# Fonctions spéciales et théorie des représentations de groupes

Thomas Haettel et Michał Wąs
Sous la direction de Charles Torossian

# Table des matières

# Introduction

Le but de ce mémoire est de comprendre les fonctions spéciales à l'aide de la théorie de représentations de groupes.

Dans une première partie, nous introduirons les définitions élémentaires des représentations de groupes ainsi que les résultats qui nous seront utiles par la suite.

Dans une seconde partie, nous nous intéresserons au groupe des matrices d'ordre deux unitaires complexes de déterminant 1, $SU(2)$, et en déterminerons les représentations irréductibles ; ensuite, nous en déduirons des relations fonctionnelles sur les coefficients matriciels et appliquerons ceci à la résolution de l'équation de Laplace.

Dans une troisième partie, nous nous intéresserons au groupe des déplacements du plan euclidien, $M(2)$, et en déterminerons les représentations irréductibles ; ensuite, nous exprimerons les fonctions de Bessel comme coefficients de ces représentations et en déduirons de nombreuses formules sur celles-ci, jusqu'à leur équation différentielle.

# Chapitre 1

# Représentations de groupes

**Définition 1.** *Une représentation d'un groupe de Lie $G$ dans un espace de Hilbert $H$ est un morphisme de groupes continu $T : G \to \mathcal{GL}(H)$ et tel que $T(e) = Id_H$ , où $\mathcal{GL}(H)$ désigne le groupe linéaire de $H$, et $e$ est l'élément neutre de $G$.*

*Si $H$ est de dimension finie, on l'appelle dimension de la représentation.*

La propriété de morphisme s'exprime par $\forall g_1, g_2 \in G,\ T(g_1)T(g_2) = T(g_1g_2)$. On a bien sûr $T(e) = Id_H$ pour $e$ l'élément neutre du groupe.

**Définition 2.** *Deux représentations d'un groupe $(T_1, H_1)$ et $(T_2, H_2)$ sont dites équivalentes s'il existe un isomorphisme $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ qui les entrelace* ie *$AT_1 = T_2A$.*

Ceci est bien une relation d'équivalence.

**Proposition 1.** *Soit $G$ un groupe de Lie, $a$ un vecteur de l'algèbre de Lie de $G$ et $(T, H)$ une représentation de $G$ de dimension finie. Soit $A = \frac{d}{dt}\big(T(\exp ta)\big)\Big|_{t=0}$ alors $\forall t \in \mathbb{R}, T(\exp ta) = \exp tA$*

*Démonstration.* Nous avons d'un côté

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(T(\exp ta)\big)\Big|_{t=s} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}\big(T(\exp ha)T(\exp sa)\big)\Big|_{h=0} = AT(\exp sa)$$

et de l'autre

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\exp tA)\big)\Big|_{t=s} = A\exp sA.$$

Ainsi $T(\exp ta)$ et $\exp tA$ sont solution de

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X(t) = AX(t),$$

de plus $T(\exp 0) = Id_H = \exp 0_{\mathcal{L}(H)}$, ce qui donne l'égalité par unicité des solutions. ☐

**Définition 3.** *Un sous-espace fermé $E$ de $H$ est dit invariant si* $\forall g \in G,\ T(g)(E) = E$.

**Définition 4.** *Une représentation est dite irréductible si les seuls sous-espaces invariants sont* $\{0\}$ *et* $H$.

**Définition 5.** *Une représentation est dite complètement réductible si elle peut s'écrire comme somme hilbertienne de représentations irréductibles sur des sous-espaces invariants de* $H$.

**Définition 6.** *Une représentation $T$ dans un espace de Hilbert $H$ est dite unitaire si $T$ préserve le produit scalaire,* ie *:*

$$\forall g \in G, \forall a, b \in H, < T(g)a, T(g)b >=< a, b >$$

**Lemme** (Lemme de Schur)**.** *Soient $T_1$ et $T_2$ deux représentations d'un groupe $G$, irréductibles et de dimension finie, dans les espaces $L_1$ et $L_2$ respectivement. Soit $A$ un opérateur de $L_1$ dans $L_2$ qui entrelace $T_1$ et $T_2$ (ie $AT_1 = T_2A$). Alors :*
- *ou bien $A$ est l'opérateur nul*
- *ou bien $A$ est inversible, auquel cas $T_1$ et $T_2$ sont donc équivalentes, et de plus $A$ est unique à constante multiplicative près.*

*Démonstration.* Notons $M_1 = \ker A \subset L_1$ et $M_2 = \mathrm{Im}A \subset L_2$. Puisque $A$ entrelace $T_1$ et $T_2$, ces deux sous-espaces sont invariants (par $T_1$ et $T_2$ respectivement) :

$$\forall x \in M_1, \forall g \in G, AT_1(g)x = T_2(g)Ax = 0 \text{ donc } T_1(g)x \in M_1$$
$$\forall y = Ax \in M_2, \forall g \in G, T_2(g)y = T_2(g)Ax = AT_1(g)x \text{ donc } T_2(g)y \in M_2$$

Or $T_1$ et $T_2$ sont irréductible, donc $M_1$ et $M_2$ sont soit nuls, soit coïncident avec l'espace entier. Distinguons 3 cas :
- Si $M_2 = 0$, $\mathrm{Im}A = 0$ donc $A = 0$.
- Si $M_1 = L_1$, $\ker A = L_1$ donc $A = 0$.
- Si $M_1 = 0$ et $M_2 = L_2$, alors $A$ est une application linéaire injective et surjective, entre deux espaces vectoriels de dimension finie : $A$ est donc inversible.

Montrons l'unicité de $A$ dans ce dernier cas : Supposons l'existence d'un autre opérateur $B$ entrelaçant $T_1$ et $T_2$. Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ , $B - \lambda A$ entrelace également $T_1$ et $T_2$. Choisissons $\lambda$ dans le spectre de $BA^{-1}$ : on sait alors que $\det(BA^{-1} - \lambda I) = 0$, ce qui signifie que $B - \lambda A$ est non inversible : on est donc dans le cas $B - \lambda A = 0$ , d'où $B = \lambda A$.

□

**Corollaire.** *Soit $T$ une représentation d'un groupe $G$ dans un espace de Hilbert $H$. Supposons que $T$ s'écrive comme somme hilbertienne de représentations $T_i$ dans des sous-espaces $H_i$, ces représentations étant irréductibles* *et deux à deux non équivalentes. Soit $E$ un sous-espace invariant (non nul) de $H$, tel que la restriction de $T$ à $E$ soit complètement réductible. Alors $E$ est somme hilbertienne de certains sous-espaces $H_i$ :*

$$E = \bigoplus_n H_{i_n}.$$

*Démonstration.* Nous allons commencer par démontrer le :

**Lemme.** *Soit $T$ une représentation d'un groupe $G$ dans un espace de Hilbert $H$. Supposons que $T$ soit somme directe orthogonale de représentations $T_i$ dans des sous-espaces $H_i$, ces représentations étant irréductibles et deux à deux non équivalentes. Alors tout sous-espace invariant minimal (non nul) $E$ coïncide avec l'un des $H_i$.*

*Démonstration.* Notons $P_i$ le projecteur orthogonal de $E$ dans $H_i$. Notons $S$ la restriction de la représentation $T$ à $E$. Alors, on a pour tout $i$ : $P_i S = T_i P_i$. Or $S$ et $T_i$ sont irréductibles, donc d'après le lemme de Schur, on sait que si $S$ et $T_i$ sont non équivalentes, alors $P_i = 0$.

Or on sait que les représentations $T_i$ sont deux à deux non équivalentes : il existe donc au plus un indice $j$ tel que $P_j \neq 0$.

Donc pour tout $i \neq j$, $P_i = 0$ donc $E$ est orthogonal à $H_i$. Or $H$ est somme directe orthogonale des $H_i$, donc $E \subset H_j$. Enfin, $E$ est un sous-espace invariant non nul de la représentation irréductible $T_j$, donc $E = H_j$.

□

Revenons à la démonstration du corollaire. Ecrivons le sous-espace invariant $E$ comme somme directe orthogonale de sous-espaces invariants minimaux $F_j$ :

$$E = \bigoplus_j F_j$$

Or, d'après le lemme, chaque $F_j$ coïncide avec l'un des $H_i$, ce qui conclut la démonstration.

□

**Définition 7.** *Une représentation régulière $T$ à gauche (resp. à droite) d'un groupe $G$ est une représentation dans l'espace vectoriel des applications continues de $G$ dans un espace vectoriel L, par :*

$$T(g_0)f(g) = f(g_0^{-1}g) \text{ (resp. } T(g_0)f(g) = f(gg_0) \text{ ) .}$$

**Théorème.** *Toute représentation irréductible $T$ d'un groupe $G$ dans un espace de Hilbert $H$ est algébriquement équivalente à une sous-représentation d'une représentation régulière dans l'espace vectoriel des fonctions continues de $G$ dans $\mathbb{C}$ (*ie *sans munir cet espace d'un produit scalaire).*

*Démonstration.* Fixons $a \in H$ non nul. Notons $L$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur $G$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Définissons l'opérateur $A$ :

$$\begin{aligned} A : H \to & L \\ f \mapsto & A(f) : g \mapsto (T(g)f, a) \end{aligned}$$

Notons $L' = ImA$ : alors $A : H \to L'$ est surjectif. Définissons $S$ représentation de $G$ dans $L'$ par :

$$S(g_0)f(g) = f(gg_0).$$

S est une représentation régulière à droite de $G$ : montrons qu'elle est équivalente à $T$.

Remarquons que $A$ entrelace $S$ et $T$ :

$$AT(g_0)f(g) = (T(g)T(g_0)f, a) = (T(gg_0)f, a) = Af(gg_0) = AS(g_0)f(g)$$

Montrons que $A$ est injectif : Soit $f \in \ker A$. $Af = 0$, donc pour tous $g, g_0 \in G$, $Af(gg_0) = AT(g_0)f(g) = 0$ : cela signifie que $T(g_0)f \in \ker A$, et ce pour tout $g_0 \in G$ : $\ker A$ est donc un sous-espace invariant pour $T$. Or $T$ est irréductible, donc $\ker A = 0$ ou $\ker A = H$. Or $Aa(e) = (T(e)a, a) = (a, a) > 0$ (où $e$ désigne l'élément neutre de $G$). Donc $A \neq 0$ : $\ker A = 0$.

A est donc un isomorphisme entrelaçant $S$ et $T$ : ces deux représentations sont donc équivalentes. □

# Chapitre 2

# Représentation du groupe SU(2)

Nous allons nous intéresser à un problème à première vu étrange, résoudre l'équation de Laplace en dimension 4 avec condition au bord sphérique

$$\begin{aligned} \Delta f &= 0 \quad \text{sur } B \\ f|_{\partial B} &= g, \end{aligned}$$

où $B$ est le boule unité de $\mathbb{R}^4$. Cette idée provient du fait que de nombreuses fonctions spéciales résolvent l'équation de Laplace dans différents systèmes de coordonnées, comme présenté dans [2]. Le système de coordonnées qui nous intéressera sera le suivant :

$$x_1 = r\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi+\phi}{2}, \tag{2.1a}$$

$$x_2 = r\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi+\phi}{2}, \tag{2.1b}$$

$$x_3 = r\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi-\phi}{2}, \tag{2.1c}$$

$$x_4 = r\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi-\phi}{2}, \tag{2.1d}$$

où $x_1, x_2, x_3, x_4$ sont les coordonnées cartésiennes usuelles, comme nous le verrons ces coordonnées correspondent à une paramétrisation simple SU(2) et c'est pour cela que nous étudierons ce groupe. Dans ce système de coordonnées l'expression du laplacien est

$$\Delta = \frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}r^3\frac{\partial}{\partial r}+\frac{4}{r^2\sin^2\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}-2\cos\theta\frac{\partial^2}{\partial\psi\partial\phi}+\frac{\partial^2}{\partial\psi}\right] = \frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}r^3\frac{\partial}{\partial r}+\frac{4}{r^2}\tilde{\Delta}. \tag{2.2}$$

Si nous essayons de séparer les variables angulaires et la variable radiale en écrivant $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = R(r)T(\phi, \theta, \psi)$, alors le problème $\Delta f = 0$ à l'intérieur de boule, se sépare en

$$4\tilde{\Delta}T = -\mu T, \tag{2.3}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r^3\frac{\partial R}{\partial r} = \mu R, \tag{2.4}$$

avec $\mu$ une constante arbitraire à déterminer.

