

Opérades et complexes de graphes : introduction au domaine de recherches

David Waszek
sous la direction de Benoit Fresse

22 octobre 2012

Table des matières

1	Introduction historique	1
2	La notion d'opéade	4
2.1	Définition	4
2.2	Exemples classiques	5
3	Opérades cycliques	6
3.1	Définition	6
3.2	Complexes de graphes	8
3.3	Formes bilinéaires invariantes	9
4	Des algèbres aux graphes	10
	Références	11

1 Introduction historique

« Then I found a strange construction of cohomology classes of mapping class groups... »

— Maxim Kontsevich, [Kon93]

Le point de départ des recherches que nous allons exposer est une construction de Maxim Kontsevich datant du début des années 90 ([Kon93, Kon94]). Nous commençons par quelques définitions. Soit $\Sigma_{g,b}$ une surface compacte orientable de genre g à b composantes de bord (par exemple, $\Sigma_{0,3}$ est une sphère à laquelle on a retiré trois disques ouverts). Le *mapping class group* $\Gamma_{g,b}$ de $\Sigma_{g,b}$ peut être défini comme le groupe des classes d'homotopie d'homéomorphismes de $\Sigma_{g,b}$ préservant l'orientation et égaux à l'identité sur les bords. Ce groupe est étroitement lié à l'*espace de modules* $\mathcal{M}_{g,b}$, qui paramètre les structures complexes dont on peut munir $\Sigma_{g,b}$ et qui joue un rôle important en géométrie algébrique ; on a en particulier

$$H^\bullet(\Gamma_{g,b}; \mathbf{Q}) = H^\bullet(\mathcal{M}_{g,b}; \mathbf{Q}).$$

Kontsevich s'est aperçu qu'on pouvait associer à toute algèbre associative A munie d'une structure de \mathbf{Q} -espace vectoriel (de dimension finie) et d'une forme bilinéaire non dégénérée $\langle \cdot, \cdot \rangle$ invariante, c'est-à-dire symétrique et vérifiant

$$\langle ab, c \rangle = \langle a, bc \rangle,$$

une classe de cohomologie dans $H^\bullet(\Gamma_{g,b}; \mathbf{Q})$ pour tous $g, n \geq 0$. Cette construction utilise l'intermédiaire combinatoire suivant.

Un *graphe en rubans* est un graphe connexe muni, en chaque sommet, d'un ordre cyclique sur les arêtes qui lui sont incidentes. En « épaisissant » un tel graphe comme à la figure 1, c'est-à-dire en remplaçant les sommets par des disques et les arêtes par

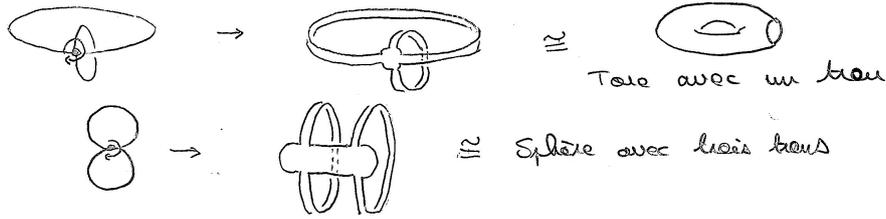


FIGURE 1 – Deux surfaces à bord obtenues par épaisissement de graphes en rubans

des rubans, on obtient une surface compacte orientable à bord $\Sigma_{g,b}$. Une telle surface est associée à une infinité de graphes en rubans distincts : en fusionnant deux sommets par contraction d'une arête (et en munissant le sommet résultant de l'ordre cyclique induit sur ses arêtes incidentes) on ne change pas la surface représentée. Il est possible de mettre (une version raffinée de) ce modèle combinatoire à profit pour étudier $\mathcal{M}_{g,b}$, ce qui a été fait sous diverses formes partir du milieu des années 80 (par exemple par Harer et Zagier [HZ86], Penner [Pen88], et Kontsevich lui-même dans sa thèse [Kon92]).

