Théorie de l'indices et applications

Ye-Ping ZHANG

Introduction

L'importance de la théorie de l'indice est qu'elle unifie plusieurs résultats géométriques qui sont de naissance très différents. On considère les trois théorèmes suivants.

Théorème 0.1 (Gauß-Bonnet-Chern). *Soit M une variété différentielle compacte orientée de dimension n, alors*

$$\chi(M) = (2\pi)^{n/2} \int_M \mathrm{Pf}(-R^{\mathrm{T}M}) \ ,$$

où $\chi(M)$ est la caractérisitique d'Euler-Poincaré, Pf *est le Pfaffian et R^{TM} est la courbure du fibré tangent.*

Théorème 0.2 (signature de Hirzebruch). *Soit M une variété différentielle compacte orientée de dimension $n = 4k$, alors*

$$\sigma(M) = (i\pi)^{-n/2} \int_M \mathrm{L}(M) \ ,$$

où $\sigma(M)$ est la signature de la forme bilinéaire symétrique sur $H^{2k}(M)$: $(\alpha, \beta) \mapsto \int_M \alpha \wedge \beta$, $\mathrm{L}(M) = \det^{1/2}\left(\frac{R^{\mathrm{T}M}/2}{\tanh(R^{\mathrm{T}M}/2)}\right)$.

Théorème 0.3 (Riemann-Roch-Hirzebruch). *Soit M une variété kählerienne, alors*

$$\chi(M) = \int_M \mathrm{Td}(M) \ ,$$

où $\chi(M)$ est la caractéristique d'Euler associée à la cohomologie de Dolbeault, $\mathrm{Td}(M) = \det\left(\frac{e^{R^{\mathrm{T}^{(1,0)}M}}}{e^{R^{\mathrm{T}^{(1,0)}M}}-1}\right)$.

Ces trois théorèmes ont plusières caractéristiques communes : ils considèrent essentiellement des variétés différentielles compactes de dimension paire [1] ; le coté à gauche est une indice [2] ; le coté à droite est l'integration d'un polynôme d'une courbure.

Ces trois théorèmes sont unifiés par le théorème de Atiyah-Singer qui est le départ de la théorie de l'indice.

Dans ce petit article, on expliquera le théorème de Atiyah-Singer et comme un exemple on montera qu'il implique le théorème de Gauß-Bonnet-Chern, en fin, on dit quelques mots concernant mon sujet de thèse et en particulier sa relation avec le théorème de Atiyah-Singer.

1. Au cas impaire, le théorème de Gauß-Bonnet-Chern est trivial.
2. L'indice d'un espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $V = V^+ + V^-$ de dimension finie égale $\dim V^+ - \dim V^-$. Dans le théorème de Gauß-Bonnet-Chern et de Riemann-Roch-Hirzebruch $V^\pm = H^{\mathrm{paire/impaire}}(M)$ et dans le thèorème de signature de Hirzebruch $V^\pm$ est donné par un sous-espace positif/negatif maximal de $H^{2k}(M)$.

1 Connexion, courbure et classe caractéristique

Cette partie donne une introduction courte de la théorie de Chern-Weil qui est essentielle pour comprendre le coté à droite de la formule de Atiyah-Singer. On peut trouver les démonstrations complètes dans le chapitre 1.4 [BGV].

Soient M une variété différentielle compacte orientée, $E \to M$ un fibré vectoriel complexe. On note $\Omega(M,E)$ l'espace des formes différentielles à valeurs dans E, autrement dit $\Omega(M,E) = \Gamma(M, \wedge \mathrm{T}^*M \otimes E)$.

Définition 1.1. Une connexion de E est une application $\mathbb{C}$-linéaire

$$\nabla^E : \Gamma(M,E) \to \Omega^1(M,E)$$

vérifiant la loi de Leibniz

$$\nabla^E(fX) = (df)X + f\,\nabla^E(X)$$

pour tout $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $X \in \Gamma(M,E)$.

On note par la suite $\nabla^E_X = i_X \nabla^E$. [3]

L'action de ∇^E s'étend à $\Omega(M,E)$ par

$$\begin{aligned}\nabla^E : \Omega^k(M,E) &\to \Omega^{k+1}(M,E)\\ \omega X &\mapsto (d\omega)X + (-1)^k \omega \wedge \nabla^E X\end{aligned}$$

où $\omega \in \Omega^k(M)$, $X \in \Gamma(M,E)$.

