Symétries en physique et représentations

Olivier Wang
sous la direction de Denis Bernard et David Hernandez

15 juin 2010

Table des matières

Introduction

On étudie dans ce mémoire la théorie des représentations et ses applications à la physique des particules. On commence par énoncer quelques résultats pour les groupes finis, dont certains sont encore valables pour les groupes compacts.
On présente ensuite rapidement la mécanique quantique, théorie qui a pour langage l'algèbre linéaire, et comment elle se fond ainsi très naturellement dans le cadre des représentations.
La recherche des représentations des groupes de Lie se ramène très souvent à celle des représentations de leurs algèbres de Lie, ce qui permet d'utiliser des techniques génériques comme la méthode des poids pour les algèbres de Lie semi-simples. On traitera en détail l'exemple fondamental de l'algèbre $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ et on expliquera pourquoi les autres cas peuvent se décomposer en petites "briques" $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.
Enfin on expliquera l'interprétation en termes de représentations de la classification des hadrons, qui a permis de proposer un modèle pour leur construction en postulant un groupe de symétrie.

1 Représentations

1.1 Définitions

On se donne un groupe G, a priori sans topologie.

Définition 1. *Une* ***action à gauche*** *de G sur un ensemble X est une application*

$$G \times X \to X, (g,x) \mapsto g \cdot x$$

telle que

$$\forall g, h \in G, (gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x) \quad et \quad \forall x \in X, 1_G \cdot x = x.$$

La donnée d'une action est équivalente à la donnée d'un morphisme de groupes ρ de (G, $\cdot$) dans $(S(X), \circ)$, groupe des permutations de X, où $g \cdot x = \rho(g)(x)$.

Définition 2. *Une* ***représentation linéaire*** *de G est la donnée d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V et d'une action linéaire de G sur V, i.e. un morphisme de groupes ρ de G dans* $\mathbf{GL(V)}$.

Exemple : G = $\mathbf{GL_n}(\mathbb{C})$, V = $\mathbb{C}^n$, $\rho = Id$. On l'appelle la représentation fondamentale (on généralise à tout sous-groupe de $\mathbf{GL_n}(\mathbb{C})$).

Définition 3. *Une* ***sous-représentation*** *W de V est un sous-espace vectoriel stable par l'action de G. Une représentation V est dite* ***irréductible*** *si ses seules sous-représentations sont {0} et V.*
Un ***morphisme de représentations*** *(ou* ***opérateur d'entrelacement****) entre deux représentations est une application linéaire qui commute à l'action de G (une application $\mathbb{C}[G]$-linéaire).*
Deux représentations sont ***isomorphes*** *(ou équivalentes) s'il existe un morphisme bijectif de représentations entre elles.*

Représentations et A-modules Se donner une représentation (V, ρ) de G équivaut à se donner une structure de A-module sur V, où A est l'algèbre associative unitaire du groupe $\mathbb{C}[G]$, espace vectoriel complexe de base $(e_g)_{g \in G}$ et où le produit est défini sur la base par $e_g * e_{g'} = e_{gg'}$.

Somme directe, produit tensoriel
On peut faire la **somme directe** de deux représentations (V_1, ρ_1) et (V_2, ρ_2) d'un groupe G qui est l'espace vectoriel $V_1 \oplus V_2$ muni de l'action

$$g(v_1, v_2) = (gv_1, gv_2).$$

En dimension finie cela correspond à représenter G dans l'espace des matrices de taille dim V_1 + dim V_2 par des matrices diagonales par blocs

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

où A_1 agit sur V_1 et A_2 sur V_2.
Une représentation est dite **complètement réductible** si elle est somme directe de représentations irréductibles.
Le travail générique sur les représentations d'un groupe consistera à montrer qu'elles sont complètement réductibles, décrire toutes les représentations irréductibles du groupe puis écrire explicitement la décomposition d'une représentation donnée.

Un moyen courant de construire une représentation à partir de deux représentations (V_1, ρ_1) et (V_2, ρ_2) est de prendre le **produit tensoriel** $V_1 \otimes V_2$ muni de l'action

$$g(v_1 \otimes v_2) = (gv_1 \otimes gv_2).$$

1.2 Groupes finis

Nous donnons ici les principaux résultats de représentations des groupes finis, dont beaucoup se généralisent aux groupes compacts qui sont ceux intervenant dans les symétries que nous étudierons plus tard. La propriété la plus importante est certainement l'existence d'un produit scalaire rendant la représentation unitaire :

Proposition 1. *Soit G un groupe fini. Soit (V, ρ) une représentation de G, $\langle \quad | \quad \rangle$ un produit scalaire quelconque sur E. Alors le produit scalaire $\langle \quad | \quad \rangle$' défini par*

$$\langle x|y\rangle' = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\langle \rho(g)(x)|\rho(g)(y)\rangle$$

est unitaire, c'est-à-dire : $\forall g \in G, \forall x, y \in V, \langle \rho(g)(x)|\rho(g)(y)\rangle' = \langle x|y\rangle'$.

On en déduit la complète réductibilité des représentations de dimension finie d'un groupe fini :

Théorème 1 (Maschke)**.** *Soit G un groupe fini. Toute représentation de G de dimension finie est complètement réductible.*

Démonstration. (V, ρ) munie du produit scalaire défini ci-dessus est unitaire. Si un sous-espace F de V est stable par ρ , alors $F^{\perp}$ est un sous-espace stable par ρ. On obtient alors le théorème par récurrence sur $dimV$. □

Le théorème suivant, d'usage constant, explique en grande partie pourquoi on se restreint à des représentations sur $\mathbb{C}$:

Théorème 2 (Lemme de Schur)**.** *Soit (V, ρ_1) et (W, ρ_2) deux représentations irréductibles de dimension finie d'un groupe G (quelconque), f un morphisme de représentations entre V et W. Si les représentations ne sont pas équivalentes, alors f = 0. Si $(V, \rho_1) = (W, \rho_2)$, alors f est une homothétie.*

Démonstration. Ker f (resp. Im f) est une sous-représentation de V (resp. W). Si f n'est pas bijectif, on a soit Ker f = V, soit Im f = 0, donc dans tous les cas f = 0. Dans le cas où les représentations sont égales, l'endomorphisme f possède une valeur propre λ (car V est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie). Le sous-espace propre associé à λ est une sous-représentation de V non nulle donc c'est V, donc f = λId. □

Pour finir on notera que toute représentation irréductible d'un groupe fini G est de dimension finie. En effet si on prend un vecteur quelconque non nul v, alors l'ensemble fini Gv engendre une sous-représentation de dimension finie, et elle est non nulle donc c'est V.
De nombreuses autres propriétés (caractères, représentations induites) apparaissent dans l'étude des représentations de groupes mais nous n'en parlerons pas ici car soit elles ne se transposent pas aux groupes continus, soit elles ne seront pas nécessaires à la classification des représentations des groupes qui nous intéressent en physique.

1.3 Groupes compacts

Un groupe topologique est un espace topologique séparé muni d'une structure de groupe telle que la multiplication et le passage à l'inverse soient continus. Si l'espace est compact on parle donc de groupe compact.
L'intérêt des groupes compacts est qu'on peut les munir d'une (unique) mesure de probabilité dite invariante :

Théorème 3 (Mesure de Haar)**.** *Soit G un groupe localement compact. Il existe une unique mesure μ de probabilité invariante à gauche, c'est-à-dire telle que pour toute fonction f intégrable sur G et tout $h \in G$:*

$$\int_G f(hg)d\mu(g) = \int_G f(g)d\mu(g)$$

Si G est compact, alors toute mesure invariante à gauche est invariante à droite. On appelle ***mesure de Haar*** *sur G l'unique mesure de probabilité invariante à gauche et à droite.*

Dans le cas de groupes topologiques on appellera représentations des représentations définies comme précédemment mais de plus telles que :
1. l'espace vectoriel sous-jacent V soit un espace de Hilbert (toujours complexe) séparable,
2.

$$\forall x \in V, g \mapsto \rho(g)(x)$$

soit continue de G dans V.

Comme annoncé, la mesure de Haar permet d'affirmer la complète réductibilité des représentations de dimension finie de groupes compacts :

Théorème 4. *Toute représentation d'un groupe compact est unitarisable (i.e. peut-être rendue unitaire pour un certain produit scalaire). Toute représentation de dimension finie d'un groupe compact est donc complètement réductible.*

Démonstration. Comme dans le cas des groupes finis on va moyenner un produit scalaire donné $\langle \quad | \quad \rangle$ en posant :

$$\forall x, y \in V, \langle x|y\rangle' = \int_G \langle \rho(g)(x)|\rho(g)(y)\rangle d\mu(g)$$

où μ est la mesure de Haar sur G. On obtient bien un produit scalaire sur V qui rend la représentation unitaire. Les normes associées à $\langle \quad | \quad \rangle$ et $\langle \quad | \quad \rangle$' sont équivalentes donc on conserve le caractère continu dans l'espace de Hilbert $(V, \langle \quad | \quad \rangle')$. $\square$

Pour finir on admet le résultat suivant :

Théorème 5. *Toute représentation irréductible d'un groupe compact est de dimension finie.*

Tout se passe donc aussi bien que dans le cas des groupes finis.