Pour la construction qui nous occupe, Kontsevich a employé ce modèle sous la forme d'un *complexe de graphes* qu'il a défini pour l'occasion. On introduit tout d'abord une notion d'*orientation* pour les graphes en rubans, que nous n'explicitons pas. On définit ensuite \mathcal{GRub}_k , le \mathbf{Q} -espace vectoriel de base les classes d'isomorphismes de graphes en rubans orientés à k sommets (tous de valence ≥ 3), avec la relation

$$(\mathcal{G}, -\text{Or}) = -(\mathcal{G}, \text{Or}).$$

On introduit pour finir une *différentielle* $d : \mathcal{GRub}_{k+1} \rightarrow \mathcal{GRub}_k$ comme suit : pour \mathcal{G} un graphe en rubans orienté,

$$d(\mathcal{G}) = \sum_{a \in \{\text{arêtes de } \mathcal{G}\}} \mathcal{G}/a$$

où \mathcal{G}/a est le graphe en rubans orienté obtenu par contraction de l'arête a . Les orientations sont telles que $d^2 = 0$; ainsi, \mathcal{GRub}_\bullet forme un complexe de chaînes. Les sous-espaces vectoriels $\mathcal{GRub}_k^{g,b} \subset \mathcal{GRub}_k$ de base les graphes en rubans correspondant à la surface $\Sigma_{g,b}$ forment un sous-complexe $\mathcal{GRub}_\bullet^{g,b}$ de \mathcal{GRub}_\bullet , et :

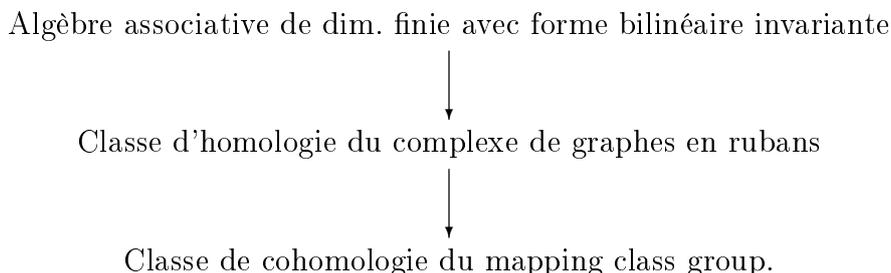
Théorème ([Kon93]). On a un isomorphisme

$$H_k(\mathcal{GRub}_\bullet^{g,b}) \cong H^{r-k}(\Gamma_{g,b}; \mathbf{Q})$$

où $r = 4g - 4 + 2b$.

Nous renvoyons à [CV03, section 4] pour une preuve relativement élémentaire de ce résultat.

La première construction de Kontsevich se schématise donc comme suit :



Kontsevich s'est alors aperçu que son résultat pouvait se généraliser. Les graphes en rubans sont, en un certain sens que nous précisons, associés aux algèbres associatives ; il est possible de construire des complexes de graphes associés à d'autres types d'algèbres, comme les algèbres de Lie ou les algèbres commutatives¹. Comme précédemment, on peut alors construire des classes dans l'homologie de ces complexes à partir de données algébriques, mais il y a une subtilité : c'est à partir d'une *algèbre de Lie* munie d'une forme bilinéaire non dégénérée invariante, c'est-à-dire symétrique et vérifiant

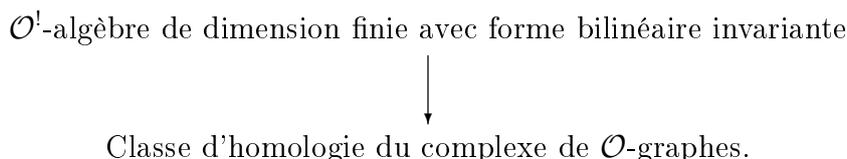
$$\langle [a, b], c \rangle = \langle a, [b, c] \rangle$$

que l'on peut construire une classe dans l'homologie du complexe de graphe *commutatif*, et inversement. Pour rendre compte de ce phénomène de dualité, Ginzburg et Kapranov [GK94] ont repris le concept d'*opérade* (initialement introduit par May [May72] en topologie pour l'étude des espaces de lacets itérés), qui offre l'une des formalisations possibles de la notion de type d'algèbre : il existe ainsi des opérades *Ass*, *Com*, *Lie* encodant respectivement les structures d'algèbre associative, commutative, de Lie. Ils ont ensuite montré que toute opérade *quadratique*² \mathcal{O} admettait une opérade duale $\mathcal{O}^!$, avec en particulier

$$\text{Ass}^! = \text{Ass}, \text{Com}^! = \text{Lie}, \text{Lie}^! = \text{Com}.$$

Cette dualité entre opérades donne lieu à une dualité entre \mathcal{O} -algèbres et $\mathcal{O}^!$ -algèbres, qui permet de faire entrer dans un cadre général plusieurs phénomènes connus précédemment (nous renvoyons à l'exposé de 1994 de Jean-Louis Loday au séminaire Bourbaki, « La renaissance des opérades » [Lod96]).