**Lemme.** *Les solutions de classe $C^\infty$ de l'équation* (2.4) *sont les $\lambda r^s$ avec $\lambda in\mathbb{R}$ et $s$ entier positif et $\mu = s(s+2)$.*

*Démonstration.* La seconde équation est une équation différentielle linéaire ordinaire d'ordre 2, qui après le changement de variable $r = e^x$ devient à coefficients constants. Les solutions sont l'espace vectoriel engendré par les $r^\alpha \cos(\beta \ln r)$ et $r^\alpha \sin(\beta \ln r)$ avec $s = \alpha + i\beta$ solution de $\mu = s(s+2)$, cet espace est bien de dimension 2 pour tout $\mu \neq -1$. Pour $\mu = -1$ l'espace des solutions est engendré par $\frac{1}{r}$ et $\frac{\ln r}{r}$. Les seuls cas où il existe des solutions ne présentant pas de singularité en 0 sur l'une des dérivées est le cas $s$ entier positif. □

Alors la première équation se récrit

$$\tilde{\Delta}T = -\frac{s}{2}(\frac{s}{2}+1)T, \quad s \in \mathbb{N}.$$

Comment nous le verrons au cours de cette partie les solutions pourront être exprimé à partir des coefficients des représentations irréductibles de SU(2).

## 2.1 Le groupe SU(2)

Dans cette section nous nous intéresserons aux propriétés du groupe SU(2), nous pourrons ensuite les transposer sur les propriétés des représentations de ce groupe.

### 2.1.1 Propriétés du groupe

Le groupe SU(2) des matrices unitaires de rang deux est le groupe des matrices complexes :

$$\left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \middle| \, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\}.$$

L'égalité $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ peut se récrire $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 = 1$ avec $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ et $\beta = \beta_1 + i\beta_2$, donc SU(2) est homéomorphe à la sphère de dimension trois $\mathbb{S}_3$. La paramétrisation suivante introduisant trois angles $\phi, \theta, \psi$ permet d'écrire les éléments du groupe sous la forme simple[1] :

$$\begin{aligned} u(\phi,\theta,\psi) &= \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2}e^{\frac{i(\phi+\psi)}{2}} & i\sin\frac{\theta}{2}e^{\frac{i(\phi-\psi)}{2}} \\ i\sin\frac{\theta}{2}e^{\frac{i(\psi-\phi)}{2}} & \cos\frac{\theta}{2}e^{-\frac{i(\phi+\psi)}{2}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{\frac{i\phi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\phi}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & i\sin\frac{\theta}{2} \\ i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\frac{i\psi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\psi}{2}} \end{pmatrix} = u(\phi,0,0)u(0,\theta,0)u(0,0,\psi) \end{aligned}$$

avec

$$0 \leqslant \phi < 2\pi, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad -2\pi \leqslant \psi < 2\pi$$

Les paramètres sont définis uniquement dans le cas $\alpha\beta \neq 0$, il n'y a pas unicité si $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$, c'est le même problème que pour les coordonnées géographiques de la sphère aux deux pôles. Ce choix de paramétrage permet aussi d'obtenir les angles d'Euler décrivant les rotations de $\mathbb{R}^3$ en passant au quotient $\mathrm{SU}(2)/\{1,-1\} \simeq \mathrm{SO}(3)$ ; $\psi$ est l'angle de rotation, $\theta$ est l'angle de nutation et $\phi$ est l'angle de précession. Les relations donnant ces paramètres en fonction des coefficients matriciels sont :

$$\cos\theta = 2|\alpha|^2 - 1 \tag{2.5a}$$

$$e^{i\phi} = -\frac{\alpha\beta i}{|\alpha||\beta|} \tag{2.5b}$$

$$e^{\frac{i(\phi+\psi)}{2}} = \frac{\alpha}{|\alpha|} \tag{2.5c}$$

### 2.1.2 Paramétrisation du produit d'éléments

Nous allons déterminer les paramètres du produit de deux éléments du groupe $u_1, u_2$ en fonctions des paramètres de ces deux éléments $\phi_1, \theta_1, \psi_1$ et $\phi_2, \theta_2, \psi_2$ dans le cas particulier utile par la suite où $\phi_1 = \psi_1 = \psi_2 = 0$. Alors

$$u(\phi,\theta,\psi) = u_1 u_2 = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_1}{2} & i\sin\frac{\theta_1}{2} \\ i\sin\frac{\theta_1}{2} & \cos\frac{\theta_1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_2}{2}e^{\frac{i\phi_2}{2}} & i\sin\frac{\theta_2}{2}e^{\frac{i\phi_2}{2}} \\ i\sin\frac{\theta_2}{2}e^{-\frac{i\phi_2}{2}} & \cos\frac{\theta_2}{2}e^{-\frac{i\phi_2}{2}} \end{pmatrix}.$$

Ce qui donne en multipliant les deux matrices et en utilisant les relations (2.5)

[1] On remarquera que $u(0,0,\psi) = u(\psi,0,0)$

$$\cos\theta = \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2\cos\phi_2, \tag{2.6a}$$
$$e^{i\phi} = \frac{\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2\cos\phi_2 + i\sin\theta_2\sin\phi_2}{\sin\theta}, \tag{2.6b}$$
$$e^{\frac{i(\phi+\psi)}{2}} = \frac{\cos\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2}e^{\frac{i\phi_2}{2}} - \sin\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2}{2}e^{-\frac{i\phi_2}{2}}}{\cos\frac{\theta}{2}}. \tag{2.6c}$$

## 2.2 L'algèbre de Lie de SU(2)

Nous allons nous intéresser à l'algèbre de Lie du groupe SU(2), c'est-à-dire à l'espace tangent en l'élément neutre du groupe. Le groupe SU(2) est aussi une variété de dimension trois, donc il faut trouver trois vecteurs tangents indépendants. Le moyen le plus simple est de considérer la dérivée en *id* d'un sous-groupe à un paramètre. Deux sous-groupes apparaissent naturellement à partir de la paramétrisation de SU(2), ce sont

$$\omega_1(t) = u(0,t,0) = \begin{pmatrix} \cos\frac{t}{2} & i\sin\frac{t}{2} \\ i\sin\frac{t}{2} & \cos\frac{t}{2} \end{pmatrix}, \tag{2.7}$$
$$\omega_3(t) = u(t,0,0) = \begin{pmatrix} e^{\frac{it}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{it}{2}} \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

Le troisième groupe est choisi de façon à avoir des relations de commutations simples

$$\omega_2(t) = u(\pi/2, t, -\pi/2) = \begin{pmatrix} \cos\frac{t}{2} & -\sin\frac{t}{2} \\ \sin\frac{t}{2} & \cos\frac{t}{2} \end{pmatrix}.$$

Une simple dérivation donne les matrices tangentes

$$a_1 = \left.\frac{\mathrm{d}\omega_1(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.9}$$
$$a_2 = \left.\frac{\mathrm{d}\omega_2(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.10}$$
$$a_3 = \left.\frac{\mathrm{d}\omega_3(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

L'expression du crochet de Lie sur cette base des matrices antihermitienne d'ordre 2 est

$$[a_1, a_2] = a_3, \tag{2.12a}$$
$$[a_2, a_3] = a_1, \tag{2.12b}$$
$$[a_3, a_1] = a_2, \tag{2.12c}$$

d'où la justification du choix du groupe $\omega_2(t)$, comme le sous groupe à un paramètre associé au crochet de Lie des deux autres vecteurs. Nous pouvons voir aussi plus simplement cette algèbre de Lie, $a_1$ correspond à la variation de la partie imaginaire de $\beta$, $a_2$ la partie réelle de $\beta$ et $a_3$ la partie imaginaire de $a_3$. De plus en effectuons un calcul on peut montrer que l'exponentielle est surjective de l'algèbre de Lie de SU(2) dans SU(2).

## 2.3 Représentation unitaire irréductible de SU(2)

Nous allons nous intéresser aux représentations du groupe SU(2), et transposer les propriétés du groupe et de l'algèbre sur la représentation. Ce qui nous intéresse au final c'est la représentation régulière du groupe SU(2) et les représentations irréductibles sur cet espace, mais il est plus simple d'étudier les représentations irréductibles sur un autre espace puis transposer les propriétés par équivalence.

### 2.3.1 Représentation dans l'espace des polynômes homogènes

Le groupe SU(2) agit de façon naturelle sur $\mathbb{C}^2$. Pour obtenir une large famille de représentations irréductibles, nous allons étudier la représentation sur l'espace des fonctions à deux variables complexes définit pour $u \in \mathrm{SU}(2)$

$$T[u]f(z_1, z_2) = f(z_1', z_2') \quad \text{avec} \quad (z_1', z_2') = (z_1, z_2)u = (\alpha z_1 - \bar{\beta} z_2, \beta z_1 + \bar{\alpha} z_2)$$

L'action sur les vecteurs de $\mathbb{C}^2$ à droite assure qu'on a bien une représentation de groupe $T[u_1 u_2] = T[u_1]T[u_2]$. Cette représentation est réductible, par exemple les espaces des polynômes complexes homogènes à deux variables de degré $2l$ avec $l \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$ sont stables, nous allons montrer dans un des paragraphes suivants que les restrictions à ces sous-espaces sont irréductibles. Ces polynômes peuvent s'écrire sous la forme

$$f(z_1, z_2) = \sum_{n=-l}^{l} a_n z_1^{l-n} z_2^{l+n}.$$

Nous noterons la restriction de la représentation à ce sous-espace par $T_l$. En fait les polynômes homogènes à deux variables de degré $2l$ sont en bijection avec l'espace $\mathbb{C}_{2l}[X]$ des polynômes de degré au plus $2l$ par la relation

$$f(z_1, z_2) = z_2^{2l} q_f \left( \frac{z_1}{z_2} \right) \tag{2.13}$$

$$q_f(z) = f(z, 1). \tag{2.14}$$

L'opérateur $T_l$ induit une représentation sur $\mathbb{C}_{2l}[X]$ que nous noterons encore $T_l$.

$$\begin{aligned}T_l[u]q_f(z) &= q_{T_l[u]f}(z) = T_l[u]f(z,1)\\ &= f(\alpha z-\bar{\beta},\beta z+\bar{\alpha}) = (\beta z+\bar{\alpha})^{2l}q_f\left(\frac{\alpha z-\bar{\beta}}{\beta z+\bar{\alpha}}\right)\end{aligned}$$

Ainsi nous avons construit une famille de représentations du groupe SU(2) sur les espaces $\mathbb{C}_{2l}[X]$, pour chaque $u \in \mathrm{SU}(2)$ $T_l[u]$ est un endomorphisme de $\mathbb{C}_{2l}[X]$.

### 2.3.2 Opérateurs infinitésimaux de la représentation

La connaissance des opérateurs infinitésimaux de la représentation nous permettra de montrer l'irréductibilité de $T_l$ et donnera aussi des propriétés importantes sur les fonctions spéciales associées à SU(2).

Pour obtenir ces opérateurs nous procédons de la même manière que pour l'algèbre de Lie. Pour le sous-groupe $\omega_1(1)$ introduit en 2.2 la représentation sur l'espace des polynômes est

$$T_l\left[\omega_1(t)\right]q(z) = (zi\sin\frac{t}{2}+\cos\frac{t}{2})^{2l}q\left(\frac{z\cos\frac{t}{2}+i\sin\frac{t}{2}}{zi\sin\frac{t}{2}+\cos\frac{t}{2}}\right),$$

la dérivée de cette expression en $t=0$ donne l'opérateur infinitésimal

$$A_1 = ilz+\frac{i}{2}(1-z^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}.$$

De la même manière on obtient les opérateurs infinitésimaux associé à $\omega_2(t)$ et $\omega_3(t)$

$$A_2 = -lz+\frac{1}{2}(1+z^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \tag{2.15}$$

$$A_3 = i\left(z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}-l\right). \tag{2.16}$$

L'action de ces opérateurs sur les monômes $z^{l-n}$ avec $-l \leqslant n \leqslant l$ est la suivante :

$$A_1z^{l-n} = \frac{i}{2}(l-n)z^{l-n-1}+\frac{i}{2}(l+n)z^{l-n+1}, \tag{2.17}$$

$$A_2z^{l-n} = \frac{1}{2}(l-n)z^{l-n-1}-\frac{1}{2}(l+n)z^{l-n+1}, \tag{2.18}$$

$$A_3z^{l-n} = -inz^{l-n}. \tag{2.19}$$

Ainsi les opérateurs $A_2$ et $A_3$ associent à un monôme deux monômes «adjacents». Mais par combinaisons linéaires on peut construire des opérateurs $H_+$ et $H_-$ qui à un monôme associe le monôme de degré supérieur (respectivement inférieur). Nous prenons

$$H_+ = iA_1 - A_2 = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}, \tag{2.20}$$

$$H_- = iA_1 + A_2 = -2lz + z^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}, \tag{2.21}$$

de plus nous introduisons l'opérateur $H_3$ sous la forme

$$H_3 = iA_3 = l - z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}.$$

Ceci permet d'obtenir une base de l'espace des opérateurs infinitésimaux sur $\mathbb{C}_{2l}[X]$ ayant une action particulièrement simple sur les monômes

$$H_+z^{l-n} = (n-l)z^{l-n-1} \tag{2.22a}$$

$$H_-z^{l-n} = -(n+l)z^{l-n+1} \tag{2.22b}$$

$$H_3z^{l-n} = nz^{l-n} \tag{2.22c}$$

Ces opérateurs sont bien des endomorphismes de $\mathbb{C}_{2l}[X]$, de plus $H_3$ est diagonalisable car chaque monôme est un vecteur propre associé à une valeur propre différente.

