La théorie des algèbres de Lie sans algèbre

Mémoire de première année de FIMFA
Sous la direction de Philippe Gille

Yue YU, Thibault MANNEVILLE

2 juillet 2011

Table des matières

Suivant l'article de Simon Donaldson [Don09], nous présentons une démonstration géométrique de l'existence de la décomposition de Cartan d'une algèbre de Lie semi-simple, qui est l'un des fondements de la théorie de Lie. Nous expliquons ici brièvement la méthode, et explorons des idées similaire. Nous remercions chaleureusement notre tuteur Philippe Gille et notre professeur Pierre Pansu, dont les conseils et la patience nous ont été précieux.

1 Panorama

La première étape de la preuve consiste à transformer le problème en la recherche d'une certaine structure euclidienne sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Pour cela, on considère une fonction sur l'ensemble de toutes les structures euclidiennes possibles, que l'on munit lui-même d'une métrique adéquate. Les points critiques de cette fonction correspondent aux structures euclidiennes que l'on souhaite obtenir. Le nœud de la démonstration est ainsi réduit à l'existence de points critiques pour cette fonction. C'est aussi ce qui constitue réellement la partie géométrique de ce mémoire. Dans le même esprit, nous fournissons une démonstration d'un théorème de Mostow sur la décompositon de Cartan compatible (théorème 5.11) à la fin de l'article.

Notons que deux aspects de ce mémoire diffèrent de la présentation originale de Donaldson :

1. On opère avec le groupe linéaire général $GL(V)$ au lieu du groupe linéaire spécial $SL(V)$. Bien sûr, cela ne change pas fondamentalement les peuves, mais permet d'éviter quelques vérifications fastidieuses[1] sur des déterminants.

2. Nous avons choisi de mettre la discussion de l'espace symétrique $GL(V)/O(V)$ dans un cadre plus général, dans le but de rendre la structure plus claire conceptuellement.

Signalons que toutes les notions rattachées aux groupes et algèbres de Lie sont "rappelées" dans l'appendice.

2 Notations et pré-requis

Dans le mémoire, $\mathfrak{g}$ signifie toujours une algèbre de Lie semi-simple de dimension finie sur $\mathbb{R}$.

Définition 2.1. Une involution $\theta \in Aut(\mathfrak{g})$ est appelée involution de Cartan si la forme bilinéaire symétrique $< X, Y >_\theta := -\kappa(X, \theta Y)$ est définie positive, (où κ est la forme de Killing). La décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ comme somme d'espaces propres de θ par rapport aux valeurs propres $+1, -1$ respectivement est appelée la décomposition de Cartan.

Une structure euclidienne $< \, , >$ sur $\mathfrak{g}$ induit une transposition sur $End(\mathfrak{g})$. Pour simplifier l'écriture, on dit que la structure euclidienne $< \, , >$ est bonne si l'image de ad est stable par cette transposition.

Constatons d'abord un lien entre l'involution de Cartan de $\mathfrak{g}$ et la structure euclidienne $< \, , >$ sur $\mathfrak{g}$. Nous pouvons énoncer la proposition suivante :

[1] Vérifications qui ne sont d'ailleurs pas faites non plus dans l'article.

Proposition 2.2. *Si $< , >$ est bonne, alors $X \longmapsto -X^T$ produit une involution de Cartan de $\mathfrak{g}$. Réciproquement, si θ est une involution de Cartan, alors la structure euclidienne correspondante $< X, Y >_\theta := -\kappa(X, \theta Y)$ est bonne. De plus, $X \longmapsto -X^T$ coïncide avec θ.*

La démonstration en est immédiate et nous ne la faisons pas ici.

Désormais, on a transformé la recherche d'une involution de Cartan en celle d'une bonne structure euclidienne. Étant donné une base, les structures euclidiennes correspondent aux matrices définies positives, dont l'ensemble est muni d'une structure géométrique remarquable.

3 L'espace $P(n)$

On note $S(n)$ l'ensemble des matrices symétriques de taille n muni de la structure de variété induite par $M(n, \mathbb{R})$, $P(n)$ la sous-variété des matrices définies positives, et $P(n)_1$ la sous-variété des matrices définies positives et de déterminant 1.

En considérant l'action naturelle de $GL(n, \mathbb{R})$ sur $S(n)$ donnée par

$$A \mapsto gAg^T \qquad g \in GL(n, \mathbb{R}), A \in S(n),$$

$P(n)$ s'identifie à l'espace symétrique $GL(n, \mathbb{R})/O(n, \mathbb{R})$ et $P(n)_1$ à l'espace symétrique $SL(n, \mathbb{R})/SO(n, \mathbb{R})$.

Remarque 3.1. Un des intérêts de $P(n)$ est que tout espace symétrique de type non-compact se plonge dans $P(n)$ après un rescaling des métriques ([Ebe96] P76).

Dans ce qui suit, nous munissons $P(n)$ et $P(n)_1$ de structures métriques ; et ce de sorte qu'ils aient une propriété géométrique importante : être de courbure sectionnelle négative.

3.1 Calcul de courbure

On définit un produit scalaire sur $T_{id}P(n)$ par $< X, Y >= Tr(XY)$, et on obtient une métrique riemannienne sur $P(n)$ par transport de $GL(n, \mathbb{R})$ (c.f. [BH99] P314). On calcule la courbure riemannienne associée par la formule suivante (c.f [Hel78] P215) :

Proposition 3.1. *La courbure riemannienne de l'espace symétrique $P(n) = GL(n, \mathbb{R})/O(n, \mathbb{R})$ en l'identité associée à la métrique ci-dessus est donnée par la formule*

$$R_{id}(X, Y)Z = -[[X, Y], Z] \qquad pour X, Y, Z \in S(n).$$

Proposition 3.2. *$P(n)$ est de courbure sectionnelle négative.*

Preuve. Sur l'identité, on a

$$< R_{id}(X, Y)X, Y >= Tr(-[[X, Y], X]Y) = 2Tr(XXYY - XYXY) \leq 0$$

On obtient l'estimation ailleurs par translation. □

Définissons à présent la notion d'espace vérifiant la propriété CAT(0). C'est une propriété géométrique qui renferme l'essence de la courbure négative. Intuitivement, dans un espace CAT(0), les rayons de lumière se courbent de sorte que la longueur apparente d'un objet que l'on voit est plus petite que sa véritable longueur.

Définition 3.3. Soit X un espace métrique géodésique, $\Delta(p,q,r)$ un triangle géodésique dans X avec deux points $x \in [p,q], y \in [p,r]$. On définit un triangle de comparaison $\bar{\Delta}(\bar{p},\bar{q},\bar{r})$ comme un triangle dans un plan euclidien de même longueur d'arête, i.e. $d(p,q) = d(\bar{p},\bar{q}), d(p,r) = d(\bar{p},\bar{r}), d(q,r) = d(\bar{q},\bar{r})$, et aussi deux points correspondants $\bar{x} \in [\bar{p},\bar{q}], \bar{y} \in [\bar{p},\bar{r}]$, vérifiant $d(p,x) = d(\bar{p},\bar{x}), d(p,y) = d(\bar{p},\bar{y})$. L'espace X satisfait la propriété CAT(0) (ou "est CAT(0)" en abrégé, nous utilisons cette terminologie dans tout le reste du mémoire) si pour tout $\Delta, x, y, \bar{\Delta}, \bar{x}, \bar{y}$ comme ci-dessus, on a $d(x,y) \leq d(\bar{x},\bar{y})$. L'espace X satisfait la propriété CAT(0) locale (ou "est CAT(0) local"), si pour tout $x \in X$, il existe $r_x > 0$ tel que la boule $B(x,r_x)$ est CAT(0).

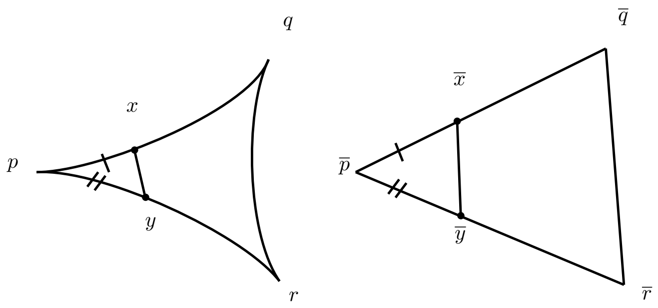

Fig. 1 : La Propriété CAT(0)

Pour tout ce qui suit, X désigne un espace CAT(0) complet.