La construction de Kontsevich est applicable à toute opérade quadratique \mathcal{O} qui est de surcroît *cyclique* : c'est cette condition, dégagée par Getzler et Kapranov [GK95], qui permet la construction du complexe de \mathcal{O} -graphes et la définition de la notion de produit scalaire invariant sur une \mathcal{O} -algèbre (resp. sur une $\mathcal{O}^!$ -algèbre). On a alors le schéma :



1. L'homologie de ces deux complexes est intéressante, car liée à la cohomologie des groupes d'automorphismes extérieurs de groupes libres. Nous renvoyons à [CV03, sections 3 et 5].

2. Dans leur article l'hypothèse faite sur l'opérade est en fait un peu plus restrictive ; leur résultat a ultérieurement été généralisé et il est aujourd'hui usuel de présenter cette dualité pour toute opérade quadratique, voir [LV12, chapitre 7].

Dans ce qui va suivre, nous présentons informellement les notions d'opétrade et d'opétrade cyclique, pour pouvoir donner une idée du lien entre type d'algèbre et type de graphe ; nous illustrons pour finir sommairement la manière dont on peut passer d'une algèbre associative à un cycle dans le complexe de graphes en rubans. Nous espérons ainsi donner une intuition de la manière dont s'agencent les différents éléments de la construction de Kontsevich. Le but est avant tout de donner au lecteur l'envie d'en apprendre davantage sur ces belles mathématiques où se rejoignent algèbre, combinatoire et géométrie. Je remercie chaleureusement Benoit Fresse de me les avoir fait découvrir, et de tout le temps qu'il a consacré à m'aider à y comprendre quelque chose.

2 La notion d'opétrade

Nous présentons ici de manière assez informelle la notion d'opétrade, puis explicitons les exemples classiques *Ass*, *Com* et *Lie*. Pour des définitions plus précises, nous recommandons [MSS02, LV12].

2.1 Définition

Un type d'algèbre est habituellement caractérisé par la donnée d'opérations élémentaires et de relations sur ces opérations. Par exemple, la structure d'algèbre associative est caractérisée par une opération produit soumise aux relations d'associativité.

Le premier ingrédient d'une opétrade (ensembliste) est une famille $\mathcal{O} = (\mathcal{O}(n))_{n \geq 0}$, où $\mathcal{O}(n)$ est l'ensemble de toutes les opérations à n variables qu'il est possible de faire en combinant les opérations élémentaires. Chaque $\mathcal{O}(n)$ doit être muni d'une action du groupe symétrique \mathfrak{S}_n , correspondant à la permutation des variables. Par exemple, $\mathcal{A}ss(2)$ a deux éléments, qu'on peut voir comme correspondant aux opérations $(a_1, a_2) \mapsto a_1 \cdot a_2$ et $(a_1, a_2) \mapsto a_2 \cdot a_1$; plus généralement, on a l'égalité $\mathcal{A}ss(n) = \mathfrak{S}_n$, puisque par associativité, pour chaque permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ il existe une unique manière de former le produit $a_{\sigma(1)} \cdot \dots \cdot a_{\sigma(n)}$.

Nous travaillerons dans un cadre linéaire, et partons donc d'une collection de \mathbf{Q} -espaces vectoriels $\mathcal{O}(n)$ munis d'une action de \mathfrak{S}_n ; une telle collection est appelée \mathfrak{S} -module (linéaire). (Dans ce cadre $\mathcal{A}ss(n) = \mathbf{Q}[\mathfrak{S}_n]$). Pour former une opétrade (linéaire), un \mathfrak{S} -module \mathcal{O} doit de surcroît être muni d'une unité $\mathbf{Q} \rightarrow \mathcal{O}(1)$, correspondant à l'opération identité³, et d'opérations de composition

$${}_i \circ : \mathcal{O}(n) \otimes \mathcal{O}(m) \rightarrow \mathcal{O}(n + m - 1) \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n, \quad (1)$$

satisfaisant des relations de compatibilité avec l'identité ($p \circ_i \text{Id} = p$, $\text{Id} \circ_1 p = p$), d'équivariance et d'associativité, que nous expliciterons (informellement) plus bas.