### 2.3.3 Irréductibilité

**Théorème.** *La représentation $T_l[u]$ avec $l \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$ de* SU(2) *sur $\mathbb{C}_{2l}[X]$ est irréductible*

*Démonstration.* Pour montrer que $T_l$ est irréductible il faut montrer qu'il n'admet pas de sous-espace stable non trivial. Soit $F$ un sous-espace non nul stable par tous les $T_l[u]$, alors il l'est pour les sous-groupes à un paramètre $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ et par passage à la limite stable pour $A_1$, $A_2$, $A_3$ car $F$ de dimension finie donc fermé. Par linéarité il suffit de montrer qu'il n'y a pas de sous-espace stable non trivial pour $H_+$, $H_-$, $H_3$.

$H_3$ est diagonalisable donc $F$ est engendré par des vecteurs propres de $H_3$ ($F$ non nul), donc $F$ contient au moins un monôme $z^{l-n}$.

Utilisons maintenant la stabilité par $H_+$ et $H_-$. D'après la formule (2.22a) si $0 \leqslant s \leqslant l-n$ alors on a

$$H_+^s z^{l-n} = \alpha z^{l-n-s}, \quad \alpha \neq 0.$$

De même si $0 \leqslant s \leqslant l+n$ alors on a

$$H_-^s z^{l-n} = \beta z^{l-n+s}, \quad \beta \neq 0.$$

Ainsi $F$ contient tous les monômes $z^{l-m}$ et est donc égal à $\mathbb{C}_{2l}[X]$. Ainsi $T_l$ n'admet pas de sous-espace stable non trivial.

$\square$

Les représentations $T_l$ sont deux à deux non équivalentes car irréductibles de dimension distincte, en faite toute représentation irréductible est équivalente à l'une d'entre elle [1], mais nous n'allons pas le montrer.

### 2.3.4 Produit scalaire invariant

La théorie générale des représentations des groupes compacts donne un produit scalaire invariant par la représentation à partir de la mesure de Haar du groupe [1]. Pour tout groupe compact il existe une mesure finie invariante par translation à gauche et à droite, dans le cas de SU(2) cette mesure est $\sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi \mathrm{d}\psi$. Nous utilisant ensuite le théorème suivant

**Théorème.** *Soit $T : G \to \mathcal{L}(H)$ une représentation d'un groupe compact $G$ dans un Hilbert $H$. Alors on peut trouver un produit scalaire $\langle\, ,\, \rangle$ sur $H$ tel qu'il soit invariant par la représentation,* ie $\forall g \in G,\ x, y \in H,\ \langle T[g]x, T[g]y\rangle = \langle x, y\rangle$

*Démonstration.* Il suffit de choisir le produit scalaire suivant

$$\langle x, y\rangle = \int_G (T[g]x, T[g]y)\mathrm{d}g,$$

avec $\mathrm{d}g$ la mesure de Haar (qui est finie) et $(\, ,\, )$ le produit scalaire de $H$ initial. L'intégrale est convergente car elle est inférieur par Cauchy-Schwartz à $\|x\|\,\|y\| \sup_G \|T[g]\|^2 \operatorname{mes}(G)$ et $T$ est un morphisme continue d'un groupe compact. C'est bien une forme bilinéaire définie positive. Comme la mesure est invariante par translation on a

$$\begin{aligned}\langle T[g_0]x, T[g_0]y\rangle &= \int_G (T[g_0]T[g]x, T[g_0]T[g]y)\mathrm{d}g = \int_G (T[g_0 g]x, T[g_0 g]y)\mathrm{d}g \\ &= \int_G (T[g]x, T[g]y)\mathrm{d}g = \langle x, y\rangle\,,\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration. $\square$

Nous allons étudier l'expression de ce produit scalaire invariant dans la base des monômes.

Nous regardons l'effet de l'invariance pour le groupe $\omega_3(t)$

$$\left\langle z^{l-k}, z^{l-m}\right\rangle = \left\langle T_l[\omega_3(t)]z^{l-k}, T_l[\omega_3(t)]z^{l-m}\right\rangle,$$

en dérivant cette relation en $t = 0$ et en utilisant l'expression de $A_3$ donné en (2.19) nous obtenons

$$0 = \left\langle A_3 z^{l-k}, z^{l-m}\right\rangle + \left\langle z^{l-k}, A_3 z^{l-m}\right\rangle = i(k-m)\left\langle z^{l-k}, z^{l-m}\right\rangle.$$

Ainsi la base des monômes est orthogonale, pour connaître les normes nous regardons l'invariance pour le groupe $\omega_1(t)$

$$\left\langle z^{l-k}, z^{l-k+1} \right\rangle = \left\langle T_l[\omega_1(t)] z^{l-k}, T_l[\omega_1(t)] z^{l-k+1} \right\rangle,$$

qui donne après dérivation en $t = 0$

$$0 = \left\langle A_1 z^{l-k}, z^{l-k+1} \right\rangle + \left\langle z^{l-k}, A_1 z^{l-k+1} \right\rangle.$$

Ainsi en utilisant l'expression (2.17) et l'orthogonalité de la base nous obtenons

$$0 = -\frac{i}{2}(l+k) \left\langle z^{l-k+1}, z^{l-k+1} \right\rangle + \frac{i}{2}(l-k+1) \left\langle z^{l-k}, z^{l-k} \right\rangle.$$

Nous obtenons ainsi par récurrence les normes des vecteurs bases à une constante près, que nous fixons avec $\langle 1, 1 \rangle = 2l!$ pour que l'expression des normes soit simple :

$$\left\langle z^{l-k}, z^{l-k} \right\rangle = (l-k)!(l+k)!, \quad -l \leqslant k \leqslant l.$$

Ceci détermine complètement le produit scalaire invariant dont une base orthonormée est

$$q_k(z) = \frac{z^{l-k}}{\sqrt{(l-k)!(l+k)!}}, \quad -l \leqslant k \leqslant l.$$

Pour conclure les relations (2.22) induisent sur la base orthonormée

$$H_+ q_n(z) = -\sqrt{l(l+1) - n(n+1)}\, q_{n+1}(z) \tag{2.23a}$$
$$H_- q_n(z) = -\sqrt{l(l+1) - n(n-1)}\, q_{n-1}(z) \tag{2.23b}$$
$$H_3 q_n(z) = n q_n(z). \tag{2.23c}$$

## 2.4 Coefficient matriciel de la représentation

Nous allons maintenant exprimer les coefficients matriciels de la représentation dans la base exhibée dans la section précédente. Ces coefficients sont des fonctions sur le groupe SU(2) et au final ce sont leurs propriétés qui nous intéressent.

### 2.4.1 Calcul des coefficients matriciels

**Proposition 2.** *Les coefficients matriciels $t^l_{mn}(u)$ de la représentation dans la base orthonormée $q_n(z)$ sont des polynômes en $\alpha$, $\beta$ et leurs complexes conjugués.*

*Démonstration.* Dans la section 2.3.1 nous avons construit la représentation $T_l$ du groupe SU(2), son action sur un polynôme est donnée par

$$T_l[u]q(z) = (\beta z + \bar{\alpha})^{2l} q\left(\frac{\alpha z - \bar{\beta}}{\beta z + \bar{\alpha}}\right),$$

avec $q(z) \in \mathbb{C}_{2l}[X]$ et $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ . Dans la base orthonormée $q_n(z)$ les coefficients matriciels s'expriment par

$$t^l_{mn}(u) = \langle T_l[u]q_n, q_m\rangle = \frac{\langle T_l[u]z^{l-n}, z^{l-m}\rangle}{\sqrt{(l-m)!(l+m)!(l-n)!(l+n)!}},$$

or on a

$$T_l[u]z^{l-n} = (\beta z + \bar{\alpha})^{l+n}(\alpha z - \bar{\beta})^{l-n}, \tag{2.24}$$

donc l'expression des coefficients est donnée par

$$t^l_{mn}(u) = \frac{\langle (\beta z + \bar{\alpha})^{l+n}(\alpha z - \bar{\beta})^{l-n}, z^{l-m}\rangle}{\sqrt{(l-m)!(l+m)!(l-n)!(l+n)!}}.$$

En utilisant l'expression du produit scalaire des monômes, nous obtenons la proposition. □

### 2.4.2 Expression en terme d'angles d'Euler

Nous allons exprimer les coefficients $t^l_{mn}(u)$ en fonction des paramètres $\phi$, $\theta$, $\psi$ de $u$. Pour cela on utilise la relation (2.1.1)

$$u(\phi, \theta, \psi) = u(\phi, 0, 0)u(0, \theta, 0)u(0, 0, \psi),$$

or $T_l$ est une représentation de groupe donc $T_l[u_1u_2u_3] = T_l[u_1]T_l[u_2]T_l[u3]$, il suffit donc de connaître l'expression de $t^l_{mn}[u(\phi, 0, 0)]$ et $t^l_{mn}[u(0, \theta, 0)]$ [2] pour connaître les coefficients associés à tout élément de SU(2). $u(\phi, 0, 0)$ est une matrice diagonale avec $\alpha = e^{\frac{i\phi}{2}}$ et $\beta = 0$ donc d'après (2.24) nous avons

$$T_l[u(\phi, 0, 0)]z^{l-n} = e^{-in\phi}z^{l-n},$$

$T_l[u(\phi, 0, 0)]$ est donc une matrice diagonale avec des $e^{-in\phi}$ sur la diagonale, il en est de même pour $u(0, 0, \psi)$, ainsi pour tout élément $u$ de SU(2)

$$t^l_{mn}[u] = t^l_{mm}[u(\phi, 0, 0)]t^l_{mn}[u(0, \theta, 0)]t^l_{nn}[u(0, 0, \psi)] = e^{-i(m\phi + n\psi)}t^l_{mn}(u(0, \theta, 0))$$

Reste à exprimer $t^l_{mn}(u(0, \theta, 0))$, $u(0, \theta, 0)$ est une matrice d'ordre 2 avec $\alpha = \cos\frac{\theta}{2}$ et $\beta = i\sin\frac{\theta}{2}$, le coefficient $t^l_{mn}$ est un polynôme en $\cos\frac{\theta}{2}$ et $\sin\frac{\theta}{2}$,

[2] $u(t, 0, 0) = u(0, 0, t)$

or pour $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ on a

$$\sin\frac{\theta}{2} = \left(\frac{\cos\theta - 1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.25}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \left(\frac{\cos\theta + 1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.26}$$

Nous pouvons donc écrire $t^l_{mn}(u(0,\theta,0))$ comme une fonction de $\cos\theta$, nous définissons ainsi

$$P^l_{mn}(\cos\theta) = t^l_{mn}(u(0,\theta,0)). \tag{2.27}$$

Finalement pour un élément $u$ de SU(2) quelconque

$$t^l_{mn}[u] = e^{-i(m\phi+n\psi)} P^l_{mn}(\cos\theta),$$

ce qui explique l'intérêt de la décomposition des éléments du groupe SU(2) en produit de trois éléments, les matrices diagonales donnent des facteurs exponentielle complexe simple et nous sommes ramenés à un problème à une dimension (la variable $\theta$).