Remarque 3.2. Comme conséquences de la définition ci-dessus, un espace CAT(0) complet a des propriétés remarquables ([BH99] Section II.2) :

- L'existence des angles au sens strict
- La convexité de la fonction de distance
- L'existence et l'unicité du centre du cercle circonscrit d'un sous-ensemble borné
- L'existence et l'unicité de la projection sur un sous-ensemble convexe fermé
- La correspondance local-global (Cartan-Hadamard) : CAT(0) locale implique que le revêtement universel est CAT(0).

Théorème 3.4. *$P(n)$ est CAT(0).*

Indication. La propriété CAT(0) locale équivaut à la négativité de la courbure sectionnelle pour une variété riemannienne, par les théorèmes de comparaison (c.f. [BH99] P173). De plus, $P(n)$ est simplement connexe car il est difféomorphe à $S(n) \cong \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ par l'exponentielle. On en déduit la propriété CAT(0) global par le théorème de Cartan-Hadamard (c.f. [BH99] P193). □

Remarque 3.3. Le même argument montre que $P(n)_1$ est aussi CAT(0). En effet, les études de $P(n)$ et de $P(n)_1$ sont similaires par l'isométrie suivante.

Proposition 3.5 ([BH99] P325). *On a la décomposition $\mathbb{R} \times P(n)_1 \cong P(n)$ donné par l'application $(s, p) \mapsto e^{s/\sqrt{n}}p$. De plus, $P(n)_1$ est irréductible.*

Remarque 3.4. La discussion ci-dessus pour $P(n)$ est valable pour tout espace symétrique de type non compact. En effet, un espace symétrique de type non-compact est de courbure sectionnelle négative ([Hel78] P241 Theorem 3.1 (ii)) et est difféomorphe à un espace euclidien ([Hel78] P253 Theorem 1.1 (iii)), il est donc CAT(0).

3.2 Généralités sur le bord à l'infini d'un espace CAT(0)

La vision d'un observateur sur un point quelconque d'un espace CAT(0) peut s'étendre indéfiniment par les sphères de rayon croissant. C'est-à-dire le bord à l'infini d'un espace de CAT(0) ressemble intuitivement à une sphère, mais on le munit d'une structure plus fine. On rappelle d'abord de la construction du bord à l'infini dans le cas général, puis on revient à $P(n)$.

Définition 3.6. Deux rayons géodésiques $c, c' : [0, \infty[\to X$ sont dits asymptotiques si $d(c(t), c'(t))$ est borné en $t \geq 0$. On définit le bord à l'infini de X comme l'ensemble des rayons géodésiques quotienté par la relation d'équivalence "être asymptotiques", noté ∂X. On note aussi $\bar{X} = X \cup \partial X$.

Proposition 3.7 (c.f. [BH99] P261). *Soit $x_0 \in X$, alors dans chaque classe de rayons géodésiques asymptotiques il existe un unique rayon géodésique partant de x_0. Supposons de plus que X est une variété riemannienne. Alors, ∂X s'identifie à la sphère unité de l'espace tangent $T_{x_0}X$. On l'appelle aussi la sphère à l'infini.*

Indication. L'unicité vient de la convexité de la fonction distance d'un espace CAT(0). Pour l'existence, soit c un rayon géodésique, notons c_0^t le rayon géodésique partant de x_0 passant par $c(t)$. Prenons $t \to \infty$, la propriété CAT(0) assure que la limite de c_0^t existe, c'est le rayon géodésique partant de x_0, et il est asymptotique à c. □

La topologie de $\bar{X}$ est définie telle qu'une suite non bornée (x_j) dans X converge vers un point du bord $u \in \partial X$ si pour un point quelconque $x_0 \in X$, la suite des rayons géodésiques γ_j partants de x_0 et passant par x_j converge vers un rayon géodésique γ_∞ associé à u. Cette topologie est appelée la topologie des cônes, dont la construction est un peu compliquée. Une façon de la définir est de prendre la limite projective de la topologie des boules fermées de plus en plus grandes. Nous renvoyons à [BH99] P263 pour les détails.

Remarque 3.5. Quand X est complet et localement compact, $\bar{X}$ est compact, de plus si X est une variété riemannienne, $\bar{X}$ est homéomorphe à une boule fermée. Cependant la topologie de cône peut être très compliqué en général.

Pour faire l'analyse, voici une autre construction équivalente du bord ∂X moins intuitive. Notons $C(X)$ l'espace des fonctions continues sur X muni de la topologie compacte ouverte, $C_*(X)$ le quotient de $C(X)$ par le sous-espace des fonctions constantes, et $\bar{f}$ la classe dans $C_*(X)$ d'une fonction $f \in C(X)$. L'idée est de plonger X dans $C_*(X)$ via la fonction distance. On va voir que le bord ∂X correspond à un certain type de fonctions dans $C_*(X)$.

Théorème 3.8 ([BH99] P267). *Notons $\hat{X}$ l'adhérence de X dans $C_*(X)$. Alors $\hat{X}$ est homéomorphe à $\bar{X}$.*

Ce théorème se montre par les constructions qui suivent, mais nous ne le faisons pas en détail ici. Elles ne sont pas essentielles pour la suite.

Définition 3.9. Soit c un rayon géodésique, on définit la fonction de Busemann associée de la manière suivante :

$$b_c : \left\{ \begin{array}{ccc} X & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lim_{t\to\infty}(d(x, c(t)) - t) \end{array} \right.$$

Définition 3.10. Une fonction $h \in C(X)$ est appelée horofonction centrée en $\bar{h}$ si $\bar{h} \in \hat{X} \setminus X$.

Théorème 3.11 ([BH99] P267). *L'application $i : \partial X \to \bar{h} \in \hat{X} \setminus X$, où l'on associe à chaque point du bord sa fonction de Busemann, est bien définie et bijective.*

Indication. On montre d'abord qu'une suite de points (x_n) dans X converge vers un point du bord si et seulement si la suite de fonctions de distance associée $\bar{d}_{x_n}$ converge vers une horofonction. Ensuite, il suffit de raisonner en prenant une telle suite. □

Un avantage de cette description du bord est qu'un point lui appartenant est plus facile à caractériser.

Proposition 3.12 ([BH99] P271). *Une fonction $h \in C(X)$ est une horofonction si et seulement si elle vérifie les 3 conditions suivantes :*

- *h est convexe.*
- *h est 1-lipschitzienne.*
- *$\forall x_0 \in X, \forall r > 0$, h atteint son minimum sur la sphère $S_r(x_0)$ en un point unique y et $h(y) = h(x_0) - r$.*

Indication. Pour $\Rightarrow$, il suffit de vérifier ces propriétés pour les fonctions de Busemann, par le théorème précédent. Pour $\Leftarrow$, prenons un point quelconque $x_0 \in X$, alors l'application $c : [0, \infty[\to X$, qui associe à $t > 0$ la projection de x_0 sur $h^{-1}(]-\infty, h(x) - t])$, est un rayon géodésique qui correspond à la horofonction h. □

3.3 Etude de $\partial P(n)$

Pour mieux visualiser ∂X, on le munit d'une métrique selon l'angle duquel on tourne quand on regarde vers l'infini. Cette métrique reflète l'information des sous-variétés plates de X. On le voit clairement par l'étude de $\partial P(n)$.

Définition 3.13. Pour tout $x \in X$ et tous $\xi, \eta \in \partial X$, on note $\angle_x(\xi, \eta)$ l'angle des deux rayons géodésiques partant de x vers ξ et η respectivement. Alors, on définit la métrique angulaire sur X comme le suprémum des angles partant de tous les points de X : $\angle(\xi, \eta) := \sup_{x\in X} \angle_x(\xi, \eta)$. On définit la métrique de Tits comme la métrique de longueur correspondante (c.f. [BH99] P33).

Remarque 3.6. L'avantage d'une métrique de longueur est donné par le théorème de Hopf-Rinow ([BH99] P35). En fait la métrique angulaire n'est pas très loin d'être une métrique de longueur. ∂X est déjà π-géodésique suivant [BH99] P285, l'application identité de ∂X muni de la métrique angulaire dans ∂X muni de la métrique de Tits est ainsi une isométrie locale.