2 Symétries en mécanique quantique

2.1 Espace des états et groupe de symétrie

On associe en mécanique quantique à chaque système physique un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ (supposé complet et séparable). Un *état pur* du système est un vecteur de $\mathcal{H}$ choisi normé et noté $|\psi\rangle$. La dynamique du système est gouvernée par l'opérateur hamiltonien $\widehat{H}$ (énergie) à travers l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \widehat{H}|\psi(t)\rangle$$

Aux transformations que subit le système correspondent des opérateurs dans l'espace des états, tandis qu'on associe aux grandeurs physiques des observables, opérateurs linéaires hermitiens de $\mathcal{H}$ dont les valeurs propres sont les mesures possibles de ces grandeurs, par exemple l'hamiltonien dont les valeurs propres sont les énergies que peut prendre le système.
Si le système est invariant par rapport à une certaine classe de transformations physiques, il en sera de même pour son vecteur d'état. On dit que ces transformations sont des symétries. Elles forment un groupe dont $\mathcal{H}$ est une représentation.
Ce n'est pas exactement une représentation linéaire : en effet, en mécanique quantique seul le carré de la norme du vecteur d'état a un sens physique. On ne peut donc distinguer deux vecteurs d'état proportionnels et de même norme. Il faut donc introduire la notion de **représentation projective**, c'est-à-dire une représentation à une phase près :

$$\forall g_1, g_2 \in G, \rho(g_1)\rho(g_2) = \rho(g_1 g_2)e^{i\phi(g_1,g_2)}$$

où ϕ est une fonction de $G \times G$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifie certaines lois à cause de l'associativité du groupe. On l'appelle un 2-cocycle.
On peut néanmoins montrer que les représentations projectives d'un groupe sont des représentations linéaires d'une extension centrale de ce groupe (dans le cas d'un groupe de Lie connexe, il s'agit de son revêtement universel).

L'interprétation probabiliste des normes des vecteurs d'état implique la conservation de ces normes : en effet $|\langle\psi|\phi\rangle|^2$ est la probabilité d'observer dans un état $|\psi\rangle$ un système préparé dans l'état $|\phi\rangle$. On a donc pour toute observable $\widehat{A}$ et une symétrie S $|\langle\psi|\widehat{A}|\phi\rangle|^2 = |\langle S(\psi)|S(\widehat{A})|S(\phi)\rangle|^2$. Un théorème dû à Wigner implique que

Théorème 6. *S est alors représenté par un opérateur unitaire (on notera ainsi $U = \rho$), linéaire ou anti-linéaire, tel que :*

$$S(|\psi\rangle) = U(g)(|\psi\rangle) \quad et \quad S(\widehat{A}) = U(g)\widehat{A}U(g)^\dagger.$$

On supposera désormais qu'on est dans le cas linéaire (l'anti-linéarité peut apparaître par exemple lorsque A contient un retournement temporel $t \mapsto -t$).

Le système est dit invariant dans une transformation à laquelle correspond un opérateur U(g) de $\mathcal{H}$ si son hamiltonien est laissé inchangé, ce qui par ce qui précède s'écrit :

$$U(g)\widehat{H}U(g)^\dagger = \widehat{H} \qquad \text{soit} \qquad [\widehat{H}, U(g)] = 0.$$

Reformulons alors la notion de symétrie d'un système quantique : il s'agit de la donnée d'un groupe de transformations et d'une représentation projective unitaire de ce groupe qui commute avec le hamiltonien.

Vient alors avec toute symétrie la conservation de grandeurs physiques associées, fonctions des U(g). En effet l'équation de Schrödinger implique l'évolution suivante pour la valeur moyenne d'une observable $\widehat{O}$ ne dépendant pas du temps :

Théorème 7 (Théorème d'Ehrenfest)**.**

$$\frac{d}{dt}\langle\psi|\widehat{O}|\psi\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle\psi|[\widehat{O}, \widehat{H}]|\psi\rangle$$

Voyons maintenant ce qui se passe dans le cadre d'une symétrie infiniment proche de l'identité.

2.2 Générateurs infinitésimaux

On se place dans le cas où le groupe de transformations G est continu et plus précisément dépend continûment d'un paramètre réel α avec $U(0) = \widehat{I}$. On peut alors écrire $U(g) = U(\alpha)$ et au premier ordre :

$$U(0 + d\alpha) = \widehat{I} - i\frac{d\alpha}{\hbar}\widehat{D}.$$

Il découle de l'unitarité de U que $\widehat{D}$ est une observable (opérateur autoadjoint) qui commute avec $\widehat{H}$. On dit que c'est le **générateur infinitésimal** de la transformation. On passe de transformations infinitésimales à une transformation finie en faisant un produit infini :

$$U(\alpha) = \lim_{N\to\infty}(\widehat{I} - i\frac{\alpha}{N\hbar}\widehat{D})^N = e^{-i\frac{\alpha}{\hbar}\widehat{D}}$$

Remarque Notons qu'on a défini ainsi $\widehat{D}$ pour qu'il soit hermitien et donc une observable en mécanique quantique. Dans la théorie mathématiques des groupes et algèbres de Lie, on aura des générateurs infinitésimaux (éléments de l'algèbre de Lie) antihermitiens en fait égaux à $-i\widehat{D}$ avec des unités telles que $\hbar = 1$.

Exemples
• Si G est le groupe des translations, l'opérateur impulsion a pour composantes les générateurs infinitésimaux des translations selon les trois axes.
• Si G est le groupe des rotations, les générateurs infinitésimaux des rotations selon les trois axes forment les composantes de l'opérateur moment cinétique, exemple qu'on traitera en détail dans le chapitre 3.

On a vu que l'invariance d'un système par une classe de transformation implique des lois de conservations : $[\widehat{H}, \widehat{G}]$ pour les générateurs infinitésimaux. Les valeurs moyennes de ces opérateurs sont des *constantes du mouvement*. Néanmoins dans le cas non abélien les lois de conservations ne seront pas toutes indépendantes, car les générateurs infinitésimaux ne formeront pas forcément un ECOC (ensemble complet d'observables qui commutent). On admet que dans le cas d'un groupe de Lie (défini au chapitre 3), on peut prendre pour constantes du mouvement indépendantes les valeurs moyennes des éléments d'une base de l'algèbre de Lie.

On traitera aussi le cas de symétries internes où les transformations ne sont plus géométriques mais concernent des degrés de liberté purement quantiques.

2.3 Principe de Wigner, dégénérescence et règles de sélection

Considérons un système physique d'hamiltonien $\widehat{H}$, un sous-espace propre V_n de $\widehat{H}$ associé à l'énergie E_n. V_n est une représentation du groupe de symétrie G car $\widehat{H}$ commute avec les transformations de G. Le principe de Wigner s'énonce alors ainsi :

Si G est le groupe de symétrie complet du système, alors la représentation (V_n, ρ) est irréductible.

Si on prend un ket quelconque $|\Psi\rangle$ de V_n, le sous-espace engendré par l'action de G sur $|\Psi\rangle$ est une sous-représentation d'une certaine dimension p inférieure ou égale à dim V_n. p est la dégénérescence maximale qu'on peut avoir à cause des symétries. Le principe de Wigner signifie donc $(p = dimV_n)$

que toute dégénérescence du spectre est due aux symétries de l'hamiltonien. On peut néanmoins avoir une symétrie cachée (par exemple dans le cas de l'atome d'hydrogène due au potentiel en $\frac{1}{r}$, en plus du groupe de symétrie naturel des rotations) qui provoque des dégénérescences supplémentaires.
Une application immédiate de ce principe concerne le cas des niveaux non-dégénérés : on sait que si G est un groupe abélien, toutes ses représentations irréductibles sont de dimension 1 ("tous les $\rho(g)$ commutent donc sont co-diagonalisables" et les droites propres sont des sous-représentations). Si on a dégénérescence, c'est donc que G n'est pas abélien.
Très souvent la démarche est de déterminer un groupe de symétrie assez grand, de le supposer complet et d'en chercher les représentations irréductibles.