Définition 1.2. Une variété riemannienne M est une variété munie d'une section $g \in \Gamma(M, \mathrm{T}^*M \otimes \mathrm{T}^*M)$ telle que g_x est symétrique et positive pour tout $x \in M$. On note souvant $g(\cdot,\cdot) = \langle \cdot,\cdot \rangle_{\mathrm{T}M}$.

Soit M une variété riemannienne et $E = \mathrm{T}M \otimes \mathbb{C}$. Il existe alors une connexion naturelle $\nabla^{\mathrm{T}M}$, appelée la connexion de Levi-Civita. C'est l'unique connexion pour tous $X, Y, Z \in \Gamma(M, \mathrm{T}M)$ vérifiant

$$\begin{aligned}Z\langle X,Y\rangle &= \langle \nabla^{\mathrm{T}M}_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla^{\mathrm{T}M}_Z Y\rangle\ ,\\ [X,Y] &= \nabla^{\mathrm{T}M}_X Y - \nabla^{\mathrm{T}M}_Y X\ ,\end{aligned}$$

où $[\cdot,\cdot]$ est le crochet de Lie, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ la métrique hermitienne sur $\mathrm{T}M \otimes \mathbb{C}$ induite par $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{T}M}$. [4]

On peut construire le dual, le produit direct et le tenseur des connexions de la manière suivante.

Définition 1.3. Soient $E, F \to M$ deux fibrés vectoriels munis des connexions ∇^E, ∇^F.

On définit

$$\begin{aligned}\nabla^{E\oplus F}_X &: (u,v) \mapsto (\nabla^E_X u, \nabla^F_X v)\ ,\\ \nabla^{E\otimes F}_X &: u \otimes v \mapsto \nabla^E_X u \otimes v + u \otimes \nabla^F_X v\ ,\end{aligned}$$

où $X \in \Gamma(M, \mathrm{T}M)$, $u \in \Gamma(M,E)$, $v \in \Gamma(M,F)$.

Soit E^* le dual de E, ∇^{E^*} est déterminée par

$$X(f,s) = (\nabla^{E^*}_X f, s) + (f, \nabla^E_X s)\ ,$$

où $X \in \Gamma(M, \mathrm{T}M)$, $f \in \Gamma(M, E^*)$, $s \in \Gamma(M,E)$, $(\cdot,\cdot)$ est le crochet de dualité $E^* \times E \to \mathbb{C}$.

Soit $\wedge E$ le tenseur extérieur de E, $\nabla^{\wedge E}$ est déterminée par

$$\nabla^{\wedge E}_X u_1 \wedge \cdots \wedge u_r = \sum_{i=1}^r u_1 \wedge \cdots \wedge \nabla^E_X u_i \wedge \cdots \wedge u_r\ .$$

3. On note $i_X : \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}$, $(i_X\omega)(v_1, \cdots, v_{k-1}) = \omega(X, v_1, \cdots, v_{k-1})$

4. Comme on ne considère que les fibrés vectoriels complexes, chaque fois on dit l'espace tangent d'une variété réelle M, c'est-à-dire toujours $\mathrm{T}M \otimes \mathbb{C}$. Et on prend toujours la métrique hermitienne induite par la métrique riemannienne.

Définition 1.4. La courbure R^E associée à la connexion ∇^E est donnée par

$$R^E = (\nabla^E)^2$$

qui est en effet un élément de $\Omega^2(M, \mathrm{End}(E))$. Si $R^E = 0$, on dit que ∇^E est une connexion plate.

On vérifie maintenant que R^E soit bien un élément de $\Omega^2(M, \mathrm{End}(E))$. Soit $\omega \in \Omega^k(M)$, $s \in \Omega(M, E)$, alors

$$\begin{aligned} R^E(\omega \wedge s) &= (\nabla^E)^2(\omega \wedge s) \\ &= \nabla^E((d\omega) \wedge s + (-1)^k \omega \wedge \nabla^E s) \\ &= (d^2\omega) \wedge s + (-1)^{k+1}\omega \wedge \nabla^E s + (-1)^k (d\omega) \wedge \nabla^E s + (-1)^{2k} \omega \wedge (\nabla^E)^2 s \\ &= \omega \wedge R^E s \ . \end{aligned}$$

En appliquant le lemme de tensorité [5], on voit bien que $R^E \in \Omega^2(M, \mathrm{End}(E))$.