Exemple prototypique 2.1. L'exemple prototypique d'opétrade est, pour V un \mathbf{Q} -espace vectoriel, la famille $\text{End}(V)$ avec

$$\text{End}(V)(n) = \text{Hom}(V^{\otimes n}, V)$$

munie de l'action caractérisée par

$$(f \cdot \sigma)(v_1 \otimes \dots \otimes v_n) = f(v_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(n)}). \quad (2)$$

3. On a un élément $\text{Id} \in \mathcal{O}(1)$ correspondant à l'image de $1 \in \mathbf{Q}$ par le morphisme unité $\mathbf{Q} \rightarrow \mathcal{O}(1)$.

La composition est donnée par la composition habituelle des applications multilinéaires : pour $f \in \text{End}(V)(n), g \in \text{End}(V)(m)$ et $1 \leq i \leq n$,

$$f \circ_i g(v_1 \otimes \dots \otimes v_{n+m-1}) = f(v_1 \otimes \dots \otimes v_{i-1} \otimes g(v_i \otimes \dots \otimes v_{i+m-1}) \otimes v_{i+m} \otimes \dots \otimes v_{n+m-1}).$$

Définition 2.2. Une algèbre sur l'opérade \mathcal{O} est un espace vectoriel V muni d'un morphisme d'opérades $\mathcal{O} \rightarrow \text{End}(V)$ (c'est-à-dire d'une application linéaire envoyant identité sur identité et commutant aux actions des groupes symétriques et aux compositions).

Une algèbre sur \mathcal{O} est donc en particulier un espace vectoriel V où chaque élément de $\mathcal{O}(n)$ est réalisé par une opération multilinéaire à n variables. Une algèbre associative (linéaire) est ainsi une algèbre sur l'opérade $\mathcal{A}ss$.

Revenons aux relations sur les compositions qui caractérisent une opérade. Remarquons qu'on peut représenter toute suite de compositions d'éléments de \mathcal{O} par un arbre enraciné dont les sommets sont étiquetés par des éléments de \mathcal{O} (un sommet à n arêtes entrantes, donc de valence $n + 1$, étant étiqueté par un élément de $\mathcal{O}(n)$), et dont les arêtes entrantes de chaque sommet sont numérotées (figure 2). L'équivariance signifie

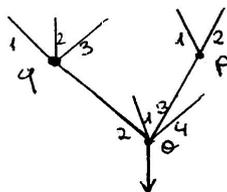


FIGURE 2 – Un arbre représentant la composée $(o_3 \circ p)_2 \circ q$, $o \in \mathcal{O}(4), p \in \mathcal{O}(2), q \in \mathcal{O}(3)$

que si l'on fait agir \mathfrak{S}_n simultanément sur l'étiquette d'un sommet et sur la numérotation des arêtes correspondantes, on ne change pas le résultat. L'associativité signifie que quel que soit l'ordre dans lequel on contracte les arêtes d'un arbre de composition en utilisant les opérations \circ_i , on ne change pas le résultat.

2.2 Exemples classiques

2.2.1 L'opérade Com

Le \mathfrak{S} -module sous-jacent est

$$Com(n) = \mathbf{Q} \text{ pour } n \geq 1$$

et $Com(0) = 0$, l'action de \mathfrak{S}_n étant triviale, ainsi que la structure de composition.

