Autour de la méthode des moments

Romdhane YOUNSI

Introduction au domaine de recherche

*Sous la direction de Guillaume Jamet (SGAM/AI/SAM),
Guillaume Lasserre (SGAM/AI/SAM) et Marc Yor (Paris VI)*

Juin 2007

Avant-propos

Le stage du DEA et du Magistère que j'ai effectué à SGAM (Société Générale Asset Management) sous la direction de Guillaume Jamet (SGAM/AI/SAM), Guillaume Lasserre (SGAM/AI/SAM) et Marc Yor (Paris VI) a été une occasion pour moi de voir des applications concrètes de mes cours de probabilités et processus stochastiques. J'ai choisi dans ce mémoire de mettre l'accent sur une méthode de calcul de prix adaptée à la circonstance. En effet, une partie de mon stage a eu comme objectif de trouver une méthode de pricing des options asiatiques qui pourrait servir dans d'autres occasions. La première partie rappelle le modèle utilisé et pose la problématique. La deuxième partie commence par exposer l'idée de départ de la méthode des moments et discute des aspects théoriques et pratiques de cette méthode.

Contents

1 Cadre général

Une option financière est un produit dérivé qui donne le droit, et bien entendu pas l'obligation, d'acheter (option d'achat, dite call) ou de vendre (option de vente, dite put) une quantité donnée d'un actif financier (action, obligation, devise, matière première ...), appelé actif sous-jacent à un prix précisé à l'avance (appelé strike), à une date d'échéance donnée (appelée date d'exercice ou maturité). Dans le cas particulier d'une option asiatique, la valeur à l'échéance (appelée aussi pay-off) est une fonction de la moyenne du sous-jacent sur la durée de l'option. La théorie financière a établi que le prix des options dépend de divers facteurs (l'écart entre le prix d'exercice et le prix actuel, la volatilité du sous-jacent...). Nous travaillons dans un environnement Black-Scholes sous la probabilité risque neutre Q. On suppose qu'on dispose d'un placement sans risque avec un taux valant r .On dispose aussi d'un actif risqué, dont le processus $(S_t)_{t\geq 0}$ est modélisé comme suit :

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma dW_t \ , \ t \in [0, \infty[$$

où σ est la volatilité de l'actif et $(W_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien. On rappelle l'expression de la solution de cette équation différentielle stochastique :

$$S_t = S_0 exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right)$$

On fixe un temps T représentant la maturité de l'option asiatique et on pose J le processus d'accumulation, i.e $J(T) = \int_0^T S_u du$

Avec ces notations, le pay-off d'une option asiatique de maturité T et de strike fixé K est donc égal à : $\left(\frac{J(T)}{T} - K\right)^+$

Ainsi, le prix d'une telle option est donné par l'actualisation de l'espérance sous la probabilité risque neutre du pay-off

$$C(T,K) = e^{-rT} E^Q \left[\left(\frac{J(T)}{T} - K\right)^+\right]$$

Pour étudier ce prix, on passe par une petite manipulation sur cette espérance en utilisant l'expression de $(S_t)_{t\geq 0}$ et la propriété de scaling du mouvement brownien. On obtient alors :

$$C(T,K) = \frac{e^{-rT}}{T} \frac{4S_0}{\sigma^2} C^{(\nu)}(h,q)$$

avec $C^{(\nu)}(h,q)$ la forme réduite générale définie par :

$$C^{(\nu)}(h,q) := E^Q \left[\left(A_h^{(\nu)} - q\right)^+\right]$$

où $A_h^{(\nu)}$ est le processus d'accumulation standard égal à :

$$A_h^{(\nu)} = \int_0^h e^{2(W_s+\nu s)} ds$$

avec les paramètres de normalisation suivants :

$$\nu = \frac{2r}{\sigma^2} - 1 \ , \ h = \frac{\sigma^2}{4} T \ , \ q = \frac{K}{S_0} h$$

(ν, h et q représentent respectivement la tendance, la maturité et le strike normalisés)

Ainsi, le pricing des options asiatiques se ramène à l'étude de la forme standard $C^{(\nu)}$.