En particulier, si $X, Y \in \Gamma(M, \mathrm{T}M)$, on a

$$R^E(X, Y) = \nabla^E_X \nabla^E_Y - \nabla^E_Y \nabla^E_X - \nabla^E_{[X,Y]} \ .$$

Si E est un fibré vectoriel trivial sur R^n, la dérivée usuelle est une connexion $\nabla^E_{\partial_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}$ qui est plate. Récirproquement, si $R^E \neq 0$ sur un ouvert $U \subseteq M$, on ne peut pas trouver une trivialisation de E sur U dans laquelle ∇^E est la dérivée usuelle associée à la trivialisation. Donc R^E est un objet géométrique qui mesure l'obstruction de trivialiser la connexion ∇^E localement.

Remarque 1.5. Si la connexion ∇^E est plate, on a $(\nabla^E)^2 - 0$. On obtient un complexe

$$0 \longrightarrow \Omega^0(M, E) \xrightarrow{\nabla^E} \Omega^1(M, E) \xrightarrow{\nabla^E} \cdots \xrightarrow{\nabla^E} \Omega^n(M, E) \longrightarrow 0$$

La cohomologie associée est notée $H^{\cdot}(M, E)$, appelée la cohomologie de deRham à valuers dans E.

Un autre cas où on peut considérer la cohomologie à valeurs dans un fibré vectoriel est le cas où M est une variété complexe et E est un fibré holomorphe. On peut définir la cohomologie de Dolbeault à valuers dans E. On y reviendra dans l'introduction du sujet de thèse.

On passe à la notion de classe caractéristique.

On donne à $\Omega(M, \mathrm{End}(E))$ une structure d'anneau en définissant la multiplication par

$$(\omega A)(\eta B) = (\omega \wedge \eta) AB \ ,$$

où $\omega, \eta \in \Omega(M)$, $A, B \in \Gamma(M, \mathrm{End}(E))$. Si on a $f \in \mathbb{C}[X]$ et $T \in \Omega(M, \mathrm{End}(E))$, $f(T)$ est alors bien défini.

Etant donnée une section de $\mathrm{End}(E)$, on peut considérer sa trace qui est une fonction sur la variété M. La notion de trace s'étend à $\Omega(M, \mathrm{End}(E))$

$$\mathrm{tr} : \omega A \mapsto \omega \ \mathrm{tr}(A)$$

où $\omega \in \Omega(M)$, $A \in \Gamma(M, \mathrm{End}(E))$.

Définition 1.6. Soit $f \in \mathbb{C}[X]$, on note

$$f(E, \nabla^E) = \mathrm{tr}[f(R^E)] \in \Omega(M) \ .$$

5. Soit R un opérateur agissant sur $\Omega(M, E)$. Si R est $\Omega(M)$-linéaire, alors $R \in \Omega(M, \mathrm{End}(E))$.

Théorème 1.7 (Chern-Weil)**.** *La forme $f(E,\nabla^E)$ est fermée. Sa classe de cohomologie de deRham $[f(E,\nabla^E)]$ ne dépend pas du choix de la connexion.*

Donc $[f(E,\nabla^E)]$ est uniquement déterminée par E et f, appelée la classe caractéristique de E associé à f. En particulier $\int f(E,\nabla^E)$ est un nombre uniquement déterminé par E et f, appelé le nombre caractéristique de E associé à f.

Remarque 1.8. Si E admet une connexion plate ∇^E, $f(E,\nabla^E)=0$ pour tout f. Donc toutes les classes caractéristique s'annulent. Mais ceci n'implique pas que E soit trivial. Dans ce cas-là, on a besoin des invariants topologiques plus fins pour décrire E. On y reviendra dans l'introduction du sujet de thèse.

Remarque 1.9. Dans l'application, on écrit très souvant $f(E,\nabla^E)$ avec f une fonction analytique, c'est-à-dire $\mathrm{tr}\Big(\sum_i a_i(R^E)^i\Big)$ si le développement de $f(x)$ est $\sum_i a_i x^i$. Comme $(R^E)^i=0$ pour $i>\dim(M)/2$, la serie converge toujours.