2.2.2 L'opérade $\mathcal{A}ss$

Le \mathfrak{S} -module sous-jacent est

$$\mathcal{A}ss(n) = \mathbf{Q}[\mathfrak{S}_n] \text{ pour } n \geq 1,$$

représentation régulière de \mathfrak{S}_n , et $\mathcal{A}ss(0) = 0$. On peut représenter les éléments de $\mathcal{A}ss(n)$ par des arbres *planaires* enracinés à un sommet et n feuilles numérotées. L'action à droite de \mathfrak{S}_n est alors obtenue en appliquant σ^{-1} à la numérotation. (La planarité se

réduit ici à un ordre sur les feuilles numérotées, donc un ordre sur les entiers $\{1, \dots, n\}$. La structure de composition, sous la forme d'une application qui associe à un arbre aux sommets étiquetés par des éléments de \mathcal{O} (comme à la figure 2) un élément de \mathcal{O} , est alors donnée par les opérations de câblage et de contractions d'arêtes évidentes.

2.2.3 L'opérade $\mathcal{L}ie$

Là encore $\mathcal{L}ie(0) = 0$. Le \mathfrak{S}_n -module $\mathcal{L}ie(n)$ est engendré par les arbres binaires planaires enracinés à n feuilles numérotées, modulo les relations, que l'on peut appliquer à tout sous-arbre, représentées à la figure 3. Comme pour $\mathcal{A}ss$, la structure de composition

FIGURE 3 – Relations d'antisymétrie et de Jacobi pour l'opérade $\mathcal{L}ie$

est donnée par les opérations évidentes de câblage.

3 Opérades cycliques

Nous présentons tout d'abord la notion d'opérade cyclique. La source la plus claire sur la question est encore, nous semble-t-il, l'article original de Getzler et Kapranov [GK95]. Nous renvoyons également à [MSS02, section 5.1]. Nous décrivons ensuite, pour \mathcal{O} une opérade cyclique, le complexe de graphes associé à \mathcal{O} , et introduisons la notion de forme bilinéaire invariante sur une \mathcal{O} -algèbre.

3.1 Définition

Une opérade cyclique est une famille de \mathbf{Q} -espaces vectoriels $\mathcal{O} = \mathcal{O}(n)$, où $\mathcal{O}(n)$ est muni d'une action de \mathfrak{S}_{n+1} (et non plus de \mathfrak{S}_n), équipée d'une unité $\mathbf{Q} \rightarrow \mathcal{O}(1)$ et d'opérations de « composition »

$${}_i\circ_j : \mathcal{O}(n) \otimes \mathcal{O}(m) \rightarrow \mathcal{O}(n + m - 1) \quad \text{pour } 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m \quad (3)$$

satisfaisant là encore des relations de compatibilité avec l'identité ($p \circ_j \text{Id} = \text{Id} \circ_j p = p$), d'équivariance et d'associativité. Explicitons ces conditions comme dans la section précédente. Toute suite de compositions généralisées ${}_i\circ_j$ peut être représentée par un arbre non enraciné dont les sommets sont étiquetés par des éléments de \mathcal{O} , et dont les arêtes incidentes à chaque sommet sont numérotées (un sommet de valence n étant étiqueté par un élément de $\mathcal{O}(n - 1)$, et ayant ses arêtes incidentes numérotées de 0 à $n - 1$; figure 4). L'équivariance signifie que si l'on fait agir \mathfrak{S}_{n+1} simultanément sur l'étiquette d'un sommet et sur la numérotation des arêtes qui lui sont incidentes, on ne change pas le résultat; l'associativité signifie que le résultat des compositions représentées ne dépend pas de l'ordre dans lequel on les effectue. Remarquons qu'on utilise ici des numérotations partant de 0 et qu'on écrit \mathfrak{S}_{n+1} comme groupe des permutations des entiers de 0 à n : c'est pour souligner qu'une opérade cyclique est une opérade munie de structures supplémentaires (une extension de l'action de \mathfrak{S}_n sur $\mathcal{O}(n)$ en une action de \mathfrak{S}_{n+1} , des opérations de composition additionnelles).

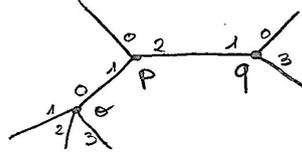


FIGURE 4 – Un arbre représentant $o_0 o_1 (p_2 o_1 q)$, $o \in \mathcal{O}(3)$, $p \in \mathcal{O}(2)$, $q \in \mathcal{O}(2)$

Exemples 3.1. 1. L'opérade \mathcal{Com} munie de l'action triviale de \mathfrak{S}_{n+1} sur $\mathcal{Com}(n)$ et des compositions triviales est cyclique.