## 2.5 Relations Fonctionnelles pour les $P^l_{mn}(x)$

Nous allons maintenant étudier les propriétés des fonctions $P^l_{mn}(x)$ et donc des coefficient $t^l_{mn}$ qui sont des fonctions sur le groupe SU(2).

### 2.5.1 Loi de composition

Nous allons étudier les conséquences du fait que SU(2) est un groupe sur les fonctions $P^l_{mn}(x)$. Ceci s'exprime par

$$t^l_{mn}(u_1 u_2) = \sum_{k=-l}^{l} t^l_{mk}(u_1) t^l_{kn}(u_2).$$

Nous récrivons cette relation dans le cas où $u_1$ et $u_2$ sont respectivement déterminé par les angles d'Euler $0, \theta_1, 0$ et $0, \theta_2, 0$, alors $P^l_{mn}$ et $t^l_{mn}$ sont égaux et les relations (2.6) se récrive :

$$\cos\theta = \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2, \tag{2.28a}$$

$$e^{i\phi} = \frac{\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2}{\sin\theta} = \frac{\sin(\theta_1+\theta_2)}{\sin\theta}, \tag{2.28b}$$

$$e^{\frac{i(\phi+\psi)}{2}} = \frac{\cos\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2} - \sin\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}, \tag{2.28c}$$

Or il ne faut pas oublier que

$$0 \leqslant \theta < \pi,$$

donc pour $\theta_1 + \theta_2 < \pi$ nous avons que $\theta = \theta_1 + \theta_2$, $\phi = \psi = 0$ et la formule

$$P^l_{mn}\big(\cos(\theta_1 + \theta_2)\big) = \sum_{k=-l}^{l} P^l_{mk}(\cos\theta_1) P^l_{kn}(\cos\theta_2).$$

Alors que pour $\theta_1 + \theta_2 \geqslant \pi$, nous avons $\theta = 2\pi - \theta_1 - \theta_2$ et $\phi = \psi = \pi$ et la formule

$$(-1)^{m+n} P^l_{mn}\big(\cos(\theta_1 + \theta_2)\big) = \sum_{k=-l}^{l} P^l_{mk}(\cos\theta_1) P^l_{kn}(\cos\theta_2).$$

### 2.5.2 Représentation régulière équivalente

Nous allons montrer le théorème suivant dans un cas particulier qui nous interesse.

**Théorème.** *Toute représentation irréductible $(T, H)$ d'un groupe $G$ avec $H$ de dimension finie est équivalente à une représentation régulière dans un espace de fonctions scalaires sur $G$.*

Nous considérons l'espace $\mathcal{H}_{lm} = \mathrm{Vect}\{t^l_{mn}\}_{-l \leqslant n \leqslant l}$ et la sous-représentation régulière à droite sur cet espace $R_{lm}$. Alors

$$R_{lm}[u_0] t^l_{mn}(u) = t^l_{mn}(uu_0) = \sum_{k=-l}^{l} t^l_{mk}(u) t^l_{kn}(u_0),$$

donc la restricition à $\mathcal{H}_{lm}$ est bien une sous-représentation (l'espace $\mathcal{H}_{lm}$ est stable). Si nous comparrons ceci à la représentation $T_l$ dans la base orthonormée $q_n$ de $\mathbb{C}_{2l}[X]$ vu dans le paragraphe 2.3.4

$$T_l[u_0] q_n = \sum_{k=-l}^{l} q_k t^l_{kn}(u_0),$$

nous nous apercevons que $T_l$ et $R_{lm}$ sont le même endomorphisme dans deux bases différentes $\{q_n\}_{-l \leqslant n \leqslant l}$ et $\{t^l_{mn}\}_{-l \leqslant n \leqslant l}$. Donc les deux représentations sont algébriquement équivalente, vu quelles sont de dimension finie elles sont continuement équivalente.

Les matrices de $T_l$ et $R_{lm}$ dans leur base associée sont égales, donc par passage à la limite les matrices d'opérateurs infinitésimaux sont les mêmes, ce qui donne en utilisant les relations (2.23)

$$H^{lm}_{+} t^l_{mn}(u) = -\sqrt{l(l+1) - n(n+1)}\, t^l_{m,n+1}(u), \tag{2.29a}$$

$$H^{lm}_{-} t^l_{mn}(u) = -\sqrt{l(l+1) - n(n-1)}\, t^l_{m,n-1}(u), \tag{2.29b}$$

$$H^{lm}_{3} t^l_{mn}(u) = n t^l_{mn}(u). \tag{2.29c}$$

### 2.5.3 Opérateurs infinitésimaux de la représentation régulière à droite

Nous allons étudier les opérateurs infinitésimaux de la représentation $R[u_0]f(u) = f(uu_0)$. Pour un sous-groupe à un paramètre $\omega(t)$ l'action de l'opérateur infinitésimale correspondant sur un élément $u \in \mathrm{SU}(2)$ est $\mathrm{d}f(u\omega(t))/\mathrm{d}t$ en $t = 0$, cette limite est définie pour les fonctions $C^1$ sur le groupe et ceci nous suffira.

Nous notons $\phi(t), \theta(t), \psi(t)$ les angles d'Euler de l'élément $u\omega(t)$, alors la dérivée à pour expression

$$\left.\frac{\mathrm{d}f(u\omega(t))}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial \phi}\phi'(0) + \frac{\partial f}{\partial \theta}\theta'(0) + \frac{\partial f}{\partial \psi}\psi'(0).$$

Ainsi l'expression de l'opérateur infinitésimal $\hat{A}_\omega$ correspondant à $\omega(t)$ est

$$\hat{A}_\omega = \phi'(0)\frac{\partial}{\partial \phi} + \theta'(0)\frac{\partial}{\partial \theta} + \psi'(0)\frac{\partial}{\partial \psi}.$$

Il suffit donc de calculer les dérivés des angles d'Euler pour les sous-groupes $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ définit dans le paragraphe 2.2 pour avoir une base des opérateurs infinitésimaux.

Le calcul pour $\omega_3(t) = \left(\begin{smallmatrix} \exp it/2 & 0 \\ 0 & \exp -it/2 \end{smallmatrix}\right)$ est le plus simple. $u\omega_3(t) = u(\phi, \theta, \psi)u(0, 0, t) = u(\phi, \theta, \psi + t)$, et donc

$$\phi'(0) = 0, \quad \theta'(0) = 0, \quad \psi'(0) = 1,$$

ce qui donne l'opérateur infinitésimal correspondant

$$\hat{A}_3 = \frac{\partial}{\partial \phi}. \tag{2.30}$$

Pour le calcul de $\hat{A}_1$ il faut utiliser les relations (2.6) qui donne les angles d'Euler pour $u\omega_1(t)$

$$\cos\theta(t) = \cos\theta_1 \cos t - \sin\theta_1 \sin t \cos\phi_2 \tag{2.31a}$$

$$e^{i\phi(t)} = e^{i\phi}\frac{\sin\theta_1 \cos t + \cos\theta_1 \sin t \cos\phi_2 + i \sin t \sin\phi_2}{\sin\theta} \tag{2.31b}$$

$$e^{\frac{i(\phi(t)+\psi(t))}{2}} = e^{\frac{i\phi}{2}}\frac{\cos\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{t}{2}e^{\frac{i\phi}{2}} - \sin\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{t}{2}e^{-\frac{i\phi_2}{2}}}{\cos\frac{\theta}{2}} \tag{2.31c}$$

ce qui donne après dérivation en tenant compte de $\phi(0) = \phi, \theta(0) = \theta, \psi(0) = \psi$

$$\phi'(0) = \frac{\sin\psi}{\sin\theta}, \quad \theta'(0) = \cos\psi, \quad \psi'(0) = -\operatorname{ctg}\theta \sin\psi.$$

Ainsi l'opérateur infinitésimale correspondant à $\omega_1(t)$ est

$$\hat{A}_1 = \cos\psi \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\sin\psi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} - \operatorname{ctg}\theta \sin\psi \frac{\partial}{\partial\psi}. \tag{2.32}$$

L'opérateur $\hat{A}_2$ s'obtient de la même manière (en un peu plus compliqué)

$$\hat{A}_2 = -\sin\psi \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\psi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} - \operatorname{ctg}\theta \cos\psi \frac{\partial}{\partial\phi} \tag{2.33}$$

Nous pouvons réutiliser les expressions (2.32),(2.33) et (2.30) pour obtenir les formes de leur combinaisons linéaires intéressantes.

$$\hat{H}_+ = e^{-i\psi}\left[i\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} + \operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\psi}\right], \tag{2.34a}$$

$$\hat{H}_- = e^{i\phi}\left[i\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} - \operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\psi}\right], \tag{2.34b}$$

$$\hat{H}_3 = i\frac{\partial}{\partial\psi}. \tag{2.34c}$$

La restriction de ces opérateurs à des sous-espaces adéquats donne l'expression en terme d'angles d'Euler des opérateurs $H_+^{lm}, H_-^{lm}, H_3^{lm}$ définis dans le paragraphe précédent. Les relations (2.29a) et (2.29b), et le fait que $t^l_{mn}(u(\phi,\theta,\psi)) = e^{-i(m\phi+n\psi)}P^l_{mn}(x)$ avec $x = \cos\theta$ donne en utilisant les correspondances suivantes

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \longleftrightarrow -\sqrt{1-x^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}, \tag{2.35a}$$

$$\operatorname{ctg}\theta \longleftrightarrow \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{2.35b}$$

$$\frac{1}{\sin\theta} \longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{2.35c}$$

les relations de récurrence sur les fonctions $P^l_{mn}(x)$ suivante

$$\sqrt{1-x^2}\frac{\mathrm{d}P^l_{mn}(x)}{\mathrm{d}x} - \frac{m-nx}{\sqrt{1-x^2}}P^l_{mn}(x) = -i\sqrt{l(l+1)-n(n+1)}P^l_{m,n+1}(x)$$

et

$$\sqrt{1-x^2}\frac{\mathrm{d}P^l_{mn}(x)}{\mathrm{d}x} + \frac{m-nx}{\sqrt{1-x^2}}P^l_{mn}(x) = -i\sqrt{l(l+1)-n(n-1)}P^l_{m,n-1}(x).$$

### 2.5.4 Opérateur de Laplace

Considérons l'opérateur

$$\Delta = \hat{A}_1^2 + \hat{A}_2^2 + \hat{A}_3^2,$$

en utilisant les propriétés de commutation entre $\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{A}_3$ dues aux relations de commutation (2.12) dans l'algèbre de Lie de SU(2), nous obtenons que $\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{A}_3$ commutent avec $\Delta$. Soit $u \in \mathrm{SU}(2)$, alors

$$u = \exp(t_1 a_1 + t_2 a_2 + t_3 a_3),$$

donc d'après la proposition 1 $R[u] = \exp(t_1 \hat{A}_1 + t_2 \hat{A}_2 + t_3 \hat{A}_3)$ or exponentielle est analytique donc conserve les relations de commutations et

$$\forall u \in \mathrm{SU}(2), \quad R[u]\Delta = \Delta R[u].$$

En se restreignant a un espace $\mathcal{H}_{lm}$, nous avons une représentation irréductible $R_{lm}$ entrelacé par $\Delta_{lm} = \Delta|_{\mathcal{H}_{lm}}$ donc d'après le lemme de Schur $\Delta_{lm}$ est scalaire. Pour obtenir la valeur du scalaire il suffit de faire un calcul explicite, en écrivant que

$$\Delta = \hat{A}_1^2 + \hat{A}_2^2 + \hat{A}_3^2 = -\hat{H}_- \hat{H}_+ - \hat{H}_3 - \hat{H}_3^2.$$

Il est simple de calculer sa restriction à l'un des $\mathcal{H}_{lm}$ en utilisant les équations (2.29), nous obtenons alors

$$\Delta_{lm} = \Delta|_{\mathcal{H}_{lm}} = -l(l+1)Id.$$

Alors que son expression générale peut être obtenue à partir des relations (2.34), nous obtenons alors

$$\Delta = \frac{1}{\sin^2\theta}\left[\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} - 2\cos\theta \frac{\partial^2}{\partial\psi\partial\phi} + \frac{\partial^2}{\partial\psi}\right],$$

qui est la même expression que celle de l'opérateur $\tilde{\Delta}$ définit en introduction de partie par l'équation (2.2).