2 Opérateur de Dirac et son indice

Cette partie donne une introduction courte de l'opérateur de Dirac qui est essentielle pour comprendre le coté à gauche de la formule de Atiyah-Singer. On peut trouver les démonstrations complètes dans le chapitre 3 [BGV].

Pour donner une motivation d'introduire le module de Clifford et l'opérateur de Dirac, on considère d'abord un exemple.

Soit M une variété riemannienne compacte orientée munie de la connexion de Levi-Civita $\nabla^{\mathrm{T}M}$. En prenant le dual et tenseur extérieur, on obtient la connexion $\nabla^{\wedge\mathrm{T}^*M}$. On a aussi une métrique sur $\Omega(M)=\Gamma(M,\wedge\mathrm{T}^*M)$

$$\langle u,v\rangle=\int_M\langle u_x,v_x\rangle_{\wedge\mathrm{T}_x^*M}$$

où $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\wedge\mathrm{T}_x^*M}$ est induit par $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{T}_xM}$, c'est-à-dire, si $(e_1,\cdots,e_n)$ une base orthonormée de T_xM, $(e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_r})_{1\le i_1<\cdots<i_r\le n}$ est une base orthonormée de $\wedge\mathrm{T}_x^*M$.

L'opérateur d agit sur $\Omega(M)$ en envoyant $\Omega^k(M)$ dans $\Omega^{k+1}(M)$. On note $d^*:\Omega^k(M)\to\Omega^{k-1}(M)$ l'adjoint de d.

Théorème 2.1 (Hodge)**.** *Soit $D=d+d^*:\Omega(M)\to\Omega(M)$. Alors $ker(D)\subset ker(d)$, de plus, $ker(D)\hookrightarrow ker(d)$ induit un isomorphisme $ker(D)\simeq H(M)$.*

Démonstration : Comme $\langle du,d^*v\rangle=\langle d^2u,v\rangle=0$, l'image de d et l'image de d^* sont orthogonales. Donc $\ker(D)=\ker(d)\cap\ker(d^*)$. Par définition $u\in\ker(d^*)$ si et seulement si $\langle d^*u,v\rangle=\langle u,dv\rangle=0$ pour tout v. Alors $\ker(d^*)=\mathrm{im}(d)^\perp$. Donc $\ker(D)=\ker(d)\cap\mathrm{im}(d)^\perp\simeq H(M)$. □

On veut une formule plus précise de D.

Lemme 2.2. *Soit $(e_i)_{1\le i\le n}$ une base orthonormée locale de TM et $(e^i)_{1\le i\le n}$ la base duale. On a*

$$d=\sum_{i=1}^n e^i\wedge\nabla_{e_i}^{\wedge T^*M}$$

$$d^*=\sum_{i=1}^n -i_{e_i}\nabla_{e_i}^{\wedge T^*M}\ .$$

Démonstration : Soit $x_0 \in M$. On prend la carte exponentielle au point x_0. Dans cette carte, $\nabla_{e_i}^{\wedge \mathrm{T}^*M}$ n'est autre que ∂_i au point x_0. On a $d = \Sigma_{i=1}^n e^i \wedge \partial_i$ au point x_0. Comme x_0 est un point quelconque, on obtient la première formule. En prenant le dual, on a la deuxième. □

Grâce à ce lemme, on a explicitement $D = \Sigma_{i=1}^n (e^i \wedge - i_{e_i}) \nabla_{e_i}^{\wedge \mathrm{T}^*M}$. On définit

$$c(X) = X^* \wedge - i_X \in \mathrm{End}(\wedge \mathrm{T}^*M)$$

où $X \in \Gamma(M, \mathrm{T}M)$. Alors on peut réécrire

$$D = \sum_{i=1}^{n} c(e_i) \nabla_{e_i}^{\wedge \mathrm{T}^*M} \ .$$

L'action c , qui s'apparaît naturellement dans le calcul de D, est appelée action de Clifford. Elle vérifie les propriétés suivantes

$$c(X)c(Y) + c(Y)c(X) = -2\langle X, Y\rangle \ ,$$
$$[\nabla_X^{\wedge \mathrm{T}^*M}, c(Y)] = c(\nabla_X^{\mathrm{T}M} Y) \ .$$

Pour les démontrer, il suffit de prendre une carte exponentielle, et de faire les calculs explicitement.