2 Approche des moments

2.1 Contexte

J'ai commencé par trouver, à l'aide des inégalités de Jensen, des bornes faciles à calculer pour les prix recherchés. Ces bornes ont joué tout le long de mes implémentations sur machine le rôle de contrôle des résultats. La première approche que j'ai développée avec mes collaborateurs à SGAM est d'exploiter les travaux de Geman et Yor sur la transformée de Laplace de prix d'options asiatiques. Ce calcul a été intéressant en lui-même car il m'a permis de comprendre le lien entre plusieurs processus stochastiques et de résoudre un problème qui m'a été posé pendant mon stage sur un autre produit financier que je ne présente pas ici. Mais, malheureusement, la formule obtenue à la fin n'est pas simple à inverser et on aboutit à des intégrales oscillantes que je n'ai pas pu dompter à cent pour cent malgré le temps passé à essayer de comprendre leur dynamique. Néanmoins, j'ai pu réaliser un pricer qui marche moyennement bien à cause des temps de calcul relativement grands. Du coup, j'ai dû réfléchir à une autre méthode basée sur les moments.

2.2 Méthode des moments

2.2.1 Principe et idée de départ

Contrairement à ce qu'on peut penser, l'idée de cette méthode n'est pas d'approcher les fonctions à intégrer par des polynômes mais d'approcher la probabilité en question par une suite de probabilités explicites et faciles à magner. Commençons tout d'abord par évoquer le résultat théorique source de cette méthode.

Définition :

Une mesure de probabilité μ sur $\mathbb{R}_+$ muni de la tribu borélienne est dite déterminée par ses moments si c'est la seule mesure de probabilité sur

$(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ à avoir les moments en question, c'est à dire si

$$\left(\forall\, k\, \in \mathbb{N},\ \int_{\mathbb{R}_+} t^k d\mu(t) = \int_{\mathbb{R}_+} t^k d\nu(t)\right) \Rightarrow (\mu = \nu)$$

Le résultat essentiel sur lequel repose la méthode développée, certes d'une manière succincte dans ce mémoire, utilise cette notion d'unicité et exploite les résultats de compacité faible sur les mesures de probabilité.

Théorème de convergence :

Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}_+$ déterminée par ses moments. Soit $(\mu_n)_{n\geq 0}$ une suite de mesures de probabilité sur $\mathbb{R}_+$ ayant des moments de tout ordre et telle que :

$$\forall\, k\, \in \mathbb{N},\ \int_{\mathbb{R}_+} t^k d\mu_n(t) \xrightarrow{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}_+} t^k d\mu(t)$$

Alors :

$$\mu_n \xrightarrow[(etroitement)]{n\to+\infty} \mu$$

L'idée (à creuser éventuellement pour les numériciens) est d'utiliser les moments pour l'approcher à l'aide des polynômes orthogonaux en utilisant par exemple des poids pour pouvoir intégrer des polynômes.

2.2.2 Calcul des moments

Bien entendu, la première étape consiste à calculer les moments de la probabilité en question. Dans notre cas particulier (c'est à dire intégrale à horizon fini), ce calcul est fait par exemple par récurrence et on obtient une formule fermée. Ce calcul s'inscrit dans un résultat général sur les intégrales d'exponentielles de subordinateurs, c'est à dire des processus de Lévy (processus à accroissements indépendants stationnaires isus de zéro) croissants.

Théorème :

Soit $(\zeta_t)_{t\geq 0}$ un subordinateur dont la loi est caractérisée par :

$\mathbb{E}\left[e^{-\lambda\zeta_t}\right] = e^{-t\phi(\lambda)}$ (ϕ est la fonction de Lévy-Khinchin de ce subordinateur). Soit $(I_t)_{t\geq 0}$ le processus d'accumulation de l'inverse de son exponentielle, c'est à dire

$$I_t = \int_0^t exp(-\zeta_u)du$$

Alors :

$$\forall\, k\, \in \mathbb{N}\,,\ \int_0^\infty \mathbb{E}\left[I_t^k\right] e^{-qt}\, dt \ = \ \frac{k!}{q\,(q+\phi(1))\ldots(q+\phi(k))}$$

Preuve :

Nous donnons ici une preuve reposant sur un calcul à horizon infini intervenant par exemple dans les problèmes de ruine puis un couplage avec un temps exponentiel de paramètre q. La formule de changement de variables nous donne :

$$\begin{aligned}
I_\infty^r &= \int_0^\infty r\, exp(-\zeta_s) \left(\int_s^\infty exp(-\zeta_u) du \right)^{r-1} ds \\
&= \int_0^\infty r\, exp(-\zeta_s) \left(\int_0^\infty exp(-\zeta_{v+s}) dv \right)^{r-1} ds \\
&= \int_0^\infty r\, exp(-r\zeta_s) \left(\int_0^\infty exp(-(\zeta_{v+s} - \zeta_s)) dv \right)^{r-1} ds
\end{aligned}$$