En conjuguant ces deux expressions nous obtenons que les coefficients de la représentation satisfont aux équations

$$\Delta t^l_{mn}(u) = -l(l+1) t^l_{mn}(u),$$

qui est le problème qu'on cherchait à résoudre. En utilisant les correspondances (2.35), nous pouvons récrire le problème sous la forme d'une équation différentielle ordinaire

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2 P^l_{mn}(x)}{\mathrm{d}x^2} - 2x \frac{\mathrm{d}P^l_{mn}(x)}{\mathrm{d}x} - \frac{m^2 + n^2 - 2mnx}{1-x^2} P^l_{mn}(x) = -l(l+1) P^l_{mn}(x).$$

### 2.5.5 Lien avec les polynômes orthogonaux classiques

La relation avec les polynômes de Jacobi est

$$P_k^{(a,b)}(x) = 2^m i^{n-m} \sqrt{\frac{(l-n)!(l+n)!}{(l-m)!(l+m)!}} (1-x)^{\frac{n-m}{2}} (1+x)^{-\frac{n+m}{2}} P^l_{mn}(x),$$

avec

$$l = k + \frac{a+b}{2}, \quad m = \frac{a+b}{2}, \quad n = \frac{b-a}{2}.$$

De plus pour $l$ nous avons deux cas particulier important. La relation avec les polynômes de Legendre est

$$P_l(x) = P^l_{00}(x),$$

et avec les fonctions de Legendre associées

$$P^m_l(z) = i^m \sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-m)!}} P^l_{m0}, \quad m \geqslant 0.$$

Ainsi les différentes relations de récurrence et de composition ne sont pas fortuites, mais sont dues à la structure de groupe de Lie qui se cache derrière.

## 2.6 Application à l'équation de Laplace

Dans la section précédente nous avons trouvé une famille complète de représentation irréductible, d'après le théorème de Peter-Weyl [3] l'ensemble des coefficients matriciels d'une famille complète de représentations irréductibles de $G$ est une base hilbertienne de $L^2(G)$, c'est une généralisation de la décomposition en série de Fourrier des fonctions sur le cercle.

Soit $g \in C^\infty(\mathrm{SU}(2)) = C^\infty(B)$ alors

$$g = \sum \alpha^l_{mn} t^l_{mn}(u).$$

On pose $f = sum \alpha^l_{mn} t^l_{mn}(u(\phi, \theta, \psi)) r^{2l}$, en supposant que le laplacien de $\mathbb{R}^4$ commute avec cette somme nous obtenons en utilisant sa forme séparable (2.2) définit en introduction de partie

$$\Delta f = \sum \alpha^l_{mn} (2l(2l+2) - 4l(l+1)) t^l_{mn}(u(\phi, \theta, \psi)) r^{2l} = 0.$$

Ainsi à des problèmes de convergence près qu'il faudrait expliciter, nous avons trouvé une solution de l'équation de Laplace pour toute condition au bord sphérique de classe $C^\infty$.

Les fonctions $t^l_{mn}(U(\phi, \theta, \psi))$ permettent aussi de résoudre l'équation de la chaleur sur SU(2), en effet nous avons une base hilbertienne diagonalisant le laplacien ce qui permet de résoudre le problème si on applique les résultats du cours d'analyse fonctionnelle.

# Chapitre 3

# Représentations de $M(2)$ et fonctions de Bessel

## 3.1 Le groupe $M(2)$ des déplacements du plan euclidien

### 3.1.1 Définition et paramétrisations

**Définition 8.** *On définit $M(2)$ comme le groupe des déplacements du plan euclidien $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire l'ensemble des bijections préservant les distances et ne changeant pas l'orientation.*

Les déplacements peuvent être vus comme composition d'une rotation centrée en l'origine, d'angle $\alpha$, et d'une translation de vecteur $(a, b)$ : ainsi, un déplacement $g$ peut être paramétré par $(a, b, \alpha)$, où

$$g : (x, y) \mapsto (x \cos\alpha - y \sin\alpha + a, x \sin\alpha + y \cos\alpha + b)$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in [0, 2\pi[$.

On pourra aussi les paramétrer par $(r, \varphi, \alpha)$ , où $a = r\cos\varphi$ et $b = r\sin\varphi$, le contexte indiquant quelle paramétrisation est utilisée. Cette paramétrisation est plus naturelle, car elle permet de faire apparaître le quotient de $M(2)$ à gauche et à droite par $SO(2)$ (rappelons que $SO(2)$ est le groupe des rotations de $\mathbb{R}^2$) :

$$\forall r, \varphi, \alpha \ , \ g(r, \varphi, \alpha) = g(0, 0, \varphi)g(r, 0, 0)g(0, 0, \alpha - \varphi).$$

Notons $t_z = g(|z|, \arg(z), 0)$ la translation de vecteur $z$ (où $\mathbb{C}$ est identifié à $\mathbb{R}^2$), et $r_\alpha = g(0, 0, \alpha)$ la rotation de centre 0 et d'angle $\alpha$.

On peut remarquer que le groupe $M(2)$ est l'un des exemples les plus simples de produit semi-direct : en effet, $M(2)$ est isomorphe au produit semi-direct $\mathbb{R}^2 \rtimes SO(2)$, où $SO(2)$ agit par son action naturelle sur $\mathbb{R}^2$. La loi de groupe dans $M(2)$ est en effet :

$$((a, b), \alpha).((a', b'), \alpha') = ((a + a'\cos\alpha - b'\sin\alpha, b + a'\sin\alpha + b'\cos\alpha), \alpha + \alpha').$$

On peut également réaliser le groupe $M(2)$ en faisant correspondre à chaque élément $g(a,b,\alpha)$ la matrice de $GL_3(\mathbb{R})$ que l'on notera $T(g)$ :

$$T(g) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & a \\ \sin\alpha & \cos\alpha & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On constate alors que l'on a $T(g_1 g_2) = T(g_1)T(g_2)$ : $T$ est donc une représentation du groupe $M(2)$ dans $\mathbb{R}^3$.

### 3.1.2 L'algèbre de Lie du groupe $M(2)$

Le groupe de Lie $M(2)$ est de dimension 3 : son algèbre de Lie est donc aussi de dimsension 3. Cherchons donc 3 vecteurs de l'algèbre de Lie linéairement indépendants.

On peut exhiber 3 sous-groupes à un paramètre dans $M(2)$ :

$$\omega_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

$$\omega_2(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

$$\omega_3(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

Ces sous-groupes ont une interprétation simple : il s'agit des translations suivant l'axe des $x$ ($\omega_1$), l'axe des $y$ ($\omega_2$) et les rotations de centre 0 ($\omega_3$).

Calculons les opérateurs infinitésimaux de ces 3 sous-groupes à un paramètre. Ce sont les éléments de l'algèbre de Lie de $M(2)$ définis par :

$$a_i(t) = \lim_{t\to 0} \frac{\omega_i(t) - Id}{t}.$$

Le calcul donne :

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ces opérateurs sont linéairement indépendants : ils forment donc une base de l'algèbre de Lie de $M(2)$. De plus, ils vérifient des relations de commutation simples :

$$\begin{aligned}
[a_1, a_2] &= a_1 a_2 - a_2 a_1 = 0 \\
[a_2, a_3] &= a_1 \\
[a_3, a_1] &= a_2.
\end{aligned}$$

### 3.1.3 Lien entre $M(2)$ et $SO(3)$

On constate que ces relations de commutation sont très proches de celles obtenues pour l'algèbre de Lie du groupe SU(2), à ceci près qu'ici dans la première ligne $a_3$ est remplacé par 0. Nous allons tenter de comprendre ce phénomène en faisant apparaître $M(2)$ comme une forme dégénérée de SO(3), lequel est isomorphe à SU(2)/$\{1, -1\}$.

En effet, l'idée de base est d'identifier le plan $R^2$ et la sphère $\mathbb{S}_2$ en faisant tendre son rayon vers l'infini et, simultanément, en envoyant son centre à l'infini. Cela se traduit mathématiquement, en effectuant l'identification suivante dans la paramétrisation (2.6) du produit de deux éléments de SU(2) :

$$\begin{aligned}
\phi = \varphi, \psi = \alpha, \phi_2 = \alpha_2 \\
\theta = \frac{r}{R}, \theta_1 = \frac{r_1}{R}, \theta_2 = \frac{r_2}{R}
\end{aligned}$$

Lorsque l'on fait tendre $R$ vers $+\infty$ et que l'on conserve les termes dominants, on obtient :

$$r^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2 r_1 r_2 \cos \alpha_1 \tag{3.1a}$$

$$r e^{i\phi} = r_1 + r_2 e^{i\alpha_1} \tag{3.1b}$$

qui sont les paramètres du produit dans $M(2)$ des éléments :

$$g(r, \phi, \alpha) = g(r_1, 0, \alpha_1) g(r_2, 0, 0).$$

Ainsi on peut donc effectivement voir le groupe $M(2)$ comme une forme dégénérée du groupe SO(3).

## 3.2 Représentations irréductibles de $M(2)$

### 3.2.1 Description des représentations

Notons par $\mathcal{D}$ l'espace vectoriel des fonctions $C^\infty$ sur le cercle $\mathbb{S}_1 = \{x \in \mathbb{R}^2, \|x\| = 1\}$. Fixons $\lambda \in \mathbb{C}$. Pour tout $\alpha$ réel et tout $x$ vecteur de $\mathbb{S}_1$, notons

$x_\alpha$ l'image du vecteur $x$ par la rotation de centre 0, et d'angle $\alpha$. Notons $(.,.)$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^2$. A tout élément de $M(2)$, que l'on notera $g(u,\alpha)$, où $u=(a,b)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^2$, faisons correspondre l'opérateur sur $\mathcal{D}$ qui à la fonction $f \in \mathcal{D}$ associe :

$$T_\lambda(g)f(x) = e^{\lambda(u,x)} f(x_{-\alpha}), \forall ||x|| = 1.$$

Alors $T_\lambda$ est une représentation du groupe $M(2)$ dans $\mathcal{D}$ : en effet, si $g_1 = g(u,\alpha)$ et $g_2 = g(v,\beta)$, alors pour toute fonction $f \in \mathcal{D}$, on a :

$$\begin{aligned} T_\lambda(g_1)T_\lambda(g_2)f(x) &= T_\lambda(g_1)e^{\lambda(v,x)}f(x_{-\beta}) \\ &= e^{\lambda(u,x)}e^{\lambda(v,x_{-\alpha})}f(x_{-\alpha-\beta}) \\ &= e^{\lambda(u+v_\alpha,x)}f(x_{-\alpha-\beta}). \end{aligned}$$

Or $g_1g_2 = g(u,\alpha)g(v,\beta) = g(u+v_\alpha, \alpha+\beta)$.
Donc $T_\lambda(g_1g_2) = T_\lambda(g_1)T_\lambda(g_2)$ : $T_\lambda$ est bien une représentation du groupe $M(2)$.

### 3.2.2 Produit scalaire sur $\mathcal{D}$

Paramétrons le cercle $\mathbb{S}_1$ par $\{e^{i\theta}, \theta \in [0,2\pi[\}$. Munissons $\mathcal{D}$ du produit scalaire

$$< f_1, f_2 >= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_1(\theta)\overline{f_2(\theta)}d\theta.$$

Soit $\mathcal{H}$ l'espace hilbertien obtenu par complétion de $\mathcal{D}$ par rapport à ce produit scalaire : il s'agit de l'ensemble des fonctions de carré intégrable sur $\mathbb{S}_1$, *ie* $L^2(\mathbb{S}_1)$. On étend ainsi $T_\lambda$ à une représentation de $M(2)$ dans $\mathcal{H}$.

On connaît une base hilbertienne de $\mathcal{H}$ : la famille des fonctions $(\phi_n : \theta \mapsto e^{in\theta})_{n\in\mathbb{Z}}$. En effet, la décomposition de Fourier fournit les coefficients dans cette base d'une fonction quelconque $f \in \mathcal{H}$ :

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\phi_n(\theta) \\ \text{où } a_n &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)e^{-in\theta}d\theta. \end{aligned}$$

(où l'égalité est au sens de la norme $L^2$ associée au produit scalaire de $\mathcal{H}$).

Notons $\mathcal{H}_n = \mathbb{C}\phi_n$ l'espace vectoriel engendré par $\phi_n$. Alors $\mathcal{H}$ est somme hilbertienne des $\mathcal{H}_n$.