Théorème 3.14. *$\partial P(n)_1$ est un complexe simplicial sphérique dont chaque simplexe correspond à un drapeau non trivial de $\mathbb{R}^n$, et sur lequel $GL(n, \mathbb{R})$ agit par isométries simpliciales.*

Remarque 3.7. En fait, $\partial P(n)_1$ est isomorphe à un immeuble sphérique épais (c.f. [BH99] P337), qui est la géométrisation de l'immeuble associé à $SL(n, \mathbb{R})$ (voir [AB08] P338 pour cet immeuble). Les sous-variétés plates maximales correspondent aux appartements et les chambres de Weyl correspondent aux chambres de l'immeuble. La première correspondance est bijective or la deuxième ne l'est pas. Un géodésique régulier correspond à un point du bord à l'intérieur d'une chambre et un géodésique singulier correspond à un point du bord à l'intérieur d'un simplexe de dimension plus petite. De plus, les simplexes dans cet immeuble correspondent aux drapeaux de $\mathbb{R}^n$ de façon équivariante par rapport à l'action de $SL(n, \mathbb{R})$.

Question 1. À quoi correspondent les sous-variétés totalement géodésiques ?

Remarque 3.8. Pour $P(n)_1$, on peut décrire les objets ci-dessus explicitement. On définit

$$A := \{\exp(sX) | s > 0, X = diag(t_1, \ldots, t_n), \sum_{i=0}^{n} t_i = 0\}$$

$$A^+ := \{\exp(sX) | s > 0, X = diag(t_1, \ldots, t_n), \sum_{i=0}^{n} t_i = 0, t_1 \geq \ldots \geq t_n\} \quad (1)$$

Notons respectivement $A(\infty)$ et $A^+(\infty)$ le bord à l'infini de A et de A^+. Alors, $A(\infty)$ correspond à un appartement de $\partial P(n)_1$, et $A^+(\infty)$ à une chambre. Si on remplace les k inégalités dans (1) par des égalités, on obtient un simplexe de codimension k au bord à l'infini. Les autres appartements, chambres et simplexes s'obtiennent par translation de $SL(n, \mathbb{R})$. Pour chaque simplexe, notons E_i les espaces propres correspondant aux valeurs propres décroissantes distinctes, et associons à ce simplexe un drapeau

$$E_1 \subset E_1 \oplus E_2 \subset E_1 \oplus E_2 \oplus E_3, \ldots$$

On remarque que le drapeau est non trivial car les matrices X sont de trace nulle.

Remarque 3.9. Si X s'écrit comme produit $X_1 \times X_2$, alors $\partial X = \partial X_1 * \partial X_2$ (c.f. [BH99] P284). Donc $\partial P(n) = \partial P(n)_1 * S^0$, chaque simplexe de $\partial P(n)_1$ "se gonfle" d'une dimension de plus et devient un polyèdre sphérique. Bien que $\partial P(n)$ ne soit plus un complexe simplicial sphérique, l'important est que l'action de $GL(n, \mathbb{R})$ dessus soit encore "simpliciale", i.e. elle transporte morceau par morceau. Par conséquent, si une action fixe un point, elle fixe forcément le plus petit polyèdre contenant ce point, donc aussi un sous-espace non trivial de $\mathbb{R}^n$, par correspondance avec les drapeaux de $\mathbb{R}^n$.

Remarque 3.10. On constate que la topologie induite par la métrique de Tits (un bouquet de sphères) est différente de la topologie de cône (une sphère). En général, il est plus naturel et important de munir un immeuble sphérique de ce genre de topologie supplémentaire. On les appelle des immeubles sphériques topologiques (c.f. [BS87]).

Remarque 3.11. L'identification du bord d'un espace symétrique de type non-compact avec l'immeuble sphérique de Tits associé au groupe de Lie semi-simple est toujours juste ([Ji06] Proposition 2.5.4). Ce n'est pas une coïncidence car les deux structures décrivent toutes les deux les sous-groupes paraboliques ([BJ06] P41). De ce point de vue, les drapeaux associés au bord de $P(n)$ sont assez naturels (car on a deux descriptions de l'immeuble associé à $GL(n, \mathbb{R})$, i.e. par les sous-groupes paraboliques ou par les drapeaux. voir [AB08] P182 P338).

4 Existence de points critiques

Un avantage de la construction ci-dessus est qu'on obtient une compactification de X dans le cas où X est localement compact (voir [BJ06] pour une discussion de compactification pour l'espace symétrique). Cela nous permet d'énoncer le théorème suivant :

Théorème 4.1 ([BH99] P275)**.** *Soit X un espace CAT(0) complet et propre, et soit $F : X \to \mathbb{R}$ une fonction continue convexe. Supposons que Γ agit sur X par isométrie et que F est invariant par Γ. Alors soit F atteint son minimum dans X, soit Γ fixe au moins un point $u \in \partial X$.*

Remarque 4.1. "propre" signifie que toutes les boules fermées sont compactes, ce qui est équivalent à localement compact pour un espace métrique géodésique complet par le théorème de Hopf-Rinow ([BH99] P35)

Démonstration 1 Supposons que f n'atteint pas son infimum a dans X. Notons $A_t = \{x \in X | f(x) \leq t\}$ pour tout $t > a$. L'idée est de trouver une suite de points $x_n \in A_{t_n}$ qui converge vers un point du bords ∂X, fixé par Γ, (où $t_n \searrow a$). Notons π_t la projection de X sur A_t, et f_t la fonction $x \mapsto d(x, \pi_t(x))$. Fixons un point $x_0 \in X$, on note alors $h_t(x) = f_t(x) - f_t(x_0)$. Par le théorème d'Arzela Ascoli, on obtient une sous-suite (h_{t_n}) qui converge vers une fonction h ; c'est une horofonction par la proposition 3.12, donc h correspond à un point $u \in \partial X$ par le théorème 3.11. Alors, u est fixé par Γ car chaque h_t l'est.

Vue l'importance de ce théorème, nous esquissons deux autres démonstrations suivant [Don09], qui se servent du lemme suivant :

Lemme 4.2. *Soit (x_i) une suite dans X telle que $d(x_0, x_i) \to \infty$. Supposons que pour tout $g \in \Gamma$, il existe une constante C_g telle que, pour tout i, $d(x_i, gx_i) \leq C_g$. Alors il existe un point du bord fixé par Γ.*

Indication. Comme $\bar{X}$ est compact, on peut supposer que (x_i) converge vers un point du bord u, quitte à extraire une sous-suite. Comme l'action de Γ s'étend continûment sur $\bar{X}$, on en déduit facilement que u est fixé par Γ (en raisonnant par l'absurde par exemple). □

Démonstration 2 Supposons que f n'atteint pas son infimum a dans X, et posons $A_t = \{x \in X | f(x) \leq t\}$ comme dans la démonstration 1. Fixons un point de base x_0. On note z_t la projection de x_0 sur A_t. Par la propriété CAT(0), $d(z_t, g(z_t)) \leq d(x_0, gx_0)$. On prend alors une suite (z_{t_i}) qui tend vers le bord, et dont la limite est fixée par Γ, toujours par le lemme.

La démonstration suivante ne s'applique qu'au cas où X est une variété riemannienne, cependant on peut voir la convergence de façon dynamique à partir du flot de gradient.

Démonstration 3 On considère l'équation du flot gradient :

$$\frac{dx}{dt} = -gradF_x$$

On peut montrer que la solution existe pour tout $t > 0$ et que la distance entre deux solutions est décroissante avec le temps. Soit $x(t)$ une solution, s'il existe une suite $t_i \to \infty$ telle que $(x(t_i))$ converge, alors la limite est un minimum de F. Sinon, on prend une suite $(x(t_i))$ qui tend vers un point du bord, dont la limite est alors fixée par Γ, par le lemme.

5 Retour à l'algèbre de Lie

5.1 Existence de l'involution de Cartan

Notons V l'espace vectoriel sous-jacent de $\mathfrak{g}$, et fixons une structure euclidienne quelconque $| \;|_1$ sur V. Dans une base orthonormée de $| \;|_1$, l'ensemble des structures euclidiennes sur V correspond à l'ensemble des matrices définies positives $P(n) \cong GL(V)/O(V)$. On va définir une fonction F sur $P(n)$ dont les points critiques correspondent aux bonnes structures euclidiennes que l'on cherche.