Donc, en utilisant le fait que $(\zeta)_{t\geq 0}$ est un processus de Lévy, on aboutit à :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[I_\infty^r\right] &= r \int_0^\infty \mathbb{E}\left[exp(-r\zeta_s)\right] \mathbb{E}\left[\left(\int_0^\infty exp(-(\zeta_{v+s} - \zeta_s)) dv \right)^{r-1} \right] ds \\
&= r \int_0^\infty exp(-s\phi(r)) \mathbb{E}\left[I_\infty^{r-1}\right] ds \\
&= \frac{r}{\phi(r)} \mathbb{E}\left[I_\infty^{r-1}\right]
\end{aligned}$$

Donc, par récurrence, on obtient la formule :

$$\mathbb{E}\left[I_\infty^r\right] = \frac{r!}{\phi(1)\dots\phi(r)}$$

Maintenant, soient q un reél strictement positif et $(N_t)_{t\geq 0}$ un processus de Poisson indépendant de $(\zeta_t)_{t\geq 0}$ de paramètre q. On note $\left(\zeta_t^{(a)}\right)_{t\geq 0}$ le processus $\zeta_t^{(a)} = \zeta_t + aN_t$

On a : $\phi^{(a)}(p) = \phi(p) + q\,(1 - exp(-ap))$

On fait tendre a vers l'infini, $I_\infty^{(a)} \downarrow I_{T_q}$ où T_q est un temps exponentielle de paramètre q indépendant du processus de Lévy et $\phi^{(a)}(p)$ tend vers $\phi(p) + q$. Donc, par convergence monotone :

$$\mathbb{E}\left[I_{T_q}^k\right] = \frac{k!}{(q+\phi(1))\dots(q+\phi(k))}$$

Or, par indépendance du temps exponentiel T_q par rapport au subordinateur

$$\mathbb{E}\left[I_{T_q}^k\right] = q \int_0^\infty \mathbb{E}\left[{I_t}^k\right] e^{-qt}\, dt$$

ce qui achève la preuve .

□

2.2.3 La question de la détermination

L'autre étape essentielle est de savoir si la loi de probabilité en question est déterminée par ses moments. Dans la littérature, il existe deux critères principaux pour savoir si des moments déterminent une probabilité : le critère de Fourier et celui de Carleman.

Le critère de Fourier est un critère d'analycité de la transformée de Fourier.

Critère de Fourier :

Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}_+$ possédant des moments de tout ordre $\left(\gamma_k = \int_{\mathbb{R}_+} x^k d\mu(x)\right)_{k\geq 0}$ tel que la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\gamma_k}{k!} r^k$ ait un rayon de convergence non nul. Alors μ est déterminée par ses moments.

Par contre, le critère de Carleman est un critère de type positivité de forme quadratique. (cf [7])

Critère de Carleman :

Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}_+$ possédant des moments de tout ordre $\left(\gamma_k = \int_{\mathbb{R}_+} x^k d\mu(x)\right)_{k\geq 0}$

Si $\sum_{k=0}^{+\infty} (\gamma_{2k})^{-\frac{1}{2k}} = \infty$, alors μ est déterminée par ses moments.

Cependant, on sait depuis les travaux de Stieltjes que la log-normale (c'est à dire $exp(\mathcal{N})$ avec $\mathcal{N}$ une variable gaussienne centrée de variance 1) n'est pas déterminée par ses moments. En effet, la loi log-normale a pour densité :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}x} exp\left(-\frac{(ln(x))^2}{2}\right) dx$$

On vérifie que les lois de probabilités sur $\mathbb{R}_+$ ayant pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}x} exp\left(-\frac{(ln(x))^2}{2}\right) (1 + \alpha sin\,(\pi p ln(x)))\ dx \text{ avec } \alpha \in [-1, 1] \text{ et } p \in \mathbb{N}$$

ont même moments que la log-normale. En effet, si k est un entier naturel :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} exp\left(-\frac{(ln(x))^2}{2}\right) sin\left(\pi p ln(x)\right) x^k dx = \mathbb{E}\left[e^{k\mathcal{N}} sin\left(\pi p\, ln\left(e^{\mathcal{N}}\right)\right)\right]$$
$$= \mathbb{E}\left[e^{k\mathcal{N}} sin\left(\pi p\, \mathcal{N}\right)\right]$$
$$= Im\left(\mathbb{E}\left[e^{(k+i\,\pi p)\mathcal{N}}\right]\right)$$
$$= Im\left(e^{\frac{(k+i\,\pi p)^2}{2}}\right)$$
$$= 0$$