Par définition du groupe de symétrie, tout opérateur $\rho(g)$ dans la représentation $\mathcal{H}$ commute avec le hamiltonien. Ce dernier est donc un opérateur d'entrelacement. En particulier si on peut, par exemple pour un groupe compact, décomposer $\mathcal{H}$ en somme directe de représentations irréductibles, $\widehat{H}$ commutera avec les restrictions à ces espaces des $\rho(g)$ et sera ainsi, d'après le lemme de Schur, nul entre deux représentations irréductibles non isomorphes. De plus si chaque représentation irréductible n'apparaît qu'une fois, alors $\widehat{H}$ sera une homothétie sur chacun de ces sous-espaces qui seront donc des sous-espaces propres.
On se retrouve donc avec une décomposition de $\mathcal{H}$ en sous-espaces propres du hamiltonien $\widehat{H}$. Dans le cas le plus simple les valeurs propres associées à chaque sous-représentation irréductible sont toutes distinctes, et on a donc leur multiplicité égale à la dimension. On peut néanmoins avoir par exemple deux composantes irréductibles complexes conjuguées non isomorphes mais correspondant à la même énergie propre (réelle), voire une même composante irréductible apparaissant plusieurs fois (c'est ce qu'on appelle une *dégénérescence accidentelle*).

Si V_1 et V_2 sont deux sous-représentations irréductibles de $\mathcal{H}$, P_1 et P_2 les deux opérateurs de projection sur ces sous-espaces, alors $P_1 U(t) P_2^{-1}$, où U est l'opérateur d'évolution et P_2^{-1} l'injection canonique, est un opérateur d'entrelacement entre V_2 et V_1. D'après le lemme de Schur il est nul si les représentations irréductibles ne sont pas isomorphes. C'est donc une règle de sélection : le système ne peut évoluer d'un état de V_1 à un état de V_2.

3 Groupes et algèbres de Lie

3.1 Définitions, exemples

Un groupe de Lie réel est une variété différentiable réelle C^∞ munie d'une structure de groupe telle que la multiplication et le passage à l'inverse soient C^∞. Le théorème de Cartan assure que tout sous-groupe fermé d'un groupe de Lie est un groupe de Lie. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $GL_n(\mathbb{R})$ et $GL_n(\mathbb{C})$ sont des groupes de Lie réels (le second étant un sous-groupe fermé de $GL_{2n}(\mathbb{R})$). Il y a néanmoins des classes importantes de groupes de Lie qui ne sont pas des sous-groupes d'un groupe linéaire, par exemple ceux qu'on appelle les groupes de Lie exceptionnels. Un autre exemple est le revêtement universel de $SL_2(\mathbb{R})$.

Définition 4. *Pour simplifier (le cas abstrait ne nous intéressant pas ici), on appellera* ***groupe de Lie*** *un sous-groupe fermé d'un groupe linéaire $GL_n(\mathbb{R})$.*

Exemples $O(n), U(n), SL_n(\mathbb{R}), SL_n(\mathbb{C}), SO(n), SU(n)$ sont des groupes de Lie. Plus généralement le stabilisateur d'une action C^∞ est un groupe de Lie.

Définition 5 (Algèbre de Lie)**.** *Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur k est un k-espace vectoriel muni d'une opération nommée crochet (de Lie) $[\quad,\quad] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ bilinéaire, antisymétrique et satisfaisant l'identité de Jacobi :*

$$\forall x, y, z \in \mathfrak{g}, [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0.$$

Une sous-algèbre de Lie est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$ stable par le crochet.

Exemples $L(E)$ muni du crochet $[f, g] = f \circ g - g \circ f$ est une algèbre de Lie notée $\mathfrak{gl}(E)$. Son analogue matriciel est $\mathfrak{gl}_\mathfrak{n}(\mathbb{K}) = M_n(\mathbb{K})$ muni du crochet $[A, B] = AB - BA$.

3.2 Algèbre de Lie d'un groupe de Lie

Soit G un groupe de Lie de dimension n.

Définition 6. *L'espace tangent à G en son élément neutre Id est*

$$\mathfrak{g} = \{\, X = \gamma'(0) \mid \gamma : \,]\,a, b\,[\to G, \textit{de classe } C^1, \textit{ avec } \gamma(0) = Id\,\}$$

où $]\,a, b\,[$ *contient 0.*

Théorème 8. $\mathfrak{g}$ *est une sous-algèbre de Lie de* $\mathfrak{gl}_\mathfrak{n}(\mathbb{R})$*, appelée algèbre de Lie de G.*

Exemples
• G $= GL_n(k)$. L'espace tangent à G en I_n est $M_n(k)$ par continuité du déterminant.

• G $= SL_n(k) = \{M \in M_n(k)\,,\, det\, M = 1\}$. Or l'application tangente à det en I_n est $T_e det(X) = TrX$ donc

$$\mathfrak{sl}_n(k) = \{X \in M_n(k) = \mathfrak{gl}_n(k)\,,\, TrX = 0\}.$$

On peut aussi appliquer la proposition qui suit en notant que $e^{TrX} = det\, e^X$.

Proposition 2. $X \in \mathfrak{g}$ *si et seulement si pour tout* $t \in \mathbb{R}, exp(tX) \in G$.

L'algèbre de Lie (ou sa représentation) est l'espace des générateurs infinitésimaux et on passe au groupe des transformations finies par l'exponentielle.

3.3 Représentations

On cherche les représentations de certains groupes de Lie. L'étude locale au voisinage de l'identité, en se plaçant dans l'algèbre de Lie, peut simplifier cette recherche et on verra les conditions qui permettent de remonter des représentations de l'algèbre à celles du groupe.

Définition 7. *Soit* $\mathfrak{g}$ *une k-algèbre de Lie(le corps aura son importance). Une représentation de* $\mathfrak{g}$ *est un morphisme de k-algèbres de Lie de* $\mathfrak{g}$ *dans* $\mathfrak{gl}(E)$ *où E est un espace vectoriel complexe de dimension finie, c'est-à-dire R tel que :*

$$\forall X, Y \in \mathfrak{g}, [R(X), R(Y)] = R([X, Y]).$$

Comme dans le cas des groupes finis et compacts on se restreint aux représentations complexes et **de dimension finie** pour pouvoir par exemple disposer du lemme de Schur.

Proposition 3. *Une algèbre de Lie réelle* $\mathfrak{g}$ *peut être complexifiée en* $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \oplus i\mathfrak{g}$.
De manière évidente on peut étendre uniquement toute représentation de $\mathfrak{g}$ *en représentation de* $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. *Il y a bijection (l'inverse étant la restriction d'une représentation de* $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$*) entre les représentations irréductibles de* $\mathfrak{g}$ *et de* $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$.

Représentations de groupes et d'algèbres
Les morphismes de groupes de Lie sont des morphismes de groupes continus.

Théorème 9. *Soit f un morphisme de groupes de Lie de G dans G', $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}'$ les algèbres de Lie de G et G'. Alors f est de C^{∞} et la différentielle de f en l'identité, notée Df, est un morphisme d'algèbres de Lie de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}'$ vérifiant :*

$$Df(X) = \frac{d}{dt} f(exp(tX))|_{t=0} \tag{3.1}$$

Démonstration. Montrons que Df défini par la formule ci-dessus est bien un morphisme d'algèbres de Lie.
Df est $\mathbb{R}$-linéaire par changement de variable linéaire. Soit $X, Y \in \mathfrak{g}$.
On a au voisinage de $t = 0$ la formule de Baker-Campbell-Hausdorff :

$$exp(tX)exp(tY) = exp(t(X+Y) + \frac{t^2}{2}[X,Y] + O(t^3))$$

d'où pour $k \in \mathbb{N}*$:

$$(exp(\frac{X}{k})exp(\frac{Y}{k}))^k = (exp(\frac{1}{k}(X+Y) + O(\frac{1}{k^2}))^k = exp(X+Y+O(\frac{1}{k}))$$

ce qui donne par continuité de exp

$$exp(X+Y) = \lim_{k\to+\infty} (exp(\frac{X}{k})exp(\frac{Y}{k}))^k.$$

On en déduit, en utilisant le fait que f est un morphisme de groupes :

$$\begin{aligned} exp(tDf(X+Y)) &= exp(t(Df(X)+Df(Y)) \\ \text{d'où} \quad Df(X+Y) &= Df(X)+Df(Y). \end{aligned}$$

Montrons enfin que Df préserve le crochet.

$$\begin{aligned} \forall g \in G, \forall X \in \mathfrak{g}, exp(tDf(gXg^{-1})) &= f(exp(g(tX)g^{-1})) = f(gexp(tX)g^{-1}) \\ &= f(g)f(exp(tX))f(g^{-1}) \\ &= f(g)exp(tDf(X))f(g)^{-1} \\ &= exp(tf(g)Df(X)f(g^{-1})) \end{aligned}$$

d'où en dérivant en 0 pour $g = exp(tY)$:

$$Df([Y,X]) = [Df(Y), Df(X)].$$

□

On peut ainsi différencier des représentations de groupes de Lie en représentations d'algèbres de Lie. Beaucoup de propriétés sont conservées :

Théorème 10. *Soit G un groupe de Lie,* $(V, \rho), (W, \rho')$ *deux représentations de G (morphismes de groupes de Lie de G dans GL(E), E étant un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel de dimension finie),* $D\rho$ *(resp.* $D\rho'$*) la différentielle de* ρ *(resp.* ρ'*), représentation de l'algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *de G dans* $\mathfrak{gl}(E)$*. Alors :*

(i) F sous-espace vectoriel invariant par $\rho \Longrightarrow F$ *invariant par* $D\rho$*. On en déduit que :*

(ii) $(V, D\rho)$ *irréductible* $\Longrightarrow$ (V, ρ) *irréductible.*

(iii) $(V, \rho), (W, \rho')$ *équivalentes* $\Longrightarrow$ $(V, D\rho), (W, D\rho')$ *équivalentes.*

Si G est connexe*, (i), (ii) et (iii) sont des équivalences.*

Enfin notons le cas où on peut intégrer un morphisme d'algèbres de Lie. Rappelons qu'un espace topologique X est dit simplement connexe s'il est connexe et que tout lacet dans X est homotope dans X à un point.