Notons W l'espace vectoriel des formes anti-symétriques de $V \times V$ dans V. Le crochet de Lie de $\mathfrak{g}$ est un point que nous notons $w \in W$. On a une action à gauche de $GL(V)$ sur W, notée $\rho : GL(V) \to GL(W)$, et donnée par la formule qui suit ; si $g \in GL(\mathfrak{g})$ et B est une application bilinéaire antisymétrique, g_*B est définie par :

$$g_*B : \left\{ \begin{array}{ccc} V \times V & \longrightarrow & V \\ (x, y) & \longmapsto & gB(g^{-1}x, g^{-1}y) \end{array} \right.$$

On note enfin G_w le stabilisateur de w. On voit que $G_w \cong Aut(\mathfrak{g})$, donc l'algèbre de Lie de G_w est isomorphe à $Der(\mathfrak{g})$ (c.f. proposition 7.14 de l'appendice pour la preuve).

Lemme 5.1. *Si $\mathfrak{g}$ est simple, alors la représentation ρ est irréductible.*

Preuve. Soit U un sous-espace vectoriel G_w-invariant de $\mathfrak{g}$ et $\delta \in Der(\mathfrak{g})$. Si $t \in \mathbb{R}$, $t\delta \in Der(\mathfrak{g})$, et comme $Der(\mathfrak{g})$ est l'algèbre de Lie de G_w, on a $\exp(t\delta) \in G_w$[2].
Soit $x \in U$,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \exp(t\delta)(x) \in U$$

[2]Voir le rappel sur l'exponentielle dans l'appendice.

[2] L'application $t \longmapsto \exp(t\delta)(x)$ est de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathfrak{g}$, donc en particulier dérivable. Or sa dérivée (en $t \in \mathbb{R}$) est la limite, quand h tend vers 0, de la quantité $\frac{1}{h}\left(\exp\left((t+h)\delta\right)(x) - \exp(t\delta)(x)\right)$ qui est un élément de U. Comme U est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$ (qui est de dimension finie), c'en est un fermé. Donc la dérivée, en $t \in \mathbb{R}$, de l'application précédente est encore dans U. On regarde alors sa valeur en 0, et on trouve que $\delta(x) = \delta\left(\exp(0 \times \delta)(x)\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\exp(t\delta)(x)\right)_{|t=0} \in U$.
Ainsi $\delta(U) \subseteq U$.

En appliquant ce résultat aux dérivations de la forme $ad(\xi)$ pour $\xi \in \mathfrak{g}$, on a que $[\mathfrak{g}, U] \in U$. Et U se trouve donc être un idéal de $\mathfrak{g}$, donc est trivial, par simplicité de $\mathfrak{g}$. La représentation est donc bien irréductible. □

Lemme 5.2. *Il existe une structure euclidienne $|\ |_W$ sur W qui est invariante par $\rho|_{SO(V)}$, et telle que la différentielle de ρ en l'identité commute avec la transposition dans $End(V)$ et $End(W)$ (induites par $|\ |_1$ et $|\ |_W$ respectivement). C'est-à-dire :*

$$\forall \xi \in End(V), d\rho(\xi^T) = (d\rho(\xi))^T.$$

Preuve. On complexifie la représentation. Pour cela, on utilise le fait que ρ est algébrique, que nous ne démontrons pas ici.

Plus précisément, on considère l'espace complexifié $V \otimes \mathbb{C}$. On sait qu'il est unique à unique isomorphisme près. On peut donc le voir comme les combinaisons $\mathbb{C}$-linéaires des éléments d'une base $\mathcal{B} = (a_1, \cdots, a_n)$ orthonormée de V. On peut évidemment faire de même pour W avec une base $\mathcal{B}'$ quelconque (il n'y a pas encore de métrique sur W). En identifiant alors $End_{\mathbb{C}}(V \otimes \mathbb{C})$ et $End_{\mathbb{C}}(W \otimes \mathbb{C})$ aux matrices de coordonnées dans ces bases (et en les munissant des bases usuelles des matrices), on peut donner un sens à la complexification de ρ de la manière suivante :
Dire que ρ est algébrique signifie[3] qu'il existe des fractions rationnelles[4] réels tels que les coefficients de l'image d'une matrice de $GL(V)$ par ρ soient l'évaluation de l'une d'elles en les coefficients de son antécédent[5].
Ainsi, il existe bien une représentation complexifiée $\rho_{\mathbb{C}} : GL(V \otimes \mathbb{C}) \to GL(W \otimes \mathbb{C})$, que l'on obtient simplement en prenant les mêmes fractions rationnelles que ρ pour calculer les coefficients de l'image d'une matrice.
En différenciant, on obtient donc que $d\rho_{\mathbb{C}}(I)$ est un morphisme d'algèbres de Lie complexes.

On remarque maintenant que ρ commute avec la conjugaison (car les fractions rationnelles qui la représentent sont réelles). On peut donc considérer le groupe engendré par $\rho\left(U(V \otimes \mathbb{C})\right)$ et la conjugaison sur $W \otimes \mathbb{C}$. Ce groupe agit sur $W \otimes \mathbb{C}$. De plus, la conjugaison agit sur $\rho\left(U(V \otimes \mathbb{C})\right)$, donc le groupe que nous considérons est le produit semi-direct $U(V_{\mathbb{C}}) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. C'est alors ensemblistement un produit, et il est compact. On peut par conséquent choisir une métrique hermitienne sur $W \otimes \mathbb{C}$ invariante par ce groupe, en choisissant d'abord une métrique hermitienne quelconque (via le calcul dans une base par exemple) et en moyennant par rapport à la mesure de Haar.

[3]La définition est plus générale que celle que nous donnons, mais il ne s'agit ici que de préciser pourquoi on peut complexifier ρ.
[4]Autant que la dimension de $End(W)$.
[5]Ou de ses antécédents.

La métrique que nous avons choisie est invariante par conjugaison, c'est donc en fait une forme quadratique dont la restriction à V est une mesure euclidienne.

Comme $d\rho_{\mathbb{C}}(I)$ est un morphisme d'algèbres de Lie, elle envoie l'algèbre de Lie de $U(V \otimes \mathbb{C})$ dans celle de $U(W \otimes \mathbb{C})$. Dans les deux cas, il s'agit des endomorphismes antisymétriques (pour la transposition induite par les métriques choisies).

Notons $(-)_V$ et $(+)_V$ (resp. $(-)_W$ et $(+)_W$) les espaces propres associés aux valeurs -1 et 1 pour la transposition dans $End(V)$ (resp. $End(W)$).

On a alors clairement

$$Lie(U(V \otimes \mathbb{C})) = (-)_V \oplus i(+)_V \text{ et } Lie(U(W \otimes \mathbb{C})) = (-)_W \oplus i(+)_W.$$

On se souvient alors que la caractérisation de $(-)_V$ est donnée par :

$$\forall \xi \in End(V \otimes \mathbb{C}), \xi \in (-)_V \iff \xi + \xi^T = 0.$$

Ainsi, $d\rho_{\mathbb{C}}(I)$, $\mathbb{C}$-linéaire, préserve la décomposition de $Lie(U(V))$ précédente. On en déduit que $d\rho(I)$ préserve les espaces propres de la transposition, autrement dit, commute avec la transposition, ce qui est la deuxième assertion que nous souhaitions. □

On définit une fonction $\tilde{F}$ sur $GL(V)$ par $\tilde{F}(g) = |g(w)|_W^2$. $\tilde{F}$ se factorise par $GL(V) \to GL(V)/O(V)$, ainsi $\tilde{F}$ induit une fonction sur $P(n)$, notée F.

Lemme 5.3. *F est convexe sur $P(n)$, invariante par G_w, et, en ses points critiques, l'aglèbre de Lie de G_w est stable par la transposition induite.*

Preuve. Dans cette preuve, afin d'alléger les notations, nous notons $d\rho$ pour $d\rho(I)$.

Le fait que F est invariante par G_w est clair.

Montrons qu'elle est convexe, c'est-à-dire que pour toute géodésique γ,

$$\frac{d^2}{dt^2} F(\gamma(t)) \geq 0.$$

Soit alors γ une géodésique, elle s'écrit sous la forme :

$$\gamma(t) = g^T \exp(tS) g,$$

avec $g \in GL(V)$ et S un endomorphisme symétrique pour la transposition induite par la métrique sur V.