**Proposition 3.** *La représentation $T_\lambda$ est unitaire si et seulement si $\lambda$ est imaginaire pur.*

*Démonstration.* Tout d'abord, remarquons que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ non nul, alors $T_\lambda(g)$ est unitaire pour $SO(2)$ : pour tous $f_1, f_2 \in \mathcal{H}$ , $r_\alpha \in M(2)$ , on a :

$$\begin{aligned}
< T_\lambda(r_\alpha)f_1, T_\lambda(r_\alpha)f_2 > &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_1(\theta-\alpha)\overline{f_2(\theta-\alpha)}d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{2\pi-\alpha} f_1(\theta)\overline{f_2(\theta)}d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_1(\theta)\overline{f_2(\theta)}d\theta \\
&=< f_1, f_2 >
\end{aligned}$$

Considérons maintenant les deux cas suivants :

– Si $\lambda \in i\mathbb{R}$, alors $T_\lambda$ est clairement unitaire (il suffit de le vérifier pour les translations) : pour tous $f_1, f_2 \in \mathcal{H}$ , $t_{x+iy} \in M(2)$ , on a :

$$\begin{aligned}
< T_\lambda(t_{x+iy})f_1, T_\lambda(t_{x+iy})f_2 > &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{\lambda(x\cos\theta+y\cos\theta)}f_1(\theta)\overline{e^{\lambda(x\cos\theta+y\cos\theta)}f_2(\theta)}d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_1(\theta)\overline{f_2(\theta)}d\theta \\
&=< f_1, f_2 >
\end{aligned}$$

car $\overline{\lambda} = -\lambda$. La représentation $T_\lambda$ est donc unitaire.

– Si $\lambda \notin i\mathbb{R}$, par exemple $\mathcal{R}e\,\lambda < 0$, considérons une fonction $f$ de $\mathcal{D}$ de support contenu dans $\{e^{i\theta}, \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\}$, et de norme égale à 1.
Calculons maintenant la quantité :

$$\begin{aligned}
< T_\lambda(t_1)f, T_\lambda(t_1)f > &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|e^{\lambda\cos\theta}f(\theta)\right|^2 d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{2\mathcal{R}e\,\lambda\cos\theta}\left|f(\theta)\right|^2 d\theta \\
|< T_\lambda(t_1)f, T_\lambda(t_1)f >| &\leqslant e^{2\mathcal{R}e\,\lambda}\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left|f(\theta)\right|^2 d\theta \\
&\leqslant e^{2\mathcal{R}e\,\lambda} \\
&< 1 \qquad \text{car on a supposé } \mathcal{R}e\,\lambda < 0
\end{aligned}$$

Or $< f, f >= 1$ : la représentation $T_\lambda$ n'est donc pas unitaire.

□

### 3.2.3 Action des opérateurs infinitésimaux

Aux 3 sous-groupes à un paramètre de $M(2)$, notés $\Omega_i = \{\omega_i(t), t \in \mathbb{R}\}, i = 1, 2, 3$, calculons les opérateurs infinitésimaux associés dans la représentation $T_\lambda$ (nous allons ici nous restreindre à l'espace $\mathcal{D}$ des fonctions $C^\infty$ sur le cercle) :

$$T_\lambda(\omega_1(t))f(\theta) = e^{\lambda t\cos\theta} f(\theta)$$

donc

$$A_1 = \left(\frac{dT_\lambda(\omega_1(t))}{dt}\right)_{t=0} = \lambda\cos\theta.$$

Cela signifie que $A_1$ est l'opérateur de multiplication par $\lambda\cos\psi$.

On calcule de même :

$$A_2 = \lambda\sin\theta$$

et

$$A_3 = -\frac{d}{d\theta}$$

les opérateurs infinitésimaux associés aux sous-groupes $\Omega_2$ et $\Omega_3$.

On vérifie naturellement que $A_1$, $A_2$ et $A_3$ vérifient les mêmes lois de commutation que $a_1$, $a_2$ et $a_3$, les trois opérateurs infinitésimaux de l'algèbre de Lie de $M(2)$, définis en 3.1.2, à savoir :

$$\begin{aligned}
[A_1, A_2] &= 0 \\
[A_2, A_3] &= A_1 \\
[A_3, A_1] &= A_2.
\end{aligned}$$

On peut vérifier ces égalités en effectuant le calcul, par exemple :

$$\begin{aligned}
[A_2, A_3] &= A_2A_3 - A_3A_2 \\
&= (\lambda\sin\theta)(-\frac{d}{d\theta}) + (\frac{d}{d\theta})(\lambda\sin\theta) \\
&= -\lambda\sin\theta\frac{d}{d\theta} + \lambda\sin\theta\frac{d}{d\theta} + \lambda\cos\theta \\
&= \lambda\cos\theta = A_1
\end{aligned}$$

### 3.2.4 Irréductibilité des représentations

**Théorème.** *Pour tout $\lambda \neq 0$, la représentation $T_\lambda$ est irréductible.*

*Démonstration.* Remarquons que le sous-groupe à 1 paramètre $\Omega_3$ correspond au sous-groupe des rotations du plan euclidien autour de l'origine, $SO(2)$ : ainsi, la représentation $T_\lambda$ de $M(2)$ induit la représentation de $\Omega_3$ définie par : $T_\lambda(\omega_3(\alpha))f(\theta) = f(\theta - \alpha)$. Notons $S_\lambda$ la représentation de $SO_2$ dans $\mathcal{H}$ induite par $T_\lambda$ : elle agit, pour toute fonction $f \in \mathcal{H}$ et tout rotation de $SO(2)$ d'angle $\alpha$, par :

$$S_\lambda(\alpha)f(\theta) = T_\lambda(\omega_3(\alpha))f(\theta) = f(\theta - \alpha).$$

Cette représentation $S_\lambda$ est une représentation régulière de $SO(2)$[1].

Montrons maintenant que $T_\lambda$ est une représentation irréductible de $M(2)$ : considérons $\mathcal{I}$ un sous-espace non nul de $\mathcal{H}$, invariant par tous les $T_\lambda(g), g \in M(2)$. On doit démontrer que $\mathcal{I} = \mathcal{H}$.

Le sous-espace $\mathcal{I}$ de $\mathcal{H}$ est également un sous-espace invariant pour la représentation $S_\lambda$. Nous allons appliquer le corollaire du lemme de Schur : il faut pour cela vérifier que les représentations induites par $S_\lambda$ sur chacun des $\mathcal{H}_n$ sont irréductibles, et deux à deux non équivalentes :

- Les $\mathcal{H}_n$ étant de dimension 1, ces représentations induites sont irréductibles.
- Supposons que les représentations induites sur $\mathcal{H}_n$ et $\mathcal{H}_m$ soient équivalentes, *ie* qu'il existe $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n, \mathcal{H}_m)$, inversible, tel que $S_\lambda \mid_{\mathcal{H}_m} = AS_\lambda \mid_{\mathcal{H}_n} A^{-1}$.
  Considérons $\phi_n : \theta \mapsto e^{in\theta} \in \mathcal{H}_n$. Les sous-espaces $\mathcal{H}_n$ et $\mathcal{H}_m$ sont de dimension 1, donc $A(\phi_n) = a\phi_m : \theta \mapsto ae^{im\theta}, a \in \mathbb{C}$, avec $a$ non nul car $A$ est inversible. Or, puisque $S_\lambda \mid_{\mathcal{H}_m} A = AS_\lambda \mid_{\mathcal{H}_n}$, on a :

$$\begin{aligned} A(\phi_n)(\theta + \frac{2\pi}{n}) &= S_\lambda(-\frac{2\pi}{n})A(\phi_n)(\theta) \\ &= AS_\lambda(-\frac{2i\pi}{n})(\phi_n)(\theta) \\ &= A(\phi_n)(\theta) \end{aligned}$$

  car $\phi_n$ est $\frac{2\pi}{n}$ périodique. Donc $A(\phi_n) = a\phi_m$ est $\frac{2\pi}{n}$ périodique, et on en conclut que $m = \pm n$.
  Supposons $m = -n$ : alors

$$\begin{aligned} AS_\lambda(\frac{\pi}{2n})\phi_n(\theta) &= A\phi_n(\theta - \frac{\pi}{2n}) = Ae^{in(-\frac{\pi}{2n})}\phi_n(\theta) \\ &= e^{-i\frac{\pi}{2}}A\phi_n(\theta) = -ia\phi_{-n}(\theta) \\ \text{or} \qquad S_\lambda(\frac{\pi}{2n})A\phi_n(\theta) &= S_\lambda(\frac{\pi}{2n})a\phi_{-n}(\theta) = a\phi_{-n}(\theta - \frac{\pi}{2n}) \\ &= ae^{-in(-\frac{\pi}{2n})}\phi_{-n}(\theta) = iae^{-in\theta} \end{aligned}$$

  et ce pour tout angle $\theta \in \mathbb{R}$, donc $a = 0$, ce qui contredit $A$ inversible. Donc $m = n$.
  Les représentations de $S_\lambda$ induites sur les $\mathcal{H}_n$ sont donc non équivalentes deux à deux.

De plus, La restriction de $S_\lambda$ à $\mathcal{I}$ est complètement réductible, car $SO(2)$ est un groupe commutatif compact.

[1] On rappelle qu'une représentation régulière $T$ (à gauche) d'un groupe $G$ est une représentation dans l'espace vectoriel des applications continues $f : G \to L$, où $L$ est un espace vectoriel, par $T(g_0)f(g) = f(g_0^{-1}g)$.

Toutes les hypothèses du corollaire du lemme de Schur sont vérifiées, donc $\mathcal{I}$, qui est non nul, est somme hilbertienne de certains sous-espaces $\mathcal{H}_n$ : $\mathcal{I} = \oplus_n \mathcal{H}_{i_n}$ (somme hilbertienne). En particulier, il existe un entier $k$ tel que $\phi_k \in \mathcal{I}$.

Montrons maintenant qu'alors $\mathcal{I}$ contient toutes les fonctions $\phi_n$, $n \in \mathbb{Z}$ : $\mathcal{I} \bigcap \mathcal{D}$ est non vide (il contient $\phi_k$) et est stable par tous les $T_\lambda(g)$, aussi est-il aussi stable par les opérateurs infinitésimaux $A_1$, $A_2$ et $A_3$ (lesquels sont définis sur $\mathcal{D}$). Or on a :

$$\begin{aligned} A_1 e^{in\theta} &= \lambda \cos\psi e^{in\theta} \\ A_2 e^{in\theta} &= \lambda \sin\psi e^{in\theta} \\ A_3 e^{in\theta} &= -ine^{in\psi}. \end{aligned}$$

Définissons maintenant deux opérateurs, qui eux aussi stabilisent $\mathcal{I}$ :

$$\begin{aligned} H_+ &= A_1 + iA_2 \\ H_- &= A_1 - iA_2. \end{aligned}$$

On constate que :

$$\begin{aligned} H_+\phi_n &= \lambda\phi_{n+1} \\ H_-\phi_n &= \lambda\phi_{n-1} \end{aligned}$$

On en déduit donc que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\phi_n \in \mathcal{I}$. Donc $\mathcal{I} = \mathcal{H}$ puisque $\mathcal{I}$ est fermé par hypothèse et l'espace vectoriel engendré par ces fonctions est dense dans $\mathcal{H}$. Cela conclut la preuve. $\square$

Dans le cas $\lambda = 0$, alors la représentation $T_0$ coïncide avec la représentation régulière de $SO(2)$ à gauche, qui est somme directe des représentations irréductibles de dimension 1 : $T_0^{(n)} : \alpha \mapsto e^{in\alpha}$.

Les représentations $T_\lambda, \lambda \neq 0$ et $T_0^{(n)}, n \in \mathbb{Z}$, constituent toutes les représentations irréductibles du groupe $M(2)$, mais nous ne démontrerons pas ce résultat.