Théorème 11. *Soit G un groupe de Lie simplement connexe, H un groupe de Lie,* $\mathfrak{g}$ *et* $\mathfrak{h}$ *leurs algèbres de Lie respectives.*
Alors pour tout morphisme d'algèbres de Lie $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$*, il existe un morphisme de groupes de Lie* $f : G \to H$ *tel que* $\phi = Df$*.*

Représentation adjointe

On va maintenant décrire des représentations de groupes et d'algèbres de Lie qui jouent un rôle très particulier.
Soit G un groupe de Lie, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. G agit sur lui-même par conjugaison (ou *automorphisme intérieur*) selon :

$$i_g : h \mapsto ghg^{-1}$$

On note que i_g est bijectif d'inverse $i_{g^{-1}}$ et $i_g \circ i_{g'} = i_{gg'}$. Si on différencie i_g en l'identité, on obtient un isomorphisme Ad_g de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}$, tel que $Ad_g \circ Ad_{g'} = Ad_{gg'}$. $Ad : G \to GL(\mathfrak{g})$ est donc une représentation du groupe de Lie G dans $\mathfrak{g}$, qu'on appelle la représentation adjointe de G.
La différentielle de la représentation Ad, notée ad, est une représentation de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ dans elle-même, encore appelée représentation adjointe (de $\mathfrak{g}$). En général on définit alors le crochet de Lie sur l'espace tangent en l'élément neutre de G $\mathfrak{g}$ par $[X, Y] = ad(X)(Y)$ et on vérifie que cela donne bien une algèbre de Lie (l'identité de Jacobi exprime que ad est une dérivation).

Ici on a adopté une démarche différente en posant le crochet égal au commutateur des matrices, montrons que tout est cohérent :

$$\begin{aligned}\forall X, Y \in \mathfrak{g},\ ad(X)(Y) &= \frac{d}{dt} Ad_{exp(tX)}(Y)|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} exp(tX) Y exp(-tX)|_{t=0} \\ &= XY - YX = [X, Y].\end{aligned}$$

En effet

$$Ad_g Y = \frac{d}{dt} gexp(tY)g^{-1}|_{t=0} = gXg^{-1}.$$

3.4 Exemple fondamental : SO(3), SU(2) et $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$

Nous allons maintenant illustrer les théorèmes précédents sur un exemple de base, la recherche des représentations irréductibles de SO(3). Elle est bien sûr motivée par l'invariance par rotation de nombreux hamiltoniens (nous développerons ce point dans la section suivante).
Le groupe SO(3) est connexe mais pas simplement connexe. Pour passer des représentations de l'algèbre à celle du groupe on va donc plonger SO(3) dans son revêtement universel SU(2), chercher les représentations irréductibles de l'algèbre de Lie de SU(2), et remonter à celles de SU(2) puis de SO(3) en factorisant à travers le morphisme de revêtement.

Définition 8. *Soit X, Y deux espaces topologiques. Une application p de X dans Y est un revêtement (on dit aussi que (X, p) (ou simplement X) est un revêtement de Y) si :*
il existe un ensemble F discret tel que pour tout y dans Y, il existe un voisinage V de y dans Y et un homéomorphisme $\Phi : p^{-1}(V) \to V \times F$ tels que $p \circ \Phi^{-1}$ est la projection sur V.

Définition 9. *Si Y est une variété connexe, on appelle revêtement universel de Y un revêtement (X, p) simplement connexe.*

Théorème 12. *SU(2) est le revêtement universel de SO(3).*

Démonstration. Notons pour commencer que

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C},\ |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}$$

est difféomorphe à la sphère S^3. SU(2) étant donc simplement connexe, il suffit de montrer que c'est un revêtement de SO(3).
L'algèbre de Lie de SU(2) est l'espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$ des matrices 2×2 complexes antihermitiennes de trace nulle. SU(2) agit naturellement sur $\mathfrak{su}(2)$ par la conjugaison Ad. En posant pour $X \in \mathfrak{su}(2)$ $||X|| =$

$\sqrt{detX}$, on obtient une norme invariante par l'action de SU(2).
Pour Ad : $SU(2) \to GL(\mathfrak{su}(2))$ on a donc Im Ad $\subset O(\mathfrak{su}(2))$ pour la norme précédente et par connexité de SU(2) Im Ad $\subset SO(\mathfrak{su}(2))$.
Ker Ad $= \{\pm I_2\}$ car une matrice dans Ker Ad commute avec toutes les matrices réelles. Le morphisme de groupes de Lie $\tilde{Ad} : SU(2)/\{\pm I_2\} \to SO(\mathfrak{su}(2))$ est de rang constant, injectif, donc c'est une immersion entre deux groupes de Lie de dimension 3, donc c'est un difféomorphisme local. $Im\,\tilde{Ad}$ étant un sous-groupe ouvert de $SO(\mathfrak{su}(2))$ qui est connexe, c'est $SO(\mathfrak{su}(2))$ tout entier. $\tilde{Ad}$ est un difféomorphisme local bijectif donc c'est un difféomorphisme.
On a donc montré que Ad : $SU(2) \to SO(\mathfrak{su}(2)) = SO(\mathbb{R}^3)$ est un revêtement. □

Nous allons donc chercher les représentations irréductibles de SU(2), qui seront de dimension finie car il est compact, à partir de celles de son algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$. Les représentations irréductibles de $\mathfrak{su}(2)$ sont en bijection avec celles de sa complexifiée $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.
Une base de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ (matrices complexes 2×2 de trace nulle) est :

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ X_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ X_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

avec les relations de commutation

$$[H, X_+] = 2X_+, [H, X_-] = -2X_-, [X_+, X_-] = H$$

Théorème 13. *Les représentations irréductibles de dimension finie de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ sont à isomorphisme près de la forme V_n de dimension $n+1$ où une base est constituée de vecteurs $(v_0, ..., v_n)$ où v_0 est tué par X_+ et $v_k = (X_-)^k v_0$.*

Démonstration. Soit (V, R) une représentation (sous-entendue complexe) irréductible de dimension finie de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. $R(H)$ (qu'on notera simplement H) admet au moins une valeur propre λ et un vecteur propre v associé à λ. On a alors :

$$HX_+v = (X_+H + 2X_+)v = (\lambda + 2)X_+v$$
$$HX_-v = (X_-H - 2X_-)v = (\lambda - 2)X_-v$$

H admet un nombre fini de valeurs propres distinctes donc il existe λ_0 valeur propre de H de vecteur propre associé v_0 tels que $X_+v_0 = 0$.
Posons alors pour tout $k \in \mathbb{N} \quad v_k = (X_-)^k v_0$. Par récurrence en utilisant les relations de commutation on obtient :

$$Hv_k = (\lambda_0 - 2k)v_k$$

$$X_+v_k = k(\lambda_0 - k + 1)v_{k-1}$$

Les v_k sont linéairement indépendants s'ils sont non nuls et V est de dimension finie donc il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $v_0 \neq 0, v_1 \neq 0, \cdots v_n \neq 0, v_{n+1} = 0$. Alors $\lambda_0 = n$. L'espace vectoriel (non nul) engendré par $v_0, v_1, \ldots, v_n$ étant stable par $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ car stable par les générateurs H, X_+, X_-, c'est V tout entier. Ainsi dim $V = n+1$. De plus cette représentation qu'on notera V_n est bien irréductible. □

Pour adapter les conventions à la physique (cf. application au moment cinétique) on pose $V^j = V_{2j}$ et on choisit pour base de V^j

$$|j, m\rangle = (-1)^{j+m} \sqrt{\frac{(j-m)!}{(j+m)!}}\, v_{j+m}$$

qui permet, en prenant pour base de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$

$$J_z = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad J_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_- = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d'avoir les relations

$$\begin{aligned} J_z|j\,m\rangle &= m|j\,m\rangle \\ J_+|j\,m\rangle &= \sqrt{(j-m)(j+m+1)}|j\ m+1\rangle \\ J_-|j\,m\rangle &= \sqrt{(j+m)(j-m+1)}|j\ m-1\rangle \end{aligned}$$

SU(2) étant simplement connexe, pour toute représentation V^j de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ il existe une représentation D^j de SU(2) telle que sa différentielle soit une représentation de $\mathfrak{su}(2)$ ayant pour complexifiée V^j.
Une représentation (V, R) de SU(2) se factorise par Ad en une représentation de SO(3) si et seulement si $R(KerAd) = Id_V$ soit $R(-I_2) = R(I_2) = Id_V$ ce qui est vrai pour les D^j si et seulement si j **est entier**.
Les représentations D^j où j est entier sont des représentations irréductibles de SO(3) et ce sont les seules par connexité de SO(3) : la différentielle d'une représentation irréductible est une représentation irréductible de l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(3)$ qui est isomorphe à l'algèbre de Lie de son revêtement universel, ce sont donc des V^j.