Quitte à considérer $g.w$ plutôt que w, on peut supposer que $H = [I]$. Par le lemme 5.2, $d\rho(S)$ est symétrique. On peut donc choisir une base orthonormée de W dans laquelle $d\rho(S)$ est diagonale de valeurs propres λ_i. Si w a pour coordonnées dans cette base (w_i), on a :

$$F(\exp(tS)) = |\exp(td\rho(S))w|_W^2 = \sum |\exp(t\lambda_i)w_i|_W^2 = \sum |w_i|_W^2 \exp(2t\lambda_i).$$

Il s'agit bien d'une fonction convexe.

Montrons maintenant que si $H \in P(n)$ est un point critique de F, alors l'algèbre de Lie de G_w est invariante par la transposition induite par la métrique H.

Si $H = [g]$, quitte à considérer $g.w$ plutôt que w, on peut supposer que $H = [I]$ et donc s'indentifie à $|\ .\ |_1$. Comme I est un point critique de F, on a $dF(0) = 0$. Il vient ensuite :

$$F(I+h)-F(I) = \langle \rho(I+h)(w), \rho(I+h)(w)\rangle_W - \langle w, w\rangle_W = 2\,\langle d\rho(h)w, w\rangle_W + \circ(|h|).$$

Alors on a :

$$\forall \xi \in Lie\,(GL(V))\,, \langle d\rho(\xi)w, w\rangle_W = 0.$$

En appliquant cette formule aux vecteurs de la forme $[\eta, \eta^T]$, et comme $d\rho(I)$ est un morphisme d'algèbres de Lie commutant avec la transposition, on obtient :

$$\forall \eta \in Lie\,(SL(V))\,, |d\rho(\eta)(w)|_W^2 = |d\rho(\eta)^T(w)|_W^2.$$

Or η appartient à $Lie\,(G_w)$ si et seulement si $d\rho(\eta)(w) = 0$, ce qui équivaut à $d\rho(\eta)^T(w) = 0$. Et $Lie\,(G_w)$ est bien invariante par la transposition induite par H. $\square$

Lemme 5.4. *Si $\mathfrak{g}$ est simple et si F a un point critique, alors $\mathfrak{g}$ est isomorphe à $Der(\mathfrak{g})$.*

Remarque 5.1. En fait, on a toujours $\mathfrak{g} \cong Der(\mathfrak{g})$ pour $\mathfrak{g}$ semi-simple (c.f. proposition 7.12 de l'appendice), et la démonstration dépend de la non-dégénérescence de la forme de Killing[6]. Ici on obtient plutôt cette dernière comme conséquence de la méthode géométrique.

Preuve du lemme 5.4. On procède par l'absurde. Pour cela, on commence par remarquer que

$$\forall \alpha \in Der(\mathfrak{g}), \forall \xi \in \mathfrak{g}, [ad(\xi), \alpha] = ad\,(-\alpha(\xi))\,. \tag{2}$$

Ainsi, $\mathfrak{g}$ est un idéal de $Der(\mathfrak{g})$. Comme on a supposé $\mathfrak{g} \neq Der(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{g}$ ($\neq \{0\}$) est un idéal propre de $Der(\mathfrak{g})$.

La contradiction que nous cherchons est la suivante : Si l'on trouve un autre idéal propre J de $Der(\mathfrak{g})$ qui vérifie $J \cap \mathfrak{g} = \{0\}$, alors on aura, pour tout $\delta \in J$ et tout $\xi \in \mathfrak{g}$, $[\xi, \delta] \in J \cap \mathfrak{g} = \{0\}$, ce qui, par l'équation 2 et injectivité de ad, donne $\delta = 0$ et contredit que J est propre.

Avant de chercher J, utilisons l'hypothèse de l'existence d'un point critique pour F : Le lemme 5.3 fournit une structure euclidienne telle que l'algèbre de Lie de G_w, c'est-à-dire $Der(\mathfrak{g})$ (c.f. la proposition 7.14 de l'appendice), soit stable par la transposition induite.

Pour trouver J, on peut donc s'intéresser à l'application involutive $\alpha \longmapsto -\alpha^T$ de $Der(\mathfrak{g})$. Il suffit d'écrire, pour $(x, y) \in Der(\mathfrak{g})^2$,

$$\begin{aligned}
-[x,y]^T &= -(xy - yx)^T \\
&= -(y^T x^T - x^T y^T) \\
&= x^T y^T - y^T x^T \\
&= (-x)^T(-y)^T - (-y)^T(-x)^T \\
&= [-x^T, -y^T].
\end{aligned}$$

[6]Elle équivaut à la semi-simplicité par la proposition 7.4 de l'appendice.

On voit alors qu'il s'agit d'un automorphisme d'algèbre de Lie, ce qui prouve que $\mathfrak{g}^T(= -\mathfrak{g}^T)$ est un idéal de $Der(\mathfrak{g})$ et fait un bon premier candidat pour J.

Cependant, on ne peut montrer directement que l'on obtient $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{g}^T = \{0\}$. Il nous faut donc un idéal de secours au cas où l'égalité précédente ne serait pas vérifiée.

On introduit donc la forme bilinéaire $B : (\alpha, \beta) :\longmapsto Tr(\alpha\beta)$ sur $Der(\mathfrak{g})$. Ce dernier étant stable par la transposition, on a pour tout $\alpha, B(\alpha, \alpha^T) = |\alpha|^2$. La forme B est donc non dégénérée.

Dans $Der(\mathfrak{g})$, le crochet de Lie est l'application usuelle $(\alpha, \beta) \longmapsto \alpha\beta - \beta\alpha$. On a alors :
$\forall \alpha, \beta, \gamma \in Der(\mathfrak{g})$,

$$\begin{aligned} B([\alpha, \beta], \gamma) &= \operatorname{Tr}((\alpha\beta - \beta\alpha)\gamma) \\ &= \operatorname{Tr}(\alpha\beta\gamma) - \operatorname{Tr}(\beta\alpha\gamma) \\ &= \operatorname{Tr}(\beta\gamma\alpha) - \operatorname{Tr}(\beta\alpha\gamma) \\ &= \operatorname{Tr}(\beta(\gamma\alpha - \alpha\gamma)) \\ &= -B(\beta, [\alpha, \gamma]) \ . \end{aligned}$$

La forme bilinéaire B vérifie donc :

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in Der(\mathfrak{g}), B([\alpha, \beta], \gamma) + B(\beta, [\alpha, \gamma]) = 0. \tag{3}$$

On définit alors le sous-espace $\mathfrak{g}^\perp$ par :

$$\mathfrak{g}^\perp = \{\alpha \in Der(\mathfrak{g}) \mid \forall \xi \in \mathfrak{g}, B(\alpha, ad_\xi) = 0\}$$

Soit $\alpha \in \mathfrak{g}^\perp$ et $\beta \in Der(\mathfrak{g})$, montrons que $[\alpha, \beta] \in \mathfrak{g}^\perp$.
Soit donc $\xi \in \mathfrak{g}$,
Par antisymétrie du crochet, puis par l'équation 7.4, on peut écrire :

$$\begin{aligned} B([\alpha, \beta], ad_\xi) &= -B([\beta, \alpha], ad_\xi) \\ &= B(\alpha, [\beta, ad_\xi]) \\ &= B(\alpha, ad_{-\beta(\xi)}) \\ &= 0 \ , \end{aligned}$$

la dernière assertion venant du fait que $\alpha \in \mathfrak{g}^\perp$.
On a donc montré que $[\mathfrak{g}^\perp, Der(\mathfrak{g})] \subseteq \mathfrak{g}^\perp$. Et le sous-espace $\mathfrak{g}^\perp$ est un idéal de $Der(\mathfrak{g})$.

Ayant supposé $\mathfrak{g} \neq Der(\mathfrak{g})$, on a alors $\mathfrak{g}^\perp \neq \{0\}$. En effet, si on se donne une base de $Der(\mathfrak{g})$, $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$, avec $\alpha_i = ad_{\xi_i}$ pour $1 \leq i \leq p < n$, on constate que $\mathfrak{g}^\perp \supseteq \bigcap_{1 \leq i \leq p} Ker\left(B\left(., ad_{\xi_i}\right)\right)$ qui est de dimension $n - p > 0$ (car B est non dégénérée).