## 3.3 Les fonctions de Bessel

### 3.3.1 Calcul des coefficients matriciels de la représentation $T_\lambda$

**Définition 9.** *On définit la fonction de Bessel d'ordre $n$ en $z \in \mathbb{C}$ par :*

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{iz\sin\theta - in\theta} d\theta. \tag{3.2}$$

*Cette équation porte le nom de représentation intégrale de la fonction de Bessel d'ordre $n$.*

**Définition 10.** *On définit les éléments matriciels de la représentation $T_\lambda$ de $M(2)$ sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$, étant fixée une base hilbertienne $(\phi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de $\mathcal{H}$, comme les coefficients de $T_\lambda(g)$ dans cette base, pour tout $g \in M(2)$, c'est-à-dire :*

$$c_\lambda^{m,n}(g) = < T_\lambda(g)\phi_n, \phi_m > .$$

Nous allons montrer que les fonctions de Bessel sont les coefficients matriciels des représentations $T_\lambda$, plus précisément :

**Théorème.** *On a l'égalité, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $x \in \mathbb{R}$ non nul :*

$$J_n(x) = -i^{-n} c_i^{0,n}(t_x).$$

*Cela signifie que les fonctions de la variable complexe $z$, $J_n(z)$ et $-i^{-n}c_i^{0,n}(t_z)$, coïncident sur l'axe réel.*

*De plus, on peut aussi écrire, pour tout $m \in \mathbb{Z}$ :*

$$J_n(x) = -i^{-n} c_i^{m,n+m}(t_x).$$

*Démonstration.* Rappelons que $(.,.)$ désigne le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^2$ : si on identifie $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$, ce dernier s'exprime $(z_1, z_2) = \mathcal{R}e\, z_1 \mathcal{R}e\, z_2 + \mathrm{Im} z_1 \mathrm{Im} z_2$.

Interprétons $J_n(x)$ comme coefficient matriciel en effectuant le changement de variables $\theta = \frac{\pi}{2} - \psi$, dans la représentation intégrale de $J_n$ :

$$\begin{aligned}
J_n(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ix\sin\theta - in\theta} d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ix\cos\psi + in\psi - in\frac{\pi}{2}}(-d\psi) \\
&= -i^{-n}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ix\cos\psi}\phi_n(\psi)\overline{\phi_0(\psi)}d\psi \\
&= -i^{-n}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(x\ ,\ e^{i\psi})}\phi_n(\psi)\overline{\phi_0(\psi)}d\psi \\
&= -i^{-n} < T_i(t_x)\phi_n, \phi_0 > \\
&= -i^{-n} c_i^{0,n}(t_x)
\end{aligned}$$

car $\overline{\phi_0(\psi)} = \phi_0(\psi) = 1$.

Pour obtenir la seconde formule, il suffit de constater que $c_i^{0,n}(t_x) = c_i^{m,n+m}(t_x)$.

□

De plus, tous les coefficients des représentations $T_\lambda$ s'expriment grâce aux fonctions de Bessel :

**Proposition 4.** *Pour tout élément $g = g(r, \varphi, \alpha) \in M(2)$, pour tous $m, n \in \mathbb{Z}$, on a :*

$$c_\lambda^{m,n}(g) = -i^{n-m} e^{i(n-m)\varphi - in\alpha} J_{n-m}(r).$$

*Démonstration.* Il suffit de considérer l'action à gauche et à droite de $SO(2)$ sur $M(2)$ :

$$\begin{aligned}
c_\lambda^{m,n}(g) &= c_\lambda^{m,n}(r_\varphi t_r r_{\alpha-\varphi}) \\
&= \sum_{k,l\in\mathbb{Z}} c_\lambda^{m,k}(r_\varphi) c_\lambda^{k,l}(t_r) c_\lambda^{l,n}(r_{\alpha-\varphi}) \\
&= e^{-in\varphi} c_\lambda^{m,n}(t_r) e^{-in(\alpha-\varphi)} \\
&= -i^{n-m} e^{i(n-m)\varphi - in\alpha} J_{n-m}(r)
\end{aligned}$$

car $c_\lambda^{k,l}(r_\alpha) = \delta_{kl} e^{-k\alpha}$. □

### 3.3.2 Propriétés des fonctions de Bessel

Les fonctions de Bessel sont donc exactement les coefficients des représentations irréductibles $T_\lambda$ : on va donc pouvoir, de façon très naturelle, transposer les propriétés de groupe et de représentation aux fonctions de Bessel.

#### Restriction à $\mathbb{R}$

**Proposition 5.** *Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, si $x$ est réel, alors $J_n(x)$ l'est aussi.*

*Démonstration.* La preuve est claire, car $T_i$ est unitaire, d'où :

$$\begin{aligned}
\overline{J_n(x)} &= -i^n < \phi_0, T_i(t_x)\phi_n > \\
&= -i^n < T_i(t_{-x})\phi_0, \phi_n > \qquad \text{car } T_i \text{ est unitaire} \\
&= -i^n < T_i(r_\pi t_x r_\pi)\phi_0, \phi_n > \\
&= -i^n < T_i(r_\pi t_x)\phi_0, \phi_n > \qquad \text{car } \phi_0 \text{ est constante} \\
&= -i^n < T_i(t_x)\phi_0, T_i(r_\pi)\phi_n > \qquad \text{car } T_i \text{ est unitaire} \\
&= -i^n < T_i(t_x)\phi_0, (-1)^n\phi_n > \\
&= -(-i)^n < T_i(t_x)\phi_{-n}, \phi_0 > \\
&= (-i)^n i^{-n} J_{-n}(x) = J_n(x)
\end{aligned}$$

□

#### Fonctions de Bessel d'indice opposé

**Proposition 6.** *Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$ et tout réel $x \in \mathbb{R}$, on a*

$$J_n(x) = (-1)^n J_{-n}(x). \tag{3.3}$$

*Démonstration.* Introduisons l'opérateur linéaire $Q \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ défini par

$$Qf(\psi) = f(-\psi).$$

Géométriquement, $Q$ est la symétrie par rapport à l'axe des $x$. Il doit donc commuter avec les translations le long de cet axe, mais pas avec celles le long de l'axe des $y$, ni les rotations. On le vérifie par le calcul : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} QT_\lambda(t_x)f(\theta) &= Qe^{\lambda r\cos\theta}f(\theta) = e^{\lambda r\cos\theta}f(-\theta) \\ &= T_\lambda(t_x)f(-\theta) = T_\lambda Qf(\theta) \\ \text{donc} \qquad QT_\lambda(t_x) &= T_\lambda Q(t_x). \end{aligned}$$

De plus, l'opérateur $Q$ est unitaire, et envoie le vecteur de base $\phi_n$ sur le vecteur $\phi_{-n}$. Comme les fonctions de Bessel sont les coefficients de la translation de vecteur unité suivant l'axe des $x$, on en déduit immédiatement que pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$,

$$\begin{aligned} c_i^{0,-n}(t_x) &= < T_i(t_x)\phi_{-n}, \phi_0 > \\ &= < T_i(t_x)Q\phi_n, \phi_0 > \\ &= < QT_i(t_x)\phi_n, \phi_0 > \qquad \text{d'après le calcul ci-dessus} \\ &= < T_i(t_x)\phi_n, Q\phi_0 > \qquad \text{car } Q \text{ est unitaire hermitien} \\ &= < T_i(t_x)\phi_n, \phi_0 > \\ &= c_i^{0,n}(t_x) \\ \text{d'où} \qquad J_{-n}(x) &= i^{2n}J_n(x) = (-1)^n J_n(x). \end{aligned}$$

□

**Formule d'addition**

**Proposition 7.** *Soient* $r_1, r_2, \rho \in \mathbb{R}_+, \varphi_2, \varphi \in \mathbb{R}$ *liés par la relation suivante :*

$$\rho e^{i\varphi} = r_1 + r_2 e^{i\varphi_2}. \tag{3.4}$$

*Alors on a l'égalité :*

$$e^{in\varphi}J_n(\rho) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{ik\varphi_2} J_{n-k}(r_1)J_k(r_2),$$

*la série convergeant normalement en* $\varphi_2$, $r_1$ *et* $r_2$.

*Démonstration.* Considérons les translations $g_1 = g(r_1, 0, 0)$, $g_2 = g(r_2, \varphi_2, 0)$ et $g = g_1 g_2$ de $M(2)$. On a, d'après la définition de $\rho$ et $\varphi$ : $g = g(\rho, \varphi, 0)$.

Exploitons alors le fait que $T_i$ est une représentation :

$$T_i(g_1 g_2) = T_i(g_1)T_i(g_2).$$

Calculons le coefficient matriciel :

$$c_i^{0,n}(g_1 g_2) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_i^{0,k}(g_1)c_i^{k,n}(g_2).$$

Or, grâce à l'action de $SO(2)$ à droite et à gauche sur $M(2)$, on a $g_1 g_2 = r_\varphi t_\rho r_{-\varphi}$.

Donc on peut calculer :

$$\begin{aligned} c_i^{k,n}(g_2) &= e^{in\varphi_2} e^{-ik\varphi_2} < T_i(t_{r_2})\phi_n, \phi_k > \\ &= -i^{n-k} e^{i(n-k)\varphi_2} J_{n-k}(r_2) \\ \text{et} \qquad c_i^{0,k}(g_1) &= c_i^{0,k}(t_{r_1}) = -i^k J_k(r_1). \end{aligned}$$

En remplaçant l'expression des coefficients dans la somme précédente, et en effectuant le changement de variables $k \to n-k$, on obtient le résultat.

Pour montrer qu'il y a convergence normale, remarquons tout d'abord que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la famille $(J_n(x))_{n\in\mathbb{Z}}$ est dans $l^2(\mathbb{Z})$ et de norme 1 : comme $(\phi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base orthormée, on a

$$\begin{aligned} 1 = ||T_i(t_{-x})\phi_0||_{L^2}^2 &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} | < \phi_n, T_i(t_{-x})\phi_0 > |^2 \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} | < T_i(t_x)\phi_n, \phi_0 > |^2 \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_i^{0,n}(t_x)|^2 \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} |J_n(x)|^2 \end{aligned}$$

car $T_i$ est unitaire.

On en déduit donc que

$$\begin{aligned} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |e^{ik\varphi_2} J_{n-k}(r_1) J_k(r_2)|^2 &\leqslant |(J_n(r_1))_{n\in\mathbb{Z}}|_{l^2}^2 |(J_n(r_2))_{n\in\mathbb{Z}}|_{l^2}^2 \qquad \text{par Cauchy-Schwarz} \\ &\leqslant 1 \end{aligned}$$

et ce pour tous $\varphi_2 \in \mathbb{R}$ , $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+$ : la série considérée converge donc normalement. □

**Corollaire.** *On en tire plusieurs formules dérivées :*

$$\begin{aligned} J_0(\rho) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^k e^{ik\varphi_2} J_k(r_1) J_k(r_2) \\ J_n(r_1 + r_2) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} J_{n-k}(r_1) J_k(r_2) \\ J_n(r_1 - r_2) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^k J_{n-k}(r_1) J_k(r_2) \ \textit{si } r_1 \geqslant r_2 \\ \sum_{k\in\mathbb{Z}} J_{n+k}(\rho) J_k(\rho) &= J_n(0) = \delta_{0n} \end{aligned} \tag{3.5}$$

*la dernière portant le nom de formule de Hansen.*

*Démonstration.* Voici quels cas particuliers considérer :

- On prend $n = 0$ dans la formule générale et on utilise la formule d'indice opposé (3.3).
- On prend $\varphi_2 = 0$ dans la formule générale : on a alors $\rho = r_1 + r_2$ et $\varphi = 0$.
- On prend $\varphi_2 = \pi$ dans la formule générale : on a alors $\rho = r_1 - r_2 \geqslant 0$ si $r_1 \geqslant r_2$, et $\varphi = 0$.
- On prend $r_1 = r_2 = \rho$ dans la formule précédente et on utilise la formule d'indice opposé (3.3).

□

### Formule de multiplication

**Proposition 8.** *Soient $r_1, r_2, \rho \in \mathbb{R}_+$, $\varphi_2, \varphi \in \mathbb{R}$ liés par la relation suivante :*

$$\rho e^{i\varphi} = r_1 + r_2 e^{i\varphi_2}. \tag{3.6}$$

*Alors on a l'égalité :*

$$J_{n-m}(r_1) J_m(r_2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n\varphi - m\varphi_2)} J_n(\rho) d\varphi_2.$$

*Démonstration.* Multiplions les deux membres de la formule d'addition (3.4) par $\frac{e^{-im\varphi_2}}{2\pi}$ et calculons l'intégrale pour $\varphi_2$ allant de 0 à $2\pi$ :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n\varphi - m\varphi_2)} J_n(\rho) d\varphi_2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{i(k-m)\varphi_2} J_{n-k}(r_1) J_k(r_2) d\varphi_2 \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} J_{n-m}(r_1) J_m(r_2) d\varphi_2 \\
&= J_{n-m}(r_1) J_m(r_2)
\end{aligned}$$

par orthogonalité des fonctions $\phi_k(\varphi) = e^{ik\varphi}$.