Harmoniques sphériques On dispose aussi d'une formulation directe des représentations D^j dans des espaces de fonctions sur la sphère S^2.
SO(3) agit naturellement en tant que matrices sur $\mathbb{R}^3$ et donc sur les fonctions définies sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$g \cdot f : x \mapsto f(g^{-1}x).$$

Cette représentation notée σ devient par restriction une représentation sur l'espace, de dimension finie cette fois, des polynômes harmoniques (i.e. de laplacien nul) à coefficients complexes homogènes de degré l noté $H^{(l)}$. On admet le résultat suivant :

Théorème 14. *$H^{(l)}$ est un espace vectoriel complexe de dimension $2l+1$ et stable par l'action σ de SO(3). L'action de $g \in$ SO(3) étant linéaire, (H^l, σ) est une représentation du groupe de Lie SO(3) équivalente à la représentation D^l.*

Définition 10. *On appelle **harmoniques sphériques** les fonctions sur la sphère restrictions de polynômes homogènes harmoniques.*

Lorsqu'un groupe de Lie est représenté dans un espace de fonctions différentiables, la différentielle de cette représentation associe à chaque élément de l'algèbre de Lie un opérateur différentiel sur ces fonctions. Ici on a une base de $\mathfrak{so}(3)$ formée par :

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient en calculant $\frac{d}{dt} f(exp(-t\eta_1)x|_{t=0}$:

$$(D\sigma)\eta_k = x_{k-1}\frac{\partial}{\partial x_{k+1}} - x_{k+1}\frac{\partial}{\partial x_{k-1}}$$

avec $x_0 = x_3$ et $x_4 = x_1$. On a en particulier en sphériques :

$$(D\sigma)\eta_3 = -\frac{\partial}{\partial \varphi},$$

opérateur antihermitien pour le produit scalaire issu de l'intégrale sur la sphère, qu'on transforme comme d'habitude en opérateur hermitien (ainsi que $(D\sigma)\eta_{2,3}$ en multipliant par i ($J_k = i(D\sigma)(\eta_k)$. Enfin on pose :

$$J_\pm = J_1 \pm iJ_2, \quad J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2.$$

Il existe alors une base (définie par orthonormalisation pour le produit scalaire sur $L^2(S^2)$) de H^l ($H^{(l)}$ restreint à la sphère) d'harmoniques sphériques $(Y_m^l)_{-l \le m \le l}$ qui vérifient :

$$J_3 Y_m^l = m Y_m^l,$$

$$J_+ Y_m^l = \sqrt{(l-m)(l+m+1)}Y_{m+1}^l, \quad J_- Y_m^l = \sqrt{(l+m)(l-m+1)}Y_{m-1}^l,$$

$$J^2 Y_m^l = l(l+1)Y_m^l.$$

On a bien retrouvé la représentation D^l, les Y_m^l étant les kets $|l\, m\rangle$.

Exemple Explicitons ces représentations pour des petites valeurs de l :
- $l = 0$: $H^0 = \mathbb{C}$, σ est la représentation triviale.
- $l = 1$. Une base de H^1 est simplement (x, y, z). L'action de $D\sigma$ est : η_k transforme x_k en 0, x_{k-1} en $-x_{k+1}$ et x_{k+1} en x_{k-1}.

3.5 Moment cinétique

On peut maintenant passer à l'interprétation des représentations qu'on a trouvées.

Moment cinétique orbital, spin
On définit un moment cinétique comme une observable vectorielle $\widehat{\mathbf{J}}$ dont les composantes satisfont les relations de commutation

$$[\widehat{J}_x, \widehat{J}_y] = i\hbar \widehat{J}_z \quad , \quad [\widehat{J}_y, \widehat{J}_z] = i\hbar \widehat{J}_x \quad , \quad [\widehat{J}_z, \widehat{J}_x] = i\hbar \widehat{J}_y$$

ce qui se résume par $\widehat{\mathbf{J}} \times \widehat{\mathbf{J}} = i\hbar \widehat{\mathbf{J}}$.
On voit qu'en prenant la base de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$

$$J_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \ , \ J_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \ , \ J_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on obtient une représentation de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, le morphisme étant $J_1 \mapsto \widehat{J}_x, J_2 \mapsto \widehat{J}_y, J_3 \mapsto \widehat{J}_z$. Le travail qu'on a fait précédemment s'interprète donc comme la quantification du moment cinétique, c'est-à-dire la décomposition de l'espace des états en représentations irréductibles de SU(2)). Lorsque SU(2) est un groupe de symétrie du système cette décomposition s'applique à chaque sous-espace propre du hamiltonien.
Lorsque le moment cinétique est orbital, c'est-à-dire s'écrit $\widehat{\mathbf{L}} = \widehat{\mathbf{r}} \times \widehat{\mathbf{p}}$ alors l'opérateur $\widehat{L}_z$ s'écrit dans l'espace $L^2(\mathbb{R}^3)$

$$\widehat{L}_z = \hat{x}\hat{p_y} - \hat{y}\hat{p_x} = -i\hbar(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}) \quad \text{soit en sphériques} \quad \widehat{L}_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

On reconnaît ainsi la représentation de SO(3) dans les espaces d'harmoniques sphériques, et comme les représentations irréductibles de SO(3) correspondent à des D^l avec l entier, on a l et m entiers pour un moment cinétique orbital.
Les D^j avec j demi-entier correspondent à des représentations irréductibles de SU(2) qui ne sont pas des représentations irréductibles de SO(3). On dit que ce sont des moments cinétiques de spin. Cela correspond au fait que ces états se transforment sous l'action des rotations comme une représentation projective et non linéaire de SO(3) (donc comme une représentation linéaire de son revêtement universel SU(2)).

4 Représentations des algèbres de Lie semi-simples complexes

On présente ici quelques résultats de la théorie générale des représentations d'une classe importante d'algèbres de Lie. Ceci permet de mieux comprendre le cas de $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$, qui intervient dans la classification des hadrons et l'hypothèse des quarks. On va donner ici des définitions et propriétés simplifiées par rapport au cas le plus général, car il faudrait introduire les notions d'algèbres nilpotentes et résolubles pour donner la bonne formulation (et la preuve) de certains résultats comme le critère de Cartan, alors qu'on n'en étudiera que des conséquences.

4.1 Définitions

Définition 11. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. Un idéal $\mathfrak{I}$ de $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Lie telle que*

$$\forall X \in \mathfrak{I}, \forall Y \in \mathfrak{g}, [X, Y] \in \mathfrak{I}$$

Définition 12. *Une algèbre de Lie est dite simple si elle n'est pas abélienne et si son seul idéal propre (i.e. distinct de $\mathfrak{g}$) est $\{0\}$.*

Définition 13. *Une algèbre de Lie est dite semi-simple si elle n'est pas abélienne et si son seul idéal abélien propre est $\{0\}$.*

Un groupe de Lie connexe est dit simple (resp. semi-simple) si son algèbre de Lie est simple (resp. semi-simple). Notons que le centre d'une algèbre de Lie (l'ensemble des X tels que $[X, Y] = 0 \ \forall Y \in \mathfrak{g}$) est un idéal abélien propre. Être semi-simple signifie en fait avoir un centre nul (on dit être "sans centre").

Définition 14 (Forme de Killing)**.** *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie, ad sa représentation adjointe. On définit sur $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ la forme de Killing K par $K(X, Y) = Tr(ad(X)ad(Y))$. C'est une forme bilinéaire symétrique.*

La forme de Killing est **invariante**, i.e. elle vérifie :

$$K([X, Y], Z) = K(Y, [Z, X])$$

Il suffit de développer en utilisant le fait que ad commute au crochet et $Tr\,AB = Tr\,BA$.
On dispose de deux résultats fondamentaux :

Théorème 15 (Weyl). *Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie semi-simple complexe, il existe une unique algèbre de Lie réelle (semi-simple) $\mathfrak{g}_0$ telle que $\mathfrak{g}_0$ est l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie simplement connexe* ***compact*** *et $\mathfrak{g}$ est la complexifiée de $\mathfrak{g}_0$.*

Théorème 16 (Critère de Cartan). *Un groupe de Lie semi-simple connexe G est compact si et seulement si la forme de Killing de son algèbre de Lie (réelle) $\mathfrak{g}$ est définie négative.*
Une algèbre de Lie est semi-simple si et seulement si sa forme de Killing est non-dégénérée.