On dispose donc bien de deux idéaux propres et non nuls de $Der(\mathfrak{g})$.
Si on avait $\mathfrak{g}^T \cap \mathfrak{g} \neq \{0\}$, il existerait $(x, y) \in (\mathfrak{g} - \{0\})^2$ tel que $x = -y^T$. Ainsi, $(y - x)^T = y - x$, et donc $B(y - x, y - x) = |y - x| \neq 0$. Ainsi, la restriction de B à $\mathfrak{g}$ n'est pas identiquement nulle. Or, l'équation 7.4 permet de montrer facilement que $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{g}^\perp$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, qui est simple. Comme ce n'est pas $\mathfrak{g}$ tout entier par ce qui précède, on a finalement $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{g}^\perp = 0$. On a donc enfin notre contradiction.

□

Théorème 5.5. *Sur une algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}$, il existe toujours une involution de Cartan.*

Preuve. Supposons en plus que $\mathfrak{g}$ est simple. Il suffit de montrer que F a un point critique. En effet le lemme 5.3 fournit alors une structure euclidienne pour laquelle $Der(\mathfrak{g})$ est stable par transposition, et le lemme 5.4 indique qu'alors, $Der(\mathfrak{g}) \cong \mathfrak{g}$, ce qui montre que l'on a en fait trouvé une bonne structure pour $\mathfrak{g}$. Supposons que F n'a pas de point critique, G_w fixe alors un point de $\partial P(n)$, donc il fixe un sous-espace non trivial de V (par la Remarque 3.9), donc V est réductible comme représentation de G_w, ce qui contredit le lemme 5.1. La démonstration s'applique au cas semi-simple en écrivant $\mathfrak{g}$ comme somme directe d'algèbres simples (c.f. [OV94] P145 Proposition 3.3). □

Question 2. Peut-on le démontrer directement pour une algèbre de Lie semi-simple par la méthode géométrique ? (Le problème avec la semi-simplicité est que l'on ne peut pas assurer que la représentation de $Aut(\mathfrak{g})$ sur $\mathfrak{g}$ est irréductible.)

La décomposition de Cartan de l'algèbre de Lie induit la décomposition de Cartan d'un groupe de Lie. On peut donc associer à un groupe de Lie semi-simple non compact son espace symétrique.

Théorème 5.6 ([Hel78] P253, P256)**.** *Soit G un groupe de Lie semi-simple non compact d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ une décomposition de Cartan associée à l'involution de Cartan θ et K un sous-groupe de Lie de G de l'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$, alors*

- *K est connexe, fermé et contient le centre Z de G. Le groupe K est compact si et seulement si Z est fini. De plus, K a un unique sous-groupe compact maximal K' qui est aussi compact maximal dans G.*
- *Il existe un automorphisme involutif et analytique, θ, de G dont l'ensemble des points fixes est K et dont la différentielle en e est θ ; la paire (G, K) est une paire symétrique riemannienne.*

5.2 Conjugaison des involutions de Cartan

L'involution de Cartan d'une algèbre de Lie semi-simple est unique à conjugaison par automorphismes intérieurs près. Cela peut se démontrer aussi par la construction géométrique ci-dessus.

Lemme 5.7. *Si F atteint son minimum dans $P(n)$, alors G_w agit transitivement sur l'ensemble des minima.*

Preuve. On reprend les notations du lemme 5.3. On remarque que la fonction $t \longmapsto F(\exp(tS))$ est soit strictement convexe, soit constante. Cette dernière possibilité n'est réalisée que quand $\lambda_i = 0$ pour les i tels que $w_i \neq 0$. Cette fonction est donc constante si et seulement si le groupe à un paramètre $(\exp(tS))_{t\in\mathbb{R}}$ est inclus dans G_w.
Or une géodésique γ passant par un point H de $P(n)$ est l'orbite de H sous l'action d'un groupe à un paramètre de la forme $(\exp(t\sigma))_{t\in\mathbb{R}}$, avec σ un endomorphisme symétrique pour la transposition induite par H.

De manière générale, soit $H = [g] \in P(n)$ et $(\exp(t\sigma))_{t\in\mathbb{R}}$ un groupe à un paramètre du type précédent, donnant une géodésique γ. En notant $g_{i,j}$ les coefficients de g dans la base w_i, il vient :

$$\begin{aligned}
F(\exp(tS)g) &= |\exp(td\rho(S))g.w|_W^2 \\
&= \left|\exp(td\rho(S))\sum_i\sum_j g_{j,i}w_i\right|_W^2 \\
&= \left|\sum_i \exp(t\lambda_i)\left(\sum_j g_{j,i}w_i\right)\right|_W^2 \\
&= \sum_i \left(\sum_j g_{j,i}\right)^2 |w_i|_W^2 \exp(2t\lambda_i).
\end{aligned}$$

On voit que le seul souci pour refaire le raisonnement précédent vient de la somme des coefficients de g. On peut alors écrire $t = t_0 + t_1$ et dire que l'on considère aussi bien l'orbite de $\exp(t_1S)g$ que celle de g. Or $\exp(t_1S)g$ est, dans les matrices, un polynôme en t_1 et la somme sur chaque ligne est un polynôme en t_1 qui est non nul car g est inversible. Ainsi, il n'y a qu'un nombre fini de t_1 qui annulent au moins l'un de ces polynômes. En prenant t_1 tel que cela n'arrive pas, les $\left(\sum_j g_{j,i}\right)^2$ sont non nuls pour tout i, et on a à nouveau que $F\circ\gamma$ est constante si et seulement si le groupe à un paramètre $(\exp(t\sigma))_{t\in\mathbb{R}}$ est inclus dans G_w.

Soit donc H_1 et H_2 deux points en lesquels F atteint son minimum. Il existe une géodésique γ les joignant et elle est de la forme susmentionnée. On a alors que F est constante sur cette géodésique. En effet, si ce n'était pas le cas, la stricte convexité de $F\circ\gamma$ contredirait que F est minimale en H_1[7]. Ainsi le groupe à un paramètre qui représente γ est inclus dans G_w. Ce dernier agit donc bien transitivement sur les minima.

□

Théorème 5.8. *Toutes les involutions de Cartan d'une algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}$ sont conjuguées par $Int\mathfrak{g}$.*

Preuve. C'est exactement ce que dit le lemme. □

Quant à un groupe de Lie, la conjugaison des involutions de Cartan se traduit comme la conjugaison des sous-groupes compacts maximaux dont la démonstration nous donne une autre application de la propriété CAT(0).

Théorème 5.9 ([AB08] P558)**.** *Soit G un groupe d'isométries d'un espace CAT(0) X. Si G stabilise un sous-ensemble non-vide borné de X, alors G fixe un point de X.*

[7]Et en H_2.

Preuve. Cela se déduit du fait que dans un espace CAT(0), chaque sous-ensemble non vide borné admet un unique centre du cercle circonscrit. □

Théorème 5.10 ([Hel78] P256)**.** *Pour un groupe de Lie semi-simple G, le sous-groupe compact maximal est unique à conjugaison près.*

Preuve. Le groupe G agit transitivement sur son espace symétrique G/K qui est CAT(0). Soit K_0 un sous-groupe compact de G, alors K_0 fixe un point de G/K, donc est conjugué à un sous-groupe du stabilisateur d'un point quelconque. Comme K est le produit direct de son sous-groupe compact maximal K' et d'un espace euclidien, K_0 est forcément conjugué à un sous-groupe de K' ; ce qui conclut car K' est aussi compact maximal dans G. □

Remarque 5.2. [Don09] donne une autre démonstration pour le conjugaison des sous-groupes compacts maximaux de $Aut(\mathfrak{g})$ (voir aussi [Oni04] P40), mais il ne semble pas que cette méthode s'applique aux cas général pour un groupe de Lie semi-simple. Il y a aussi une autre démonstration de ce théorème dans [OV94] P147.

Remarque 5.3. On a un corollaire du théorème 5.6 : étant donné une algèbre de Lie réelle de type non-compact $\mathfrak{g}$, il existe un unique espace symétrique M de type non-compact tel que $I(M)$ a pour algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ ([Hel78] P255). On peut donc appeler M l'espace symétrique associé à $\mathfrak{g}$. Chaque point $p \in M$ correspond à une décomposition de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$. Si q est un autre point dans M et $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}' \oplus \mathfrak{p}'$ la décomposition de Cartan correspondante, alors $\mathfrak{k}' = Ad(g)(\mathfrak{k})$ et $\mathfrak{p}' = Ad(g)\mathfrak{p}$ pour tout $g \in G$ tel que $g(p) = q$ ([Ebe96] P71). C'est-à-dire, la conjugaison de la décomposition de Cartan n'est dû qu'au fait que l'action de G sur M est transitive. Il n'est donc pas si étonnant que la conjugaison des sous-groupes compacts maximaux nécessite un argument de plus. De surcroît, si on fixe un point de M, K agit transitivement sur les sous-variétés plates maximales et même sur les chambres de Weyl([Ebe96] P79) (nous remercions Pierre Pansu pour ses explications sur le sujet).