Définition 2.3. Les $c(X)$ engendent une sous-algèbre de $\mathrm{End}(\wedge \mathrm{T}^*M)$, appelée algèbre de Clifford ; on la note $\mathrm{C}(M)$. On identifie $\mathrm{T}M$ à un sous-fibré vectoriel de $C(M)$ par $X \mapsto c(X)$.

On peut désormais oublier le fait que $C(M)$ est une sous-algèbre de $\mathrm{End}(\wedge \mathrm{T}^*M)$ et la regarder comme une algèbre abstracte.

Définition 2.4. Soit E un fibré vectoriel complexe hermitien $\mathbb{Z}_2$-gradué [6] [7] de M muni d'une action de $C(M)$. On dit que E est une module de Clifford si l'action de $c(X)$ est anti-adjointe et impaire [8]. Une connexion hermitienne ∇^E est une connexion de Clifford si elle préserve la graduation et si elle vérifie $[\nabla_X^E, c(Y)] = c(\nabla_X^{\mathrm{T}M} Y)$ pour tous $X, Y \in \Gamma(M, \mathrm{T}M)$.

On a vu que $E = \wedge \mathrm{T}^*M$ avec la graduation $\wedge^{\text{paire/impaire}}\mathrm{T}^*M$est un module de Clifford, $\nabla^{\wedge \mathrm{T}^*M}$ est une connexion de Clifford.

Définition 2.5. Soit $E \to M$ un module de Clifford avec ∇^E une connexion de Clifford. L'opérateur de Dirac est donné par

$$D = \sum_{i=1}^{n} c(e_i) \nabla_{e_i}^E$$

où $(e_i)_i$ est une base orthonormée locale de $\mathrm{T}M$.

Proposition 2.6. *L'opérateur D est auto-adjoint.*

On note $D^\pm = D|_{E^\pm} : \Gamma(M, E^\pm) \to \Gamma(M, E^\mp)$. Alors on a la décomposition $\ker(D) = \ker(D^+) \oplus \ker(D^-)$. Comme D est auto-adjoint, on a $D^- = (D^+)^*$ et $\ker(D^-) = \mathrm{coker}(D^+)$.

Définition 2.7. Soit L un opérateur $\mathbb{C}$-linéaire dont le noyau et le conoyau sont de dimension finie. On note $\mathrm{ind}(L) = \dim\ker(L) - \dim\mathrm{coker}(L)$.

On a par la remarque précédante

$$\mathrm{ind}(D^+) = \dim\ker(D^+) - \dim\ker(D^-).$$

Dans le cadre de l'exemple, on a vu : $D = d + d^*$ est un opérateur de Dirac, $\ker(D^\pm) = H^{\text{paire/impaire}}(M)$, donc

$$\mathrm{ind}(D^+) = \chi(M) \ .$$

6. Dans les livres de géométrie, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est souvant noté $\mathbb{Z}_2$.
7. C'est-à-dire que E est muni d'une décomposition orthogonale $E = E^+ \oplus E^-$.
8. Elle échange E^+ et E^-.

3 Théorème de Atiyah-Singer

On vient de remarquer que la caractéristique d'Euler-Poincaré d'une variété riemannienne compacte orientée peut être vue comme l'indice de l'opérateur de Dirac $d + d^*$. En effet, avec le module de Clifford bien choisi, l'indice de l'opérateur de Dirac peut nous donner plusieurs invariants topologiques.

Mais la construction d'un opérateur de Dirac demande toujours une structure riemannienne sur la variété et une connexion sur le fibré vectoriel. Il n'y a a priori aucune raison de penser que $\mathrm{ind}(D^+)$ est un invariant topologique.

En effet, l'indice de l'opérateur de Dirac est un nombre caractéristique de $\mathrm{T}M$ et E qui est donné par le théorème de Atiyah-Singer.

