l'équation (2) :

$$\mathbb{E}(L \lambda(\beta, h^{(1)}, B + \sum_{j=2}^L \operatorname{atanh}(\tanh(\beta) \tanh(h^{(j)}))) = \bar{P} \mathbb{E}(\lambda(\beta, h^{(1)}, h^{(2)}))$$

Donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi(\beta, B)}{\partial \beta} &= \frac{\bar{P}}{2} \tanh(\beta) + \frac{\bar{P}}{2} (1 - \tanh^2(\beta)) \mathbb{E}(\lambda(\beta, h^{(1)}, h^{(2)})) \\ &= \frac{\bar{P}}{2} \mathbb{E} \left(\frac{\tanh(\beta) + \tanh(h^{(1)}) \tanh(h^{(2)})}{1 + \tanh(\beta) \tanh(h^{(1)}) \tanh(h^{(2)})} \right) = \frac{\bar{P}}{2} \mathbb{E}(\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{\mu_{h^{(1)}, h^{(2)}}(i, j)}) \end{aligned}$$

(où $\mu_{h^{(1)}, h^{(2)}}(i, j)$ est la loi d'Ising sur le graphe $(\{i, j\}, \{\langle i, j \rangle\})$, i ayant le champ magnétique (aléatoire) $h^{(1)}$ et j le champ magnétique $h^{(2)}$)

7.4 Codes

Voici une partie des codes utilisés pour les simulations numériques présentés dans la section 6. La fonction *rannyu* (*i*) désigne un entier décimal tiré aléatoirement dans $[0; 1]$ et *nrannyu* (*int max*) un entier tiré au hasard dans $\{0, \dots, \text{max} - 1\}$.

7.4.1 Construction du graphe

```

struct liste {
    int arete ;
    struct liste * suivant ;
} ;

int n ;
struct liste ** sommets ;
// ‘‘sommets’’ est un tableau de taille n destiné à contenir,
// pour chaque sommet, la liste de ses voisins

void construit_graphe () ;
int nrannyu ( int max ) ;

void construit_graphe () {

    int i, j, k, nb_aretes ;
    double puissance, proba, al ;
    struct liste * ajout ;

    sommets = calloc (n, sizeof (struct liste *)) ;
    puissance = 1. ;

    for (i=1 ; i<n ; i++) {

// On choisit le nombre de voisins de n-i-1 parmi les i sommets

```

```

// de numéro supérieur.

    al = rannyu ( ) ;
    puissance = puissance * (1.-coef) ;
    nb_aretes= 0 ;
    proba = puissance ;

    while (al > proba) {
        nb_aretes++ ;
        al = al - proba ;
        proba = proba * (coef/(1.-coef))
            * ( (double)(i-nb_aretes+1) )/( (double)(nb_aretes) ) ;
    }

// On choisit les nb_aretes sommets qui seront reliés à n-i-1
// par une arête.

    j=0 ;
    while(j < nb_aretes){

// On choisit aléatoirement k de façon à ce que n-i-1 et n-i-1+k
// ne soient pas déjà reliés par une arête.

        k = (nrannyu (i))+1 ;
        while (sommets[n-1-i+k] != NULL
            && sommets[n-1-i+k]->arete == n-i-1) {
            k = (nrannyu (i))+1 ;
        }

        ajout = malloc (sizeof (struct liste)) ;
        ajout->arete = n-1-i+k ;
        ajout->suivant = sommets[n-i-1] ;
        sommets[n-i-1] = ajout ;

        ajout = malloc (sizeof (struct liste)) ;
        ajout->arete = n-i-1 ;
        ajout->suivant = sommets[n-1-i+k] ;
        sommets[n-1-i+k] = ajout ;

        j++;
    }
}

```

7.4.2 Itération de la méthode de Monte-Carlo

```
int n ;
int * spin ;
struct liste ** sommets ;
double beta ;

double energie (int i, struct liste * voisins) ;
void bascule () ;
int nrannyu ( int max ) ;
double rannyu () ;

double energie (int i , struct liste * voisins) {

    if (voisins == NULL) {
        return( - B[i] ) ;
    }
    else {
        double resultat ;
        resultat = (double) - spin[voisins -> arete]
            + energie( i , voisins -> suivant ) ;
        return (resultat) ;
    }

}

void bascule () {

    int i ;
    double proba , p ;

    proba = 1 / (1+ exp ( 2*beta*energie(i,sommets[i]) )) ;
    p = rannyu () ;
    i = nrannyu (n) ;

    if (p < proba ) {
        spin[i]=1 ;
    }
    else {
        spin[i] =-1 ;
    }

}
```

Références

- [1] A. DEMBO et A. MONTANARI, *Ising models on locally tree-like graphs*, prépublication, arXiv :0804.4726v2, 2008
- [2] C. FORTUIN, P. KASTELEYN et J. GINIBRE, *Correlation inequalities on some partially ordered sets*, Commun. math. Phys., 22 (1971), pp. 89-103
- [3] F. GUERRA, *Mathematical aspects of mean field spin spin glass theory*, dans : *European Congress of Mathematics*, Stockholm, June 27-July 2, 2004 , Ari Laptev, European Mathematical Society Zurich, 2005
- [4] W. KRAUTH, *Algorithms and computations*, Oxford University Press, Oxford master series in statistical, computational, and theoretical physics, 2006
- [5] J. LEBOWITZ, *GHS and other inequalities*, Commun. math. Phys, 35 (1974), pp. 87-92
- [6] J-F. LE GALL, *Intégration, probabilités et processus aléatoires*, Cours de l'ENS Paris, 2006
- [7] T. LIGGETT, *Interacting particle systems*, Springer Verlag, New York, 1985, pp. 180-189
- [8] M. MÉZARD et A. MONTANARI, *Information, physics, computation*, Oxford University Press, Oxford graduate texts, 2009
- [9] A. MONTANARI, *Stochastic processes on graphs, Lectures 1-2*, Cours de l'université de Stanford, 2007