2. On peut munir $\mathcal{Ass}(n)$ d'une action de \mathfrak{S}_{n+1} comme suit. Représentons un élément de $\mathcal{Ass}(n)$ par un arbre planaire à un sommet et n feuilles numérotées ; on convient d'assigner à la racine le numéro 0. On fait agir σ sur la numérotation ainsi étendue (l'action étant à droite, i devient $\sigma^{-1}(i)$), puis on choisit la feuille numérotée 0 comme nouvelle racine, en conservant l'ordre cyclique sur les feuilles. Un exemple est traité à la figure 5.

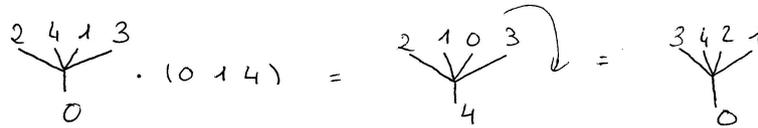


FIGURE 5 – Action d'un élément de S_{4+1} sur un élément de $\mathcal{Ass}(4)$

3. Pour $\mathcal{Lie}(n)$, on part de la représentation d'un élément comme arbre binaire planaire enraciné à n feuilles numérotées, et on procède de manière similaire : on assigne à la racine le numéro 0, puis on renumérote en appliquant σ^{-1} et on désigne la feuille ayant obtenu le numéro 0 comme nouvelle racine. On conserve l'ordre cyclique sur les demi-arêtes incidentes à chaque sommet induit par la planarité. Un exemple est traité à la figure 6. Cette action est bien définie parce qu'elle préserve les sous-

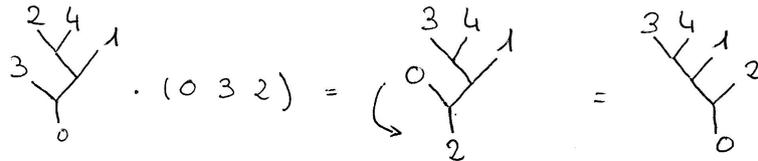


FIGURE 6 – Action d'un élément de S_{4+1} sur un élément de $\mathcal{Lie}(4)$

espaces engendrés par les relations d'antisymétrie et de Jacobi. Il suffit de le vérifier pour les cycles $\tau_2 = (0 1 2)$ et $\tau_3 = (0 1 \dots 3)$ respectivement. L'antisymétrie est claire ; la vérification pour Jacobi est effectuée à la figure 7.

$$\left(\begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ 1 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} 1 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ 3 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right) \cdot \tau_3 = - \left(\begin{array}{c} 3 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ 3 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ 1 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} 3 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 3 \end{array} \right)$$

FIGURE 7 – Invariance par τ_3 du \mathfrak{G} -module des relations de Jacobi

3.2 Complexes de graphes

Soit \mathcal{O} une opérade cyclique. Nous pouvons construire un complexe de graphes associé à \mathcal{O} comme suit. Soit \mathcal{G} un graphe. Considérons un sommet de valence n de \mathcal{G} . Un *étiquetage* par \mathcal{O} de ce sommet est une classe d'équivalence

- d'un élément de $\mathcal{O}(n-1)$
- et d'une numérotation de 0 à $n-1$ des arêtes incidentes à ce sommet

sous l'action simultanée de \mathfrak{S}_n . Un *\mathcal{O} -graphe* est un graphe (connexe, à sommets tous de valence ≥ 2) dont les sommets sont ainsi étiquetés par \mathcal{O} .

Exemples 3.2. – Un étiquetage par l'opérade *Com* ne contient aucune information.

Un *Com*-graphe est donc un graphe sans structure supplémentaire.

- En utilisant les descriptions de l'opérade *Ass* et de sa structure cyclique données plus haut, on voit qu'un *Ass*-graphe est précisément un graphe en rubans : l'étiquetage d'un sommet se réduit à un ordre cyclique sur les arêtes incidentes à ce sommet.
- Un *Lie*-graphe est un graphe comportant, en chaque sommet, un « schéma de raccordement » des arêtes incidentes à ce sommet sous la forme d'un arbre binaire planaire.