Lemme 3.1. *Soit R^E la courbure de E, il exite une décomposition unique*

$$R^E = R^S + R^{E/S}$$

vérifiant $R^S \in \Omega^2(M, C(M)) \subseteq \Omega^2(M, \mathrm{End}(E))$, $R^{E/S} \in \Omega^2(M, \mathrm{End}_{C(M)}(E))$ [9]*.*

Démonstration : Soit $X \in \Gamma(M, \mathrm{T}M)$ quelconque, comme $R^E = (\nabla^E)^2$, on a

$$\begin{aligned}
[R^E, c(X)] &= [(\nabla^E)^2, c(X)] \\
&= [\nabla^E, [\nabla^E, c(X)]] \\
&= [\nabla^E, c(\nabla^{\mathrm{T}M} X)] \\
&= c((\nabla^{\mathrm{T}M})^2 X) \\
&= c(R^{\mathrm{T}M} X) \ .
\end{aligned}$$

On prend

$$R^S = \frac{1}{4} \sum_{ij} \langle R^{\mathrm{T}M} e_i, e_j \rangle c(e_i) c(e_j) \ .$$

Alors on obtient

$$[R^S, c(X)] = c(R^{\mathrm{T}M} X) \ .$$

Donc $R^{E/S} = R^E - R^S$ commute avec $c(X)$. □

Théorème 3.2 (Atiyah-Singer)**.** *Soient M une variété riemannienne compacte orientée de dimension $n = 2k$, $E \to M$ un module de Clifford muni d'une connexion de Clifford ∇^E et D l'opérateur de Dirac associé, alors*

$$\mathrm{ind}(D^+) = (2\pi i)^{-n/2} \int_M \hat{\mathrm{A}}(M) \mathrm{ch}(E/S)$$

où

$$\begin{aligned}
\hat{\mathrm{A}}(M) &= \det{}^{1/2}\Big(\frac{R^{\mathrm{T}M}/2}{\sinh(R^{\mathrm{T}M}/2)}\Big) \\
\mathrm{ch}(E/S) &= 2^{-n/2} \mathrm{Str}_E(\Gamma e^{-R^{E/S}}) \ .
\end{aligned}$$

avec $\Gamma = i^{n/2} c(e_1) \cdots c(e_n)$ et $\mathrm{Str} = \mathrm{tr}|_{E^+} - \mathrm{tr}|_{E^-}$.

9. Pour instant, on voit R^S juste comme une notation indicaquant la partie de R^E dans $C(M)$ et $R^{E/S}$ la partie de R^E commutant avec $C(M)$.

Remarque 3.3. En effet, il y a une explication géométrique de la décomposition $R^E = R^S + R^{E/S}$. Localement, il y a une construction canonique d'un module de Clifford S, appelé spineur (chapitre 3.2 [BGV]), muni d'une connexion de Clifford ∇^S. Tout module de Cliffor E est de la forme $E = S \otimes W$ et $C(M)$ agit sur $S \otimes W$ en agissant sur la composante de S. De plus, pour toute connexion de Clifford ∇^E, il existe ∇^W une connexion de W telle que ∇^E est induite par ∇^S et ∇^W. Avec ce point de vue, la décomposition $R^E = R^S + R^{E/S}$ a bien un sens géométrique : R^S est la courbure de S, $R^{E/S}$ est la courbure de W. Comme $C(M)$ n'agit que sur S, il est bien évidant que $R^{E/S}$ commute avec $C(M)$. On a maintenant une intrepretation du terme $\mathrm{ch}(E/S)$ dans la formule de Atiyah-Singer dont la définition origianle est assez compliquée : c'est juste $\mathrm{ch}(W) = \mathrm{tr}_W(e^{-R^W})$.

4 Quelques applications

On revient à l'exemple $E = \wedge \mathrm{T}^*M$, $D = d + d^*$. Le théorème de Atiyah-Singer, couplé à la formule $\chi(M) = \mathrm{ind}(D^+)$, fournit une égalité que l'on va expliquer. On montera que cette égalité est exactement la formule de Gauß-Bonnet-Chern. Pour cela, il suffit de calculer $\mathrm{ch}(E/S)$.