On en déduit le théorème suivant :

Théorème 17 (Complète réductibilité). *Toute représentation de dimension finie d'une algèbre de Lie semi-simple est complètement réductible.*

Démonstration. Une preuve possible utilise le théorème de Weyl, sous le nom de "unitarian trick". Les représentations irréductibles de notre algèbre de Lie semi-simple complexe correspondent à celles du groupe de Lie compact en question et sont donc de dimension finie. Une autre preuve algébrique, que nous ne détaillerons pas, existe : elle utilise notamment **l'opérateur de Casimir** défini par $\sum_i \rho(X_i)^2$ (pour la représentation ρ de l'algèbre de Lie munie d'une base (X_i) orthonormée pour le produit scalaire $-K$) qui commute à la représentation et qui est donc, d'après le lemme de Schur, diagonal sur les représentations irréductibles. C'est la généralisation du carré du moment cinétique. □

La représentation adjointe d'une algèbre de Lie réelle est réelle et on aura besoin (comme pour les groupes) de représentations complexes. On prend donc sa complexifiée. Le critère de Cartan affirme par ailleurs que l'opposé de la forme de Killing (étendue à l'algèbre complexifiée par linéarité) est un produit scalaire pour lequel la représentation adjointe du groupe compact est unitaire, et on peut en multipliant par i avoir des endomorphismes hermitiens dans la représentation adjointe de l'algèbre complexifiée, et en dimension finie ils seront donc diagonalisables à valeurs propres réelles. Cette discussion rappelle d'ailleurs celle qu'on a eue à propos des générateurs infinitésimaux en physique (hermitiens) et "en maths" (antihermitiens).

4.2 Poids et racines

La méthode utilisée pour trouver les représentations de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ peut en fait se généraliser à toute algèbre de Lie semi-simple. Avant tout revoyons ce

qu'on a fait en introduisant un peu de vocabulaire :
On a introduit des opérateurs J_3, J_+ et J_- tels que

$$[J_3, J_+] = J_+, [J_3, J_-] = -J_-, [J_+, J_-] = 2J_3.$$

En d'autres termes J_+ et J_- sont des vecteurs propres de $ad(J_3)$, on dit que ce sont des *racines*. Dans une représentation irréductible donnée on a ensuite pris un vecteur propre (donc non nul) de J_3 (le ket $|l\, m\rangle$) de valeur propre m. On dit que c'est un *vecteur de poids* m. Les opérateurs J_+ et J_- permettent de passer de vecteurs de poids m à des vecteurs de poids $m+1$ ou $m-1$ et comme la représentation irréductible est de dimension finie par compacité de SU(2), on est arrivé à un *vecteur de poids maximal* l , c'est-à-dire v non nul tel que $J_+v = 0$ et $J_3v = tv$.
On a ensuite engendré toute la représentation en appliquant les puissances de J_- au vecteur de poids maximal.

On va tenter d'utiliser la même méthode que pour $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. On utilisera à partir de maintenant la base (H, X_+, X_-) de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ au lieu de $(J_3, J_\pm)$ ce qui revient vraiment au même, les relations de commutation devenant simplement :

$$[H, X_+] = 2X_+, [H, X_-] = -2X_-, [X_+, X_-] = H$$

Tout d'abord on cherche un élément particulier qui jouera le rôle de H, c'est-à-dire qu'on veut décomposer une représentation en sous-espaces propres de H. Dans le cas d'une algèbre de Lie semi-simple quelconque, il faut considérer non pas un vecteur H mais une sous-algèbre. On prendra une sous-algèbre abélienne dont l'image par la représentation est constituée de matrices hermitiennes pour pouvoir codiagonaliser toutes les matrices de cette algèbre.

Définition 15 (Sous-algèbre de Cartan)**.** *Une sous-algèbre de Cartan est une sous-algèbre abélienne maximale telle que tous ses éléments sont diagonalisables. On admet qu'il existe des sous-algèbres de Cartan et qu'elles sont toutes de même dimension (qu'on appelle le* ***rang*** *de l'algèbre de Lie).*

Pour $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ on peut prendre le candidat le plus simple, à savoir la sous-algèbre $\mathfrak{h}$ des matrices diagonales de trace nulle. Par la propriété de codiagonalisation on peut écrire toute représentation complexe de dimension finie de $\mathfrak{g}$ $V = \oplus V_\alpha$ où V_α est un sous-espace propre de $\mathfrak{h}$: un vecteur propre de $\mathfrak{h}$ est un vecteur non nul qui est vecteur propre de tout élément de $\mathfrak{h}$. Soit v un tel vecteur. On a donc une forme linéaire $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ telle que :

$$\forall H \in \mathfrak{h}, Hv = \alpha(H)v$$

On appelle α un **poids** de la représentation et vecteur de poids α un vecteur propre associé à α.

Cherchons maintenant l'analogue de $X_\pm$. On a noté précédemment que $X_\pm$ étaient des vecteurs propres de H dans la représentation adjointe. La décomposition qu'on vient de décrire étant valable pour toute représentation de dimension finie, elle l'est en particulier pour la représentation adjointe. Nous appellerons **racines** (de $\mathfrak{g}$) les poids non nuls de la représentation adjointe. On a donc :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus (\bigoplus_{racines\ \alpha} \mathfrak{g}_\alpha)$$

où chaque $\mathfrak{g}_\alpha$ est un espace de racine α. Soit X ($\in \mathfrak{g}$) un vecteur de racine α, v de poids (pour une représentation quelconque) β, $H \in \mathfrak{h}$. On a :

$$\begin{aligned} H(X(v)) =& X(H(v)) + [H, X](v) \\ &= X(\beta(H))v) + (\alpha(H)X)(v) \\ &= (\alpha(H) + \beta(H))X(v) \end{aligned}$$

ce qui montre que $ad(\mathfrak{g}_\alpha)(= [X \in \mathfrak{g}_\alpha, Y])$ envoie V_β dans $V_{\alpha+\beta}$.
Les racines agissent ainsi par translation sur les poids.

Nous allons maintenant utiliser les résultats qu'on a obtenus pour $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ en découpant notre algèbre de Lie semi-simple quelconque en petits $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. On remarque que si α est une racine, $-\alpha$ aussi. Alors :

Théorème 18. *Pour toute racine α,*

$$\mathfrak{s}_\alpha = \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$$

est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ isomorphe à $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

On peut choisir une base standard $(X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha, X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}, H_\alpha \in [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}])$ satisfaisant les relations de commutation de (X_+, X_-, H).
Toute représentation de $\mathfrak{g}$ étant aussi une représentation de sa sous-algèbre $\mathfrak{s}_\alpha$, c'est aussi une représentation de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ et on a en particulier que les valeurs propres de H_α dans la représentation de $\mathfrak{g}$ sont entières, i.e. les poids prennent des valeurs entières sur les H_α. Une autre propriété est la symétrie par rapport à 0 des valeurs propres de H_α (ce sont les entiers $-l \leq m \leq l$).
Commençons par munir le **réseau des racines** (formé par les vecteurs que sont les racines dans $\mathfrak{h}^*$) d'une métrique héritée de la forme de Killing sur $\mathfrak{g}$: $\langle \alpha, \beta \rangle = K(H_\alpha, H_\beta)$.

$$[H_\alpha, X_\beta] = \langle \alpha, \beta \rangle X_\beta \quad \text{et} \quad [H_\alpha, X_\alpha] = 2X_\alpha$$

d'où par intégralité des valeurs propres H_α :

$$2\frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} = m \in \mathbb{Z}$$

Comme dans une représentation de SU(2) on passe d'une valeur propre m de H à son opposé en appliquant $2m$ fois X_- ou X_+, on a ainsi pour α et β racines que $\beta - 2\frac{\langle\alpha,\beta\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}\alpha$ est encore racine. Dans le réseau des racines ceci se traduit par une réflexion par rapport à l'hyperplan orthogonal à α. Ces réflexions engendrent un groupe de symétrie des racines appelé le **groupe de Weyl**. Nous n'étudierons pas en détail l'action du groupe de Weyl mais on montre qu'il laisse invariant l'ensemble des poids d'une représentation quelconque de $\mathfrak{g}$.

L'étape suivante consiste à définir l'équivalent du vecteur de poids maximal qui engendrait par action de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ toute la représentation irréductible. On admet les faits suivants :

Proposition 4 (Ordonnement des racines)**.** *Il existe une partition de l'ensemble des racines en racines positives et racines négatives, l'opposé d'une racine positive étant négative, et une base $(\alpha_i)_{1\leq i\leq l}$ de l racines simples, telles que toute racine positive (resp. négative) s'exprime comme combinaison linéaire à coefficients entiers positifs ou nuls (resp. négatifs ou nuls) de ces racines simples. On peut ainsi définir un ordre sur les racines : $\alpha < \beta$ si $\beta - \alpha$ est positive ou nulle.*

Théorème 19. *Pour toute représentation de dimension finie il existe un vecteur v et un poids α tels que :*
(i) v est un vecteur de poids α,
(ii) v est annulé par tous les vecteurs racines associé à des racines positives.
v est un vecteur de poids maximal α.