On peut définir une notion d'orientation pour les \mathcal{O} -graphes, que nous n'explicitons pas ici (voir [CV03, section 2]). Le fait que \mathcal{O} soit une opérade cyclique dit précisément que l'on peut définir une opération de contraction d'arête pour les \mathcal{O} -graphes. On peut alors, comme dans l'introduction, introduire un complexe de chaînes $\mathcal{O}\mathcal{G}_\bullet$, où $\mathcal{O}\mathcal{G}_k$ est le \mathbf{Q} -espace vectoriel de base les classes d'isomorphisme de \mathcal{O} -graphes orientés à k sommets et où la différentielle est définie, pour un \mathcal{O} -graphe orienté, comme la somme des résultats de toutes les contractions possibles d'une arête.

3.3 Formes bilinéaires invariantes

Soit V un espace vectoriel muni d'une forme bilinéaire non dégénérée $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Cette forme permet une identification

$$\mathrm{Hom}(V^{\otimes n}, V) \cong \mathrm{Hom}(V^{\otimes n+1}, \mathbf{K})$$

qui munit l'espace $\mathrm{End}(V)(n)$ d'une action de \mathfrak{S}_{n+1} comme en (2) page 5 et fait de $\mathrm{End}(V)$ une opérade cyclique.

Supposons maintenant que V soit muni d'une structure de \mathcal{O} -algèbre, où \mathcal{O} est une opérade cyclique. La forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est dite *invariante* eu égard à la structure de \mathcal{O} -algèbre de V si le morphisme d'opérades $\phi : \mathcal{O} \rightarrow \mathrm{End}(V)$ caractérisant cette structure est un morphisme d'opérades cycliques. Plus explicitement, cela revient à dire que pour tous $n \geq 0$, $o \in \mathcal{O}(n)$ et $x_0, \dots, x_n \in A$, on a

$$\langle (\phi(o \cdot \tau_n))(x_0, \dots, x_{n-1}), x_n \rangle = \langle \phi(o)(x_1, \dots, x_n), x_0 \rangle, \quad (4)$$

où τ_n est le cycle $(0 \ 1 \ \dots \ n) \in \mathfrak{S}_{n+1}$. Pour $o = \mathrm{Id} \in \mathcal{O}(1)$, on obtient que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ doit être symétrique. Les conditions restantes se réduisent, dans les cas *Ass* et *Lie*, aux formules données dans l'introduction.

4 Des algèbres aux graphes

La construction d'une classe dans l'homologie du complexe de \mathcal{O} -graphes à partir d'une \mathcal{O}^1 -algèbre A munie d'une forme bilinéaire invariante procède en deux étapes principales. La première est algébrique ; elle permet, par le biais de la « géométrie symplectique non commutative » de Kontsevich, d'encoder la structure de A en un élément d'une certaine \mathcal{O} -algèbre. La seconde, plus combinatoire, utilise cet élément pour calculer le coefficient à attribuer à chaque \mathcal{O} -graphe dans le cycle à produire. Ces deux étapes sont techniquement complexes et nous ne pouvons donner ici plus de détails ; nous renvoyons à [HL08] pour un traitement très soigneux dans le cas associatif, et à [Mah] ainsi qu'à notre mémoire de M2 pour le cas général.

Nous souhaitons cependant illustrer certaines des idées principales dans le cas associatif, qui est particulièrement simple du fait que l'opérade $\mathcal{A}ss$ est auto-duale.

Soit A une algèbre associative de base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$, munie d'une forme invariante non dégénérée $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On note

$$c_{ijk} = \langle e_i \cdot e_j, e_k \rangle$$

les constantes de structure de l'algèbre A . Remarquons que par invariance de $\langle \cdot, \cdot \rangle$, ces constantes sont inchangées si l'on permute cycliquement les indices : on a $c_{ijk} = c_{jki}$.