Cette non-détermination vient du fait que ces moments croissent très vite. On ne peut donc pas leur appliquer les critères de Fourier ou de Carleman. Ceci nous laisse un peu pessimiste sur notre cas particulier du processus d'accumulation du mouvement brownien géométrique puisque au fond on s'attend à ce qu'il ne soit pas loin d'une log-normale, une approximation utilisée par certains probabilistes praticiens. En effet, Hörfelt a prouvé victorieusement ,très récemment en 2005, que le processus d'accumulation du mouvement brownien géométrique est indéterminé par ses moments. Nous présentons sommairement ici cette preuve d'Hörfelt. (pour plus de détails cf [9])

On se place dans l'espace de Wiener $\Omega = C_0\left([0,1], \mathbb{R}\right)$. On munit cet espace de la norme uniforme. Soit $\phi : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$ continue, dérivable et strictement croissante divergeant vers $+\infty$ en $+\infty$. Soit $\psi : \Omega \mapsto \mathbb{R}_+^*$; On dit que $\psi \in \mathcal{L}(\phi)$ si l'application $\omega \mapsto \phi \circ \psi(\omega)$ est 1-lipschitzienne (en prenant comme norme sur Ω la norme uniforme). On dit aussi que $\psi \in \mathcal{C}(\phi)$ si $\omega \mapsto \phi \circ \psi(\omega)$ est convexe. Hörfelt a prouvé un critère analytique de non-détermination.

Théorème :

Supposons que $\psi \in \mathcal{L}(\phi) \cap \mathcal{C}(\phi)$ a des moments de tout ordre et est non constante. Supposons aussi que ϕ vérifie l'hypothèse

$$s \mapsto s^{-\frac{3}{2}}\left(\phi^2(s) + \ln(\phi'(s))\right) \ \textit{est integrable en } +\infty$$

Alors la loi de ψ est non determinée par ses moments

On applique ce théorème pour le processus d'accumulation normalisé en temps

$$I_1 : \omega \mapsto \int_0^1 exp(\sigma\omega(t) + \theta t)dt$$

avec $\phi : s \mapsto \frac{ln(s)}{\sigma}$

Ce théorème de Hörfelt utilise le résultat de Krein (1938)

Théorème :

Supposons que $d\mu(x) = f(x)dx$ soit une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}_+$ ayant des moments de tout ordre. On suppose qu'il existe un réel $a \geq 0$ tel que :

$$\int_a^{+\infty} \frac{ln\left(f\left(s^2\right)\right)}{1+s^2} ds \ > -\infty$$

Alors μ n'est pas déterminée par ses moments

Signalons, finalement, que Nevanlinna a développé dans le cadre de la théorie spectrale une paramétrisation complexe de l'ensemble des probabilités ayant des moments donnés (cf [4])

Références

[1] I. Karatzas, S. Shreve : *Brownian motion and stochastic calculus*, Springer-Verlag 1991

[2] D. Revuz, M. Yor : *Continous martingales and Brownian motion,* 2nd ed., Springer 1994

[3] P. Billingsley : *Probability and measure,* John Wiley & Sons 1979

[4] N. I. Akhiezer : *The classical moment Problem and some related questions in analysis,* Oliver & Boyd 1965

[5] H. Geman, M. Yor : "Bessel processes, Asian options, and perpetuities", *Mathematical Finance,* Vol. 3, No 4 (October 1993), 349-375

[6] Gwo Dong Lin : "On the moment problems ", *Statistics & Probability Letters,* 35, 85-90 (1997)

[7] T. Carleman : " Sur le problème des moments", *Comptes-rendus de l'académie des sciences,* 174, 1680-1682, 1922

[8] L. Tolmatz : "Asymptotics of the distribution of the integral of the exponential (geometric) Brownian motion for large arguments with application to asian options ", *http ://www.tolmatz.net,* 2002

[9] P. Hörfelt : " The moment problem for some Wiener functionals : corrections to previous proofs", *Jour. App. Prob.,* 42, 851-860 (2005)