Théorème 20. *Toute représentation irréductible possède un unique vecteur poids maximal (à un scalaire près) et est engendrée par l'action sur ce vecteur de poids maximal des "mots" d'éléments des espaces de racines simples négatives.*
Plus généralement si on a dans une représentation de dimension finie un vecteur de poids maximal, ce procédé engendre une sous-représentation irréductible.

Ci-dessus on appelle mots des produits de longueur quelconque (soit des composées de puissances). Ceci est un théorème d'unicité. Nous ne parlerons pas ici de l'existence mais il existe une méthode pour construire des représentations de dimension finie sous certaines conditions. Plus simplement on a par exemple l'existence de la représentation adjointe, de dimension finie si l'algèbre l'est.
Toute cette succession de théorèmes admis est bien abstraite ; regardons donc de plus près l'exemple de $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$.

4.3 Représentations de $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$

L'algèbre de Lie de SU(3) (compact) a pour complexifiée $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$, algèbre des matrices de taille 3 de trace nulle. On a donc directement la description évoquée dans le théorème de Weyl. De plus SU(3) étant connexe et simplement connexe, on parlera indifféremment de représentations de SU(3) ou de $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$.
Choisissons pour base de $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ les matrices Gell-Mann (analogues en dimension 3 des matrices de Pauli) :

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

On pose $F_i = \frac{\lambda_i}{2}$.
On a 3 sous-algèbres SU(2) notées $SU(2)_T$, $SU(2)_U$ et $SU(2)_V$ engendrées respectivement par : (F_1, F_2, F_3) , $(F_6, F_7, (\sqrt{3}F_8 - F_3)/2)$, $(F_4, F_5, (\sqrt{3}F_8 + F_3)/2)$. On note

$$T_\pm = F_1 \pm iF_2, \quad U_\pm = F_6 \pm iF_7, \quad V_\pm = F_4 \pm iF_5.$$

$$Y = \frac{2}{\sqrt{3}}F_8, \quad T_3 = F_3, \quad U_3 = (3Y/2 - T_3)/2, \quad V_3 = (3Y/2 + T_3)/2$$

On obtient tout un tas de relations de commutation entre ces opérateurs, dont on citera les conséquences, sans les lister ici.
On choisit pour sous-algèbre de Cartan les matrices diagonales de trace nulle, qui est de dimension 2, et donc on prend pour base T_3 et Y. Un vecteur $w_{m,y}$ est dit de poids (m, y) si

$$T_3 w_{m,y} = m w_{m,y} \quad Y w_{m,y} = y w_{m,y}$$

(m, y) est appelé le vecteur-poids. Les règles de commutation entrainent que :
• T_+ augmente m de 1, ne change pas y
• U_+ diminue m de $1/2$, augmente y de 1
• V_+ augmente m de $1/2$, augmente y de 1
• T_-, U_-, V_- ont les actions opposées.

T_+, U_+, V_+ sont associés aux racines positives (et leurs "opposés" aux négatives). Il existe un vecteur de poids maximum $w_{t,y}$ annulé par T_+, U_+, V_+, dans une représentation irréductible de dimension finie (car les poids sont bornés) et l'action des produits de T_-, U_-, V_- sur $w_{t,y}$ engendre un sous-espace stable sous $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ (stable sous les "négatifs" par définition et sous les autres à l'aide des relations de commutation) donc c'est la représention irréductible.
$w_{t,y}$ est aussi un vecteur de poids maximum pour les trois petits blocs $SU(2)_T$, $SU(2)_U$ et $SU(2)_V$ avec poids maximum respectifs : t, $u = (3y/2 - t)/2$, $v = (3y/2+t)/2$. L'étude des représentations de SU(2) a montré que ces poids maximum étaient entiers ou demi-entiers (on est revenu à la convention des physiciens avec des bases $(J_3, J_\pm)$). On a ainsi des entiers p et q tels que :

$$t = \frac{p}{2}, \quad u = \frac{q}{2}, \quad v = \frac{p+q}{2}$$

Ces entiers caractérisent le vecteur-poids maximum $(t, y) = (\frac{p}{2}, \frac{p+2q}{3})$ donc caractérisent la représentation irréductible qu'on notera ainsi $D(p, q)$.
La diagonalisation de la sous-algèbre de Cartan nous montre que les multiplicités des poids correspondent en fait à des dimensions des représentations. Plus précisément la somme de la multiplicité des poids d'une représentation est égale à la dimension de cette représentation. La manière de calculer ces multiplicités est encore de se ramener à ce qu'on sait sur SU(2) : dans une représentation irréductible V^j de dimension $2j + 1$, on a une multiplicité 1 pour chaque entier l entre $-j$ et j. En appliquant successivement les opérateurs "négatifs" on obtient des dégénérescences lorsqu'on a plusieurs chemins pour aller du poids maximal à un autre poids. On peut démontrer la règle suivante :

Théorème 21. *Sur le graphique des poids (constitué des vecteurs-poids) d'une représentation irréductible de $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$, les poids sont situés sur des hexagones concentriques qui peuvent dégénérer en des triangles. La multiplicité de chaque poids est 1 sur le bord (c'est celle d'un SU(2) pur) et elle augmente de 1 à chaque couche hexagonale lorsqu'on se rapproche du centre, jusqu'à ce qu'on rencontre une couche triangulaire. Alors la multiplicité devient constante jusqu'au centre.*

Ceci permet de montrer que la dimension de $D(p, q)$ est $\frac{1}{2}(p + 1)(q + 1)(p + q + 2)$. La symétrie de cette formule montre qu'on peut avoir des représentations irréductibles non isomorphes de même dimension (au moins $D(p, q)$ et $D(q, p)$).
Passons maintenant à l'étude de certaines représentations particulières. La première qui vient à l'esprit est bien sûr la représentation adjointe, de dimension sur $\mathbb{C}$ celle de $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ c'est-à-dire 8. La dimension de la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ des matrices diagonales de trace nulle est 2 : 0 est dans la représentation adjointe un poids de multiplicité 2. On peut trouver 6 autres racines,

qui viennent en paires $(\alpha, -\alpha)$ en prenant une base du supplémentaire de $\mathfrak{h}$, par exemple les matrices E_{ij} avec $i \neq j$. L'action d'une matrice diagonale de trace nulle $H = \begin{pmatrix} L_1(H) & 0 & 0 \\ 0 & L_2(H) & 0 \\ 0 & 0 & L_3(H) \end{pmatrix}$ (où les L_i sont les formes linéaires coordonnées correspondantes) sur E_{ij} s'écrit

$$[H, E_{ij}] = (L_i(H) - L_j(H))E_{ij}$$

En prenant pour base de $\mathfrak{h}$ les matrices définies plus haut (T_3, F_8) (qui a l'avantage, par rapport à (T_3, Y) qu'on a utilisée précédemment, de donner un joli hexagone régulier) on peut tracer le diagramme des racines dans la base duale de $\mathfrak{h}^*$ (en rajoutant le point double en 0).

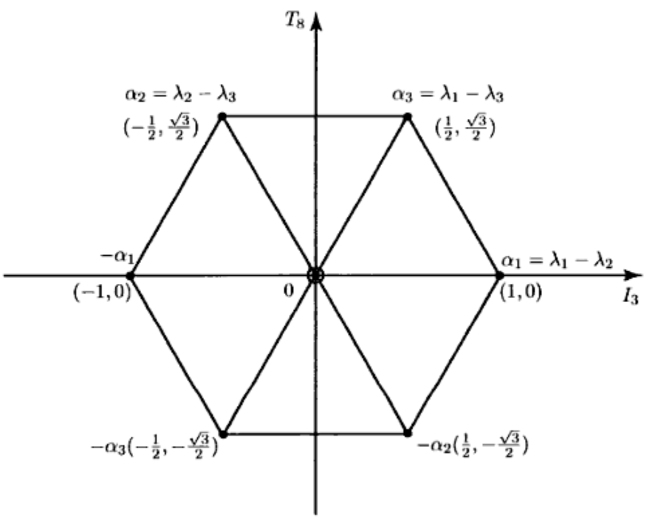

Figure 1. La représentation **8**

On voit d'ailleurs à quoi correspond la séparation entre racines positives (par exemple $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$) et négatives : il s'agit d'avoir des translations dans le même demi-plan pour pouvoir affirmer qu'on s'arrête, en dimension finie, à un vecteur de poids maximal.