On a

$$R^{\wedge \mathrm{T}^*M} = \sum_{ij} \langle R^{\mathrm{T}M} e_i, e_j \rangle e^j \wedge i_{e_i} \ .$$

On note $c^i = e^i \wedge - i_{e_i}$, $b^i = e^i \wedge + i_{e_i}$. On a

$$\begin{aligned} c^i b^j + b^j c^i &= 0 \ , \\ b^i b^j + b^j b^i &= 2\delta_{ij} \ , \\ c^i c^j + c^j c^i &= -2\delta_{ij} \ . \end{aligned}$$

Et on note $R_{ij} = \langle R^{\mathrm{T}M} e_i, e_j \rangle$ pour simplifier les notations. Alors

$$\begin{aligned} R^{\wedge \mathrm{T}^*M} &= \frac{1}{4} \sum_{ij} R_{ij} (c^j + b^j)(b^i - c^i) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{ij} R_{ij} (c^i c^j - b^i b^j) \ . \end{aligned}$$

Les $b^i b^j \in \mathrm{End}(\wedge \mathrm{T}^*M)$ commutent avec $C(M)$, donc

$$R^{E/S} = -\frac{1}{4} \sum_{ij} R_{ij} b^i b^j \ .$$

Lemme 4.1. *Soit $a = \sum_{i<j} a_{ij} dx_i dx_j$ une 2-forme, A la matrice anti-symétrique associée. On note $b(a) = \sum_{i<j} a_{ij} b^i b^j$. Alors on a*

$$(-2i)^{-n/2} \mathrm{Str}(c^1 \cdots c^n e^{b(a)/4}) = i^{n/2} \mathrm{det}^{1/2}\left(\frac{\sinh(A/2)}{A/2}\right) \mathrm{Pf}(-a) \ .$$

Démonstration : Avec des coordonnées bien choisies, on peut supposer $a = \sum_{1 \le i \le n/2} a_j dx_{2i-1} dx_{2i}$. Comme toutes les fonctions dans la fomule sont multiplicatives pour le produit tensoriel, il suffit de considérer le cas $n = 2$. Soit $a = 4\theta dx_1 dx_2$. Notant que $(b^1 b^2)^2 = -1$, on a

$$\begin{aligned} e^{b(a)/4} &= 1 + \frac{1}{1!}\theta(b^1 b^2) + \frac{1}{2!}\theta^2 (b^1 b^2)^2 + \frac{1}{3!}\theta^3 (b^1 b^2)^3 + \cdots \\ &= \cos(\theta) + \sin(\theta) b^1 b^2 \ . \end{aligned}$$

Puisque $\mathrm{Str}(c^1c^2) = 0$ et $\mathrm{Str}(c^1c^2b^1b^2) = -4$, on a

$$\mathrm{Str}(c^1 \cdots c^n e^{b(a)}) = -4\sin(\theta)\ .$$

Les valeurs propres de A sont $\pm 2i\theta$, alors

$$\det{}^{1/2}\big(\frac{\sinh(A/2)}{A/2}\big) = \Big(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i\theta}\frac{e^{-i\theta} - e^{i\theta}}{-2i\theta}\Big)^{1/2} = \theta^{-1}\sin(\theta)\ .$$

De plus

$$\mathrm{Pf}(-a) = -2\theta\ .$$

Ceci termine la démonstration. $\square$

Toutes les fonctions dans le lemme au-dessus sont des fontions analytiques des variables a_{ij}, donc on peut voir ce résultat comme une égalité dans $\mathbb{C}[[a_{ij}]]$. On peut donc évaluer les a_{ij} par n'import quel anneau commutatif, en particulier, l'anneau des formes différentielles de degré paire. En prenant $a_{ij} = R_{ij}$, on a

$$\hat{\mathrm{A}}(M)\mathrm{ch}(E/S) = i^{n/2}\mathrm{Pf}(-R)\ .$$

On a retrouvé le théorème de Gauß-Bonnet-Chern.

On peut aussi faire des calculs similaires et montrer les théorèmes de signature de Hirzebruch et de Riemann-Roch-Hirzebruch comme des conséquences du théorème de Atiyah-Singer. Les détailles des calculs peuvent être trouvées dans le chapitre 4.1 [BGV].

5 Introduction au sujet de thèse

Références

[BGV] N. Berline, E. Getzler et M. Vergne : Heat kernels and Dirac operators, Grundlehren Text Editions. Springer-Verlag, Berlin, 2004. MR 2273508.