□

**Corollaire.** *On en déduit la formule :*

$$\forall \rho \in \mathbb{R}_+,\ J_{n-m}(\rho) J_m(\rho) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{i(n-2m)\varphi} J_n(2\rho \cos\varphi) d\varphi.$$

*Démonstration.* Prenons $r_1 = r_2 = \rho$ : nous avons alors $\varphi = \frac{\varphi_2}{2}$ ($\varphi_2$ est un angle au centre, voir figure ***) et

$$r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos\varphi_2} = \sqrt{2\rho^2 + 2\rho^2(2\cos(\varphi)^2 - 1)} = 2\rho\cos(\frac{\varphi_2}{2}).$$

Si l'on remplace alors dans la formule de multiplication (3.6), en intégrant par rapport à $\varphi$, cela fournit le résultat. □

**Fonction génératrice**

**Proposition 9.** *La fonction génératrice des fonctions de Bessel est :*

$$e^{ix\sin\psi} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n(x)e^{in\psi}.$$

*Cette égalité en implique plusieurs simples sur les fonctions de Bessel :*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} i^n J_n(x) = e^{ix}$$
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} (-i)^n J_n(x) = e^{-ix}$$
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n(x) = 1.$$

*Démonstration.* La représentation intégrale des fonctions de Bessel montre que $J_n(x)$ est le $n$-ème coefficient de Fourier de la fonction $\psi \mapsto e^{ix\sin\psi}$, d'où la première formule. Les autres en découlent en choisissant successivement $\psi = \frac{\pi}{2}$ , $\frac{\pi}{2}$ et 0. □

**Formules de récurrence**

**Proposition 10.** *Les fonctions de Bessel vérifient les deux relations de récurrence suivantes :*

$$\begin{aligned} J_{n-1}(z) &= (\frac{n}{z} + \frac{d}{dz})J_n(z) \\ J_{n+1}(z) &= (\frac{n}{z} - \frac{d}{dx})J_n(z). \end{aligned} \tag{3.7}$$

*Démonstration.* Démontrons que cette relation est vérifiée sur l'axe réel, pour les coefficients matriciels considérés comme fonctions de la variable complexe : $z \mapsto -i^{-n}c_i^{0,n}(t_z)$ restreints à l'axe des $x$ (à $\mathbb{R}$). Faisons agir $M(2)$ dessus, les translations agissant par composition, et les rotations par conjugaison : $r_\alpha \cdot t_z = r_\alpha t_z r_{-\alpha}$.

On peut donc calculer l'action des opérateurs infinitésimaux $H_+$ et $H_-$ de l'algèbre de Lie de $M(2)$. $A_1$ et $A_2$ sont les opérateurs infinitésimaux associés aux translations suivant l'axe des $x$ et des $y$ respectivement, ils commutent aux translations :

$$\begin{aligned} H_+c_i^{0,n}(t_x)\mid_{\mathbb{R}} &=< H_+T_i(t_x)\phi_n, \phi_0 > \\ &=< T_i(t_x)H_+\phi_n, \phi_0 > \\ &=< T_i(t_x)(i\phi_{n+1}), \phi_0 > \\ &= ic_i^{0,n+1}(t_x)\mid_{\mathbb{R}} . \end{aligned}$$

De même, on a :
$$H_- c_i^{0,n}(t_x) \mid_{\mathbb{R}} = i c_i^{0,n-1}(t_x) \mid_{\mathbb{R}} .$$

Remarquons que $A_1$ est l'opérateur infinitésimal associé à la translation suivant l'axe des $x$, donc on a immédiatement :

$$A_1 c_i^{0,n}(t_x) \mid_{\mathbb{R}} = \frac{d}{dx} c_i^{0,n}(t_x) \mid_{\mathbb{R}} .$$

Fixons $x > 0$ et remarquons que, lorsque $\varepsilon \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ tend vers 0, alors l'opérateur $t_{i\varepsilon} t_x$ est équivalent à l'opérateur $r_{\varepsilon/x} t_x r_{-\varepsilon/x}$ (*ie* l'action de $A_2$ est égale à celle de $A_3$). On a donc :

$$\begin{aligned}
A_2 c_i^{0,n}(t_x) \mid_{\mathbb{R}} &= A_3 c_i^{0,n}(t_x) \mid_{\mathbb{R}} \\
&=< A_3 T_i(t_x)\phi_n, \phi_0 > \\
&= \frac{d}{d\varepsilon}\left(< A_3 T_i(t_x)\phi_n, \phi_0 >\right)_{\varepsilon=0} \\
&= \frac{d}{d\varepsilon}\big(< T_i(r_{\varepsilon/x} t_x r_{-\varepsilon/x})\phi_n, \phi_0 >\big)_{\varepsilon=0} \\
&= \frac{d}{d\varepsilon}\big(< T_i(t_x r_{-\varepsilon/x})\phi_n, T_i(r_{-\varepsilon/x})\phi_0 >\big)_{\varepsilon=0} \\
&= \frac{d}{d\varepsilon}\Big(< T_i(t_x) e^{in\varepsilon/x}\phi_n, \phi_0 >\Big)_{\varepsilon=0} \\
&= \frac{in}{x} < T_i(t_x)\phi_n, \phi_0 > \\
&= \frac{in}{x} c_i^{0,n}(t_x) \mid_{\mathbb{R}}
\end{aligned}$$

On a donc calculé d'une autre façon l'action de $H_+$ et $H_-$ sur $c_i^{0,n}(t_x)$, on en déduit donc les relations de récurrence :

$$c_i^{0,n+1}(t_x) \mid_{\mathbb{R}} = -iH_+ c_i^{0,n}(t_x) \mid_{\mathbb{R}} = -i(A_1 + iA_2) c_i^{0,n}(t_x) \mid_{\mathbb{R}} = -i(\frac{d}{dx} + \frac{n}{x}) c_i^{0,n}(t_x) \mid_{\mathbb{R}}$$

et $c_i^{0,n-1}(t_x) \mid_{\mathbb{R}} = -iH_- c_i^{0,n}(t_x) \mid_{\mathbb{R}} = -i(\frac{d}{dx} - \frac{n}{x}) c_i^{0,n}(t_x) \mid_{\mathbb{R}}$ .

On en déduit, puisque $-i^{-n} c_i^{0,n}(t_x)$ et $J_n(x)$ coïncident sur l'axe des $x$, que les fonctions de Bessel vérifient les mêmes équations, à savoir :

$$\begin{aligned}
J_{n+1}(x) &= (\frac{n}{x} - \frac{d}{dx}) J_n(x) \\
\text{et } J_{n-1}(x) &= (\frac{n}{x} + \frac{d}{dx}) J_n(x).
\end{aligned}$$

Puisque les fonctions $J_n$ sont holomorphes sur $\mathbb{C}$, on en déduit qu'elles vérifient ces relations pour tout $z \in \mathbb{C}$.

$\square$

**Equation différentielle**

**Proposition 11.** *La fonction de Bessel $J_n$ d'ordre $n$ est solution de l'équation différentielle :*

$$z^2 J_n''(z) + zJ_n'(z) + (z^2 - n^2)J_n(z) = 0.$$

*Démonstration.* Notons $\Delta$ l'opérateur de Laplace : $\Delta = H_+H_- = A_1^2 + A_2^2$. Or l'action de $H_+$ est la multiplication par $ie^{i\theta}$, celle de $H_-$ la multiplication par $ie^{-i\theta}$, donc l'action de $\Delta$ est scalaire : c'est la multiplication par $-1$.

Or l'action de $H_-$ sur $c_i^{0,n}(t_x) \mid_{\mathbb{R}}$ est :

$$H_- c_i^{0,n}(t_x) \mid_{\mathbb{R}} = (\frac{n}{x} + \frac{d}{dx}) c_i^{0,n}(t_x) \mid_{\mathbb{R}} = i c_i^{0,n-1}(t_x) \mid_{\mathbb{R}} (x)$$

et celle de $H_+$ sur $c_i^{0,n-1}(t_x) \mid_{\mathbb{R}} (x)$ est :

$$H_+ c_i^{0,n-1}(t_x) \mid_{\mathbb{R}} (x) = (\frac{n-1}{x} - \frac{d}{dx}) c_i^{0,n-1}(t_x) \mid_{\mathbb{R}} = i c_i^{0,n}(t_x) \mid_{\mathbb{R}}$$

Donc on en déduit que :

$$\begin{aligned}
-c_i^{0,n}(t_x) \mid_{\mathbb{R}} &= \Delta c_i^{0,n}(t_x) \mid_{\mathbb{R}} \\
&= H_+H_- c_i^{0,n}(t_x) = (\frac{n-1}{x} - \frac{d}{dx})(\frac{n}{x} + \frac{d}{dx}) c_i^{0,n}(t_x) \\
&= \frac{n(n-1)}{x^2} c_i^{0,n}(t_x) + \frac{n-1}{x}\frac{d}{dx} c_i^{0,n}(t_x) - \frac{n}{x}\frac{d}{dx} c_i^{0,n}(t_x) + \frac{n}{x^2} c_i^{0,n}(t_x) - \frac{d^2}{dx^2} c_i^{0,n}(t_x) \\
&= \frac{n^2}{x^2} c_i^{0,n}(t_x) \mid_{\mathbb{R}} - \frac{1}{x}\frac{d}{dx} c_i^{0,n}(t_x) \mid_{\mathbb{R}} - \frac{d^2}{dx^2} c_i^{0,n}(t_x) \mid_{\mathbb{R}} .
\end{aligned}$$

Il en résulte la même équation différentielle vérifiée par la fonction de Bessel d'ordre $n$ réelle :

$$-J_n(x) = (\frac{n^2}{x^2} - \frac{1}{x}\frac{d}{dx} - \frac{d^2}{dx^2}) J_n(x)$$

$$x^2 J_n''(x) + xJ_n'(x) + (x^2 - n^2)J_n(x) = 0.$$

Or les fonctions de Bessel sont holomorphes sur $\mathbb{C}$, donc cette équation différentielle est vérifée pour tout $z$ complexe.

□

La fonction $J_n$ est l'unique solution, à constante multiplicative près, de cette équation différentielle, vérifiant $|J_n(0)| < \infty$. Nous ne démontrerons pas ce résultat.

### 3.3.3 Fonctions de Bessel et polynômes $P^l_{mn}$

Pour conclure, nous allons observer un lien entre les polynômes $P^l_{mn}$ et les fonctions de Bessel, qui découle directement de l'identification de $M(2)$ avec une forme dégénérée de SO(3) :

Dans la représentation intégrale des polynômes $P^l_{mn}$ :

$$
\begin{aligned}
P^l_{mn}(\cos\theta) =& \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{(l-m)!(l+m)!}{(l-n)!(l+n)!}} \\
& \int_0^{2\pi} \left(\cos(\frac{\theta}{2})e^{i\frac{\phi}{2}} + i\sin(\frac{\theta}{2})e^{-i\frac{\phi}{2}}\right)^{l-n} \left(i\sin(\frac{\theta}{2})e^{i\frac{\phi}{2}} + \cos(\frac{\theta}{2})e^{-i\frac{\phi}{2}}\right)^{l+n} e^{im\phi}d\phi
\end{aligned}
$$

posons $\theta = \frac{r}{l}$, et faisons tendre $l$ vers $+\infty$ :

$$
\lim_{l\to+\infty} P^l_{mn}(\cos\frac{r}{l}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ir\cos\phi+i(m-n)\phi}d\phi = i^{m-n}J_{m-n}(r).
$$

On voit ici clairement que les propriétés des groupes considérés, SU(2) et $M(2)$, se transmettent aux fonctions spéciales associées.

# Conclusion

Le principal intérêt de ce que nous venons de voir n'est pas l'obtention des formules elles-mêmes : c'est plutôt le lien très étroit entre les fonctions spéciales et les représentations des groupes sous-jacents. Lorsque ce lien est établi, les formules découlent tout naturellement de la représentation.

C'est d'ailleurs l'essence même de la recherche mathématique : expliquer des phénomènes apparemment complexes en se plaçant à une échelle supérieure, où beaucoup de choses se simplifient.

# Bibliographie

[1] Jacques Faraut. *Analyse sur les groupes de Lie : Une introduction.* Calvage et Mounet, 2006.

[2] N.N.Lebedev. *Special Functions and their Applications.* Dover Publications, 1972.

[3] N. J. Vilenkin. *Special Functions and the Theory of Group Representastions.* Providence RI : American mathematical society, 1968.