Remarque 5.4. On peut se demander ce qui se passe pour un groupe algébrique semi-simple sur un corps localement compact. En effet, on a l'analogie pour les groupes algébriques semi-simples sur les corps locaux non-archimediens : l'espace symétrique est remplacé par l'immeuble affine (Voir [Ron92b] pour cette analogie), qui est aussi CAT(0), donc les sous-groupes bornés fixent un point. En revanche, l'action du groupe n'est plus transitive, et les sous-groupes compacts maximaux correspondent aux orbites des sommets de l'immeuble affine (c.f. [Ron92a] P32). On en déduit une classification de la classe de conjugaison (c.f. [Bru72]).

5.3 Décomposition de Cartan compatible

On voudrait maintenant étudier le comportement de la décomposition de Cartan sous les morphismes d'algèbres de Lie. Cela permet d'étudier par exemple la structure de fibration d'un espace homogène (voir [Mos55a]).

Théorème 5.11 (c.f. [Mos55b])**.** *Soit $i : \mathfrak{g}' \to \mathfrak{g}$ un morphisme d'algèbres de Lie. Supposons de plus que $\mathfrak{g}$ est simple. Si on se donne une décomposition de Cartan pour $\mathfrak{g}'$, telle que $\mathfrak{g}' = \mathfrak{k}' \oplus \mathfrak{p}'$,alors, il existe une décomposition de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$, telle que $i(\mathfrak{k}') \subset \mathfrak{k}, i(\mathfrak{p}') \subset \mathfrak{p}$.*

Preuve. Notons V' l'espace vectoriel sous-jacent de $\mathfrak{g}'$, x' la bonne structure euclidienne sur V' correspondant à la décomposition de Cartan pour $\mathfrak{g}'$. On cherche une bonne structure euclidienne x sur V telle que $x' = i^*(x)$. Notons $A = \{x \in P(V) | i^*(x) = x'\}$. Alors le gradient de F est toujours tangent à A. Si $F|_A$ atteint son minimum, on a gagné, car x' est une bonne structure euclidienne sur V. Sinon, on raisonne comme dans la démonstration 2 du Théorème 4.1, on obtient un point du bord fixé par G_w, qui contredit la simplicité de $\mathfrak{g}$. □

Question 3. Comment faire directement la preuve pour $\mathfrak{g}$ semi-simple ?

Remarque 5.5. c.f. [Oni04] P46 Corollary 1 pour une démonstration algébrique.

Géométriquement, l'existence de la décomposition de Cartan se traduit comme l'existence d'une orbite totalement géodésique d'un sous-groupe semi-simple.

Théorème 5.12. *Soit G un groupe de Lie semi-simple non compact agissant sur son espace symétrique G/K, G' un sous-groupe de Lie connexe semi-simple de G, alors G' a une orbite totalement géodésique.*

Indication. L'espace symétrique G/K s'identifie à l'espace des involutions de Cartan de G. Alors, l'orbite sous G' d'une involution de Cartan de G compatible avec une involution de Cartan de G' est une orbite totalement géodésique car son espace tangent est un système triple de Lie (c.f. [Hel78] P224). □

6 Discussion

6.1 D'autres approches

Les démonstrations algébriques de l'existence et de l'unicité de l'involution de Cartan se trouvent dans [Kna02] P358, [Oni04] P37 et [OV94] P144. Elles se basent sur le système des racines.

6.2 Réciproque

On peut se poser la question de la réciproque : pour quel type d'algèbres de Lie existe-t-il une bonne structure euclidienne ? La réponse est facile, et c'est un critère utile pour montrer qu'un groupe de Lie est semi-simple.

Proposition 6.1 ([Kna02] P57)**.** *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réelle, si $\mathfrak{g}$ a une bonne structure euclidienne, alors $\mathfrak{g}$ est réductive.*

6.3 Conclusion

Pour conclure, on rappelle que dans la démonstration, il y a deux points assez remarquables. Le premier est le critère pour l'existence du minimum, qui se base sur la construction du bord d'un espace CAT(0). C'est une propriété très liée à la courbure négative. Le second est l'identification entre le bord à l'infini et l'immeuble de Tits sphérique, qui nous ramène au côté algébrique. De ce point de vue, cette démonstration illustre bien l'efficacité de l'étude d'un groupe par son action sur un espace naturellement associé. Pour un groupe de Lie semi-simple, cet espace est son espace symétrique. Les immeubles servent aux groupes plus généraux.

7 Appendice : Rappels sur la théorie des groupes et algèbres de Lie

7.1 Définitions premières

On donne ici quelques définitions de base sur les groupes et les algèbres de Lie, ainsi que quelques résultats usuels que nous utilisons dans les preuves. Etant donné que l'article n'utilise que des objets relativement "sympathiques", on prend le parti de voir les groupes de Lie comme des sous-groupes de $Gl(V)$ (V étant un espace vectoriel), en évitant de se servir de leur définition générale. Nous ne la donnons qu'à titre culturel :

Définition 7.1 (Groupe de Lie)**.** Soit G une variété de classe C^∞. On dit que G est un groupe de Lie si G est un groupe tel que l'application $(x, y) \longmapsto xy^{-1}$ est de classe C^∞.

Exemple 7.2. Si v est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $GL(V)$ est un groupe de Lie. En effet, c'est un ouvert de $End(V)$ et l'application considérée dans la définition est donnée par des fractions rationnelles en chaque coordonnée.

Définition 7.3 (Sous-groupe de Lie)**.** Soit G un groupe de Lie et $G' \subseteq G$ un sous-groupe. On dit que G' est un sous-groupe de Lie de G si c'est une sous-variété de classe C^∞ de G.

Exemple 7.4. Si V est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, les sous-groupes fermés de $GL(V)$ sont des sous-groupes de Lie. Cet énoncé n'est pas immédiat, c'est le théorème de Von Neumann dont la démonstration se trouve dans ou [Kaw91](P.148) encore dans [CL](P.16).

Le cadre de l'article étant plus riche que celui que nous avons décrit, on se restreint à voir les groupes de Lie comme des sous-groupes fermés de $GL(V)$, où V est un espace vectoriel (réel ou complexe) de dimension finie. Les exemples précédents montrent qu'il s'agit d'une restriction raisonnable.

On donne également la définition d'une algèbre de Lie :

Définition 7.5 (Algèbre de Lie)**.** On dit qu'un $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) espace vectoriel $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie réelle (resp. complexe) si $\mathfrak{g}$ est muni d'un application bilinéaire $[\ .\ ,\ .\ ] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, appelée crochet de Lie, vérifiant les deux propriétés suivantes :

- $\forall (x, y) \in \mathfrak{g}^2, [x, y] = -[y, x]$ (anticommutativité) ;
- $\forall (x, y, z) \in \mathfrak{g}^3, [x, [y, z]] + [z, [x, y]] + [y, [z, x]] = 0$ (identité de Jacobi) .

Remarque 7.1. On voit bien que cette définition peut être encore généralisée à des espaces vectoriels sur un corps quelconque. Nous ne gardons ici que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, car le reste s'éloigne trop du cadre du mémoire.

Définition 7.6 (Sous-algèbre de Lie)**.** Un sous-espace vectoriel $\mathfrak{g}'$ d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ si il est stable par le crochet.

On note qu'à un groupe de Lie, on peut toujours associer une algbre de Lie de la façon suivante :

Définition 7.7 (Algèbre de Lie d'une groupe de Lie)**.** Soit G un groupe de Lie. L'algèbre de Lie de G, que nous noterons $Lie(G)$, est l'espace tangent à G en l'identité.

Remarque 7.2. On n'a pas précisé, dans cette définition, le crochet qui permet de munir l'espace tangent d'une structure d'algèbre de Lie. Pour ce faire, on utilise des propriétés des champs de vecteurs sur le groupe G. Nous ne faisons pas cette construction générale[8] ici. Dans le cadre qui nous intéresse, l'algèbre de Lie d'un sous-groupe G de $GL(V)$ (ou V est un espace vectoriel réel ou complexe) est l'espace tangent à G en l'identité, muni du crochet usuel de $End(V)$, c'est-à-dire $(u, v) \longmapsto u \circ v - v \circ u$.