Regardons maintenant la représentation fondamentale, qui consiste à faire agir simplement les matrices de $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{C}^3$. En prenant la base canonique de $\mathbb{C}^3$ $(e_i)_{i=1,2,3}$ sur laquelle on fait agir la sous-algèbre de Cartan de base (T_3, Y), on obtient les poids λ_i tels que $He_i = \lambda_i(H)e_i$ de composantes respectives dans la base duale de (T_3, Y) :

$$\lambda_1 = (1/2, 1/3), \quad \lambda_2 = (-1/2, 1/3), \quad \lambda_3 = (0, -2/3).$$

On voit que c'est la représentation irréductible $D(1,0)$ de vecteur de poids maximal e_1 et de poids maximal λ_1.
La représentation irréductible $D(0,1)$ est ce qu'on appelle la conjuguée de $D(1,0)$: on l'obtient dans le même espace vectoriel sous-jacent $\mathbb{C}^3$ en prenant comme opérateurs les matrices complexes conjuguées si on la voit comme une représentation de SU(3), c'est-à-dire que dans l'algèbre de Lie complexifiée $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ X devient $-{}^tX$. En effet si on regarde l'action de ces matrices sur la base canonique on obtient pour poids (toujours dans la base duale de (T_3, Y)) :

$$\bar{\lambda_1} = (-1/2, -1/3), \quad \bar{\lambda_2} = (1/2, -1/3), \quad \bar{\lambda_3} = (0, 2/3)$$

qui est bien la $D(0,1)$. De manière générale $D(q,p)$ est en fait la conjuguée de $D(p,q)$ selon le même principe.
Nous noterons à partir de maintenant (car en petite dimension il n'y pas d'ambigüité) les représentations suivantes selon leur dimension :

$$D(1,0) = \mathbf{3}, \quad D(0,1) = \bar{\mathbf{3}}, \quad D(1,1) = \mathbf{8} \text{ (c'est la représentation adjointe)}$$

ainsi que

$$D(2,0) = \mathbf{6}, \quad D(0,2) = \bar{\mathbf{6}}, \quad D(3,0) = \mathbf{10}.$$

Un outil fondamental pour construire des représentations est le produit tensoriel. Nous avons défini le produit tensoriel de deux représentations d'un groupe ρ_1, ρ_2. Lorsqu'on différencie $\rho_1 \otimes \rho_2$ on obtient la représentation d'algèbre $D\rho_1 \otimes Id \oplus Id \otimes D\rho_2$, qu'on notera $D\rho_1 \otimes D\rho_2$. Dans le langage des poids on a une construction aisée du produit tensoriel à partir de la proposition suivante :

Proposition 5. *Soit ρ_1, ρ_2 deux représentations de $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$.*
Si v_1 (resp. v_2) est un vecteur de poids λ_1 (resp. λ_2) dans la représentation ρ_1 (resp. ρ_2), alors $v_1 \otimes v_2$ est un vecteur de poids $\lambda_1 + \lambda_2$ dans la représentation $\rho_1 \otimes \rho_2$.

On a la même proposition en remplaçant "poids" par "poids maximum". Ainsi on regarde dans le produit tensoriel le poids maximum, puis on engendre la représentation irréductible qui lui est associée, et on recommence avec le nouveau poids maximum du diagramme privé des poids de la premiere représentation irréductible.

$$D(1,0) \otimes D(0,1) = D(1,1)(= \mathbf{8}) \oplus D(0,0)(= \mathbf{1})$$
$$D(1,0) \otimes D(1,0) = D(2,0)(= \mathbf{6}) \oplus D(0,1)(= \bar{\mathbf{3}})$$

$$\begin{aligned} D(1,0) \otimes D(1,0) \otimes D(1,0) &= (D(2,0) \otimes D(1,0)) \oplus (D(0,1) \otimes D(1,0)) \\ &= (D(3,0)(= \mathbf{10}) \oplus \mathbf{8}) \oplus (\mathbf{8} \oplus \mathbf{1}) \end{aligned}$$

Plus généralement toute représentation irréductible apparaît dans les puissances tensorielles de la **3**, qui constitue donc une sorte de générateur des représentations de SU(3).

5 SU(3) et les quarks

5.1 Classification des hadrons

On a constaté que les **hadrons**, particules soumise à l'interaction forte (par exemple proton, neutron, mésons π), se regroupaient en multiplets semblables par la masse et par l'intensité des interactions fortes les concernant (en ne regardant donc pas les différences de charge), et que ces multiplets correspondaient à un modèle de symétrie de l'hamiltonien des interactions fortes nommé l'isospin, appelé ainsi car fondé sur un groupe de symétrie SU(2) comme le spin. La symétrie induit la conservation dans les interactions fortes d'un nombre quantique correspondant à une "composante" de l'isospin notée T_3 (et appelée isospin).
Expérimentalement l'isospin était relié à la charge par la relation

$$Q = \frac{1}{2}B + T_3 \tag{5.1}$$

où B est un autre nombre quantique conservé lors des réactions nucléaires, le *nombre baryonique* valant 0 pour les mésons π, et 1 pour le proton et le neutron (qui sont donc des **baryons**). Les baryons sont des particules "lourdes" et on a constaté que leur nombre était conservé dans les réactions mettant en jeu l'interaction forte. On appelle alors **mésons** les hadrons qui ne sont pas des baryons (et on a donc appelé méson π le pion).
On a ensuite découvert des particules dites *étranges* intervenant dans des réactions où était violée cette égalité, par exemple les particules nommées Λ^0(baryon) et K^0(méson). On a pu attribuer à ces particules étranges un autre nombre quantique additif, l'étrangeté S, qui donne 0 aux particules respectant (5.1) et par exemple 1 au K^0 et -1 au Λ^0.
On a donc abouti à une nouvelle relation

$$Q = \frac{1}{2}(B + S) + T_3. \tag{5.2}$$

On définit alors l'hypercharge $Y = B + S$.
On a de cette manière pu classifier les hadrons connus en familles ayant approximativement même masse, même hypercharge et même isospin.
La symétrie SU(2) d'isospin est en fait une symétrie contenue dans un groupe

plus grand SU(3) dit de saveur. On peut classer les mésons et baryons connus (chacun au nombre de 8) dans la représentation adjointe **8**, où chaque particule est un vecteur de poids de la représentation adjointe, dont le poids dans la base (T_3, Y) par exemple a pour composantes son hypercharge et son isospin.
D'autres particules découvertes par la suite ont pu être classées de la même manière dans la représentation **10**. On les appelle des résonances baryoniques.

5.2 Le modèle des quarks

Le modèle des quarks donne alors un rôle aux représentations **3** et $\bar{\mathbf{3}}$ qui n'apparaissaient pas jusque là. On appelle quarks les vecteurs de poids de la représentation **3** ($e_1 = up, e_2 = down, e_3 = strange$) et antiquarks $(\bar{u}, \bar{d}, \bar{s})$ ceux de la $\bar{\mathbf{3}}$. Comme on a

$$\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}$$

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{10} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}$$

les octets des mésons et des baryons apparaissent sous des formes composées de quarks et d'antiquarks, plus précisément :

$$\text{méson} = \text{état lié de } q\bar{q}$$

$$\text{baryon} = \text{état lié de } qqq$$

Pour respecter le principe de Pauli il a fallu introduire un nouveau degré de liberté associé à chaque quark, la couleur, définie par un vecteur dans un espace de Hilbert de dimension 3

$$|\psi\ couleur\rangle = \psi_r|red\rangle + \psi_g|green\rangle + \psi_b|blue\rangle$$

L'hypothèse dite de confinement des quarks est l'invariance des états des hadrons dans toute redéfinition des couleurs, c'est-à-dire une multiplication du vecteur de couleur par une matrice de SU(3). Ceci signifie qu'on a une nouvelle symétrie $SU(3)_c$ de couleur (exacte, tandis que celle de saveur n'est qu'approchée, à cause des différences de masses par exemple). Seuls les états liés de qqq et $q\bar{q}$ sont observables. La couleur, introduite pour "réparer" le modèle de la saveur, s'est avérée devenir dans la théorie de la chromodynamique quantique (QCD) la base des interactions fortes. On suppose une invariance de jauge locale, c'est-à-dire qu'il y a un groupe de symétrie $SU(3)_c$ en tout point de l'espace-temps. Ceci conduit à l'existence de champs de jauges et de bosons de jauge responsables des interactions (on les appelle les gluons pour l'interaction forte). Notons que d'autres saveurs de quarks ont été découvertes et qu'on suppose désormais qu'il y en a 6, c'est-à-dire que le groupe de saveur est SU(6), mais de manière encore moins exacte.

Bibliographie

[1] William Fulton, Joe Harris, *Representation theory, a first course*, 1991.

[2] James E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, 1972.

[3] Yvette Kosmann-Schwarzbach, *Groupes et symétries*, 2006.

[4] Jean-Pierre Serre, *Lie algebras and Lie groups, 1964 Harvard lectures*, 1965.

[5] Jean-Paul Blaizot, Jean-Claude Tolédano, *Symétries et physique microscopique*, 1997.

[6] André Rougé, *Introduction à la physique subatomique*, 2005.

[7] Jean-Bernard Zuber, *Invariances en physique et théorie des groupes*, 2009.