La chaîne que nous voulons construire dans le complexe de graphes en rubans est déterminée par le coefficient dont est affecté chaque graphe. Tout d'abord, tous les graphes possédant un sommet de valence différente de 3 seront affectés du coefficient 0⁴. Soit maintenant un graphe en rubans trivalent. Chaque étiquetage de ses arêtes par des entiers entre 1 et n (taille de la base de A), comme à la figure 8, détermine un produit de constantes de structure comme suit : on fait le produit, pour chaque sommet, de c_{ijk} , où

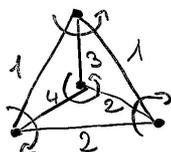


FIGURE 8 – Un graphe en rubans trivalent, aux arêtes étiquetées par des entiers entre 1 et n

i, j, k sont les étiquettes des arêtes incidentes au sommet, dans l'ordre cyclique déterminé par la structure de graphe en rubans. Dans le cas illustré figure 8, on obtient

$$\pm c_{131}c_{142}c_{423}c_{221}$$

le signe étant lié à des questions d'orientation que nous avons passées sous silence. Par invariance cyclique des constantes de structure, ce produit ne dépend que du graphe et de l'étiquetage. Le coefficient affecté au graphe trivalent de la figure 8 est alors la somme de ces produits pour tous les étiquetages possibles des arêtes, en d'autres termes

$$\sum_{1 \leq a, b, c, d, e, f \leq n} \pm c_{abd}c_{acf}c_{ceb}c_{fed},$$

et on peut procéder de même pour tout graphe trivalent en rubans.

4. Le cadre naturel de la construction est en fait celui des algèbres associatives à *homotopie près* (algèbres A_∞) : la chaîne dans le complexe de graphes obtenu à partir d'une telle algèbre comporte potentiellement des graphes ayant des sommets de valence quelconque. Une algèbre strictement associative peut être vue comme un cas particulier d'algèbre A_∞ dont toute la structure d'ordre supérieur est triviale, ce qui explique que la chaîne obtenue semble dégénérée.

Références

- [CV03] James CONANT et Karen VOGTMANN : On a theorem of Kontsevich. *Algebraic and Geometric Topology*, 3:1167–1224, 2003.
- [GK94] Victor GINZBURG et Mikhail KAPRANOV : Koszul duality for operads. *Duke Math. J.*, 76(1):203–272, 1994.
- [GK95] Ezra GETZLER et Mikhail M. KAPRANOV : Cyclic operads and cyclic homology. In S.-T. YAU, éditeur : *Geometry, Topology, and Physics for Raoul Bott*, pages 167–201, Cambridge, États-Unis, 1995. International Press.
- [HL08] Alastair HAMILTON et Andrey LAZAREV : Characteristic classes of A_∞ -algebras. *J. Homotopy Relat. Struct.*, 3(1):65–111, 2008.
- [HZ86] J. HARER et D. ZAGIER : The Euler characteristic of the moduli space of curves. *Invent. Math.*, 85(3):457–485, 1986.
- [Kon92] Maxim KONTSEVICH : Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix Airy function. *Comm. Math. Phys.*, 147(1):1–23, 1992.
- [Kon93] Maxim KONTSEVICH : Formal (non)-commutative symplectic geometry. In *The Gel'fand Mathematical Seminars, 1990–1992*, pages 173–187, Boston, 1993. Birkhäuser.
- [Kon94] Maxim KONTSEVICH : Feynman diagrams and low-dimensional topology. In *First European Congress in Mathematics, II*, volume 120 de *Progress in Mathematics*, pages 97–121, Bâle, 1994. Birkhäuser.
- [Lod96] Jean-Louis LODAY : La renaissance des opérades. *Astérisque*, (237):Exp. No. 792, 3, 47–74, 1996. Séminaire Bourbaki, Vol. 1994/95.
- [LV12] Jean-Louis LODAY et Bruno VALLETTE : *Algebraic Operads*, volume 346 de *Grundlehren Math. Wiss.* Springer-Verlag, Heidelberg, 2012.
- [Mah] Swapneel MAHAJAN : Symplectic operad geometry and graph homology. [arXiv:math/0211464v1](https://arxiv.org/abs/math/0211464v1) [math.QA].
- [May72] J. P. MAY : *The geometry of iterated loop spaces*. Springer-Verlag, Berlin, 1972. Lectures Notes in Mathematics, Vol. 271.
- [MSS02] Martin MARKL, Steve SHNIDER et Jim STASHEFF : *Operads in algebra, topology and physics*, volume 96 de *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
- [Pen88] R. C. PENNER : Perturbative series and the moduli space of Riemann surfaces. *J. Differential Geom.*, 27(1):35–53, 1988.