Remarque 7.3. Il existe une correspondance entre groupes de Lie et algèbres de Lie. Ainsi, un sous-groupe de Lie d'un groupe de Lie G correspond à une sous-algèbre de Lie de $Lie(G)$ et inversement. Là encore, ce résultat est seulement culturel et ne sert nulle part dans le mémoire. Pour plus de précisions, on peut consulter [OV93] (section 2.4 P39-40).

Définition 7.8. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réelle ou complexe :

- Un sous-espace vectoriel I de $\mathfrak{g}$ est un idéal si on a :

$$\forall x \in I, \forall y \in \mathfrak{g}, [x, y] \in I.$$

- $\mathfrak{g}$ est dite simple si ses seuls idéaux sont $\mathfrak{g}$ et $\{0\}$ et si $\mathfrak{g}$ n'est pas abélienne (i.e. le crochet n'est pas identiquement nul).

- $\mathfrak{g}$ est dite semi-simple si elle ne possède aucune sous-algèbre de Lie abélienne.

Remarque 7.4. La correspondance évoquées dans la remarque 7.3 permet alors de définir les notions de simplicité et semi-simplicité d'un groupe de Lie[9]. C'est le cas de manière générale pour les propriétés des algèbres de Lie. Ainsi les idéaux d'une algèbre de Lie correspondent aux sous-groupes distingués du groupe de Lie auquel elle est associée, mais ces considérations sont assez éloignées de notre propos.

Signalons tout de même un résultat classique, dont la preuve se trouve par exemple dans la référence donnée dans la preuve du théorème 4.1 ou dans [eRWY05](P.300, proposition 20.1.6 et théorème 20.1.7), mais que nous utilisons de manière cruciale :

Proposition 7.9. *Une algèbre de Lie réelle ou complexe $\mathfrak{g}$ est semi-simple si, et seulement si elle peut s'écrire de manière unique comme somme directe de sous-algèbres de Lie simples.*

On rappelle aussi que les groupes de Lie sont munis d'une application exponentielle de leur algèbre de Lie dans eux-mêmes, de classe C^∞. Dans le cas des espaces de matrices, cette application est donnée par l'exponentielle de matrices usuelle.

[8] Là encore assez longue.

[9] On dit qu'un groupe de Lie est simple (resp. semi-simple) si son algèbre de Lie l'est.

7.2 Représentation adjointe

On donne ici la définition d'une dérivation dans une algèbre de Lie :

Définition 7.10. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réelle ou complexe. Une dérivation de $\mathfrak{g}$ est une application linéaire $\delta : \mathfrak{g} \longmapsto \mathfrak{g}$ vérifiant la propriété suivante :

$$\forall (x,y) \in \mathfrak{g}^2, \delta[x,y] = [\delta x, y] + [x, \delta y].$$

Remarque 7.5. On vérifie sans peine que l'ensemble $Der(\mathfrak{g})$ des dérivations d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est lui-même une algèbre de Lie pour le crochet usuel des endomorphismes.

Exemple 7.11. Si $z \in \mathfrak{g}$ est fixé, l'application $ad(z) : y \longmapsto ad(z)(y) = [z,y]$ est une dérivation, dite intérieure. Qu'il s'agit d'une dérivation suit immédiatement de l'identité de Jacobi et de l'antisymétrie du crochet de Lie. Cette application est en fait très importante dans la théorie des algèbres de Lie.

En fait, cet exemple est très important. La fonction ad que nous avons introduite est appelée la *représentation adjointe* de $\mathfrak{g}$. Par linéarité du crochet, c'est une application linéaire de $\mathfrak{g}$ dans $Der(\mathfrak{g}) \subseteq End(V)$. Mais on a mieux. En effet, il est facile de vérifier que l'on a :

$$\forall (x,y) \in \mathfrak{g}, ad\left([x,y]\right) = ad(x) \circ ad(y) - ad(y) \circ ad(x) = \left[ad(x), ad(y)\right].$$

Ainsi ad est un morphisme d'algèbres de Lie de $\mathfrak{g}$ dans $Der(\mathfrak{g})$. En ajoutant une hypothèse, on a le résultat suivant, dont une preuve est donnée dans [Kna02] (P102) :

Proposition 7.12. *Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie semi-simple réelle ou complexe, alors ad est un isomorphisme entre $\mathfrak{g}$ et $Der(\mathfrak{g})$.*

Donnons une dernière définition liée à la représentation adjointe :

Définition 7.13. Une algèbre de Lie réelle ou complexe $\mathfrak{g}$ est dite réductive si $ad(\mathfrak{g})$ est une algèbre de Lie semi-simple.

7.3 Groupe des automorphismes d'une algèbre de Lie

On donne ici un résultat général important pour la démonstration de l'existence de la décomposition de Cartan :

Proposition 7.14. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réelle ou complexe. Alors l'algèbre de Lie du groupe $Aut(\mathfrak{g})$ des automorphismes d'algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ est $Der(\mathfrak{g})$.*

Preuve. En écrivant $Aut(\mathfrak{g}) = GL(\mathfrak{g}) \cap \big\{g \in End(\mathfrak{g}) \mid \forall (x,y) \in \mathfrak{g}^2, g[x,y] = [gx, gy]\big\}$, on voit que $Aut(\mathfrak{g})$, qui est clairement un groupe, est un fermé de $GL(\mathfrak{g})$ et est donc un groupe de Lie par le théorème de Von Neumann.
Calculons maintenant son algèbre de Lie.
Pour cela, on considère l'action de $GL(\mathfrak{g})$ sur les applications bilinéaires antisymétriques de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}$ donnée par :

Si $g \in GL(\mathfrak{g})$ et B est une application bilinéaire antisymétrique, $g_* B$ est définie par :

$$g_*B : \begin{cases} \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{g} \\ (x, y) & \longmapsto & gB(g^{-1}x, g^{-1}y) \end{cases}$$

Pour cette action, $Aut(\mathfrak{g})$ est exactement le fixateur du crochet de Lie[10]. Raisonnons de manière infinitésimale ; en prenant h dans l'espace tangent à $Aut(\mathfrak{g})$ en l'identité (que nous notons I), si on fixe x et y dans $\mathfrak{g}$, on doit avoir :

$$(I + h) \left[(I + h)^{-1}x, (I + h)^{-1}v\right] - [x, y] = \circ(|h|)$$

où $|.|$ est une norme sur $End(\mathfrak{g})$.
En considérant alors que $(I + h)^{-1} = I - h + \circ(|h|)$, on peut développer l'expression précédente et on obtient :

$$h[x, y] - [hx, y] - [x, hy] + \circ(|h|) = \circ(|h|)$$

Ce qui donne donc :

$$h[x, y] = [hx, y] + [x, hy]$$

Ainsi, h est bien une dérivation.
Et bien sûr, réciproquement, toute dérivation δ vérifie[11] :

$$(I + t\delta) \left[(I + t\delta)^{-1}x, (I + t\delta)^{-1}v\right] - [x, y] = \circ(t)$$

Et l'algèbre de Lie de $Aut(\mathfrak{g})$ est bien $Der(\mathfrak{g})$.

□

7.4 Forme de Killing

On définit enfin un dernier objet intéressant dans la théorie des algèbres de Lie, la *forme de Killing* κ, définie par :

$$\forall(\xi_1, \xi_2) \in \mathfrak{g}^2, \kappa(\xi_1, \xi_2) = \mathrm{Tr}\left(ad(\xi_1)ad(\xi_2)\right).$$

Il s'agit d'une forme bilinéaire symétrique. Nous ne l'utilisons quasiment pas dans le mémoire. Signalons simplement qu'elle permet une nouvelle caractérisation de la semi-simplicité (c.f. [eRWY05]P.300 pour une preuve), bien pratique pour la preuve de la proposition 7.12 :

Proposition 7.15. *Une algèbre de Lie réelle ou complexe $\mathfrak{g}$ est semi-simple si, et seulement si la forme de Killing associée est non dégénérée.*

Références

[AB08] Peter Abramenko and Kenneth S. Brown. *Buildings : theory and applications.* Graduate texts in mathematics. Springer, 2008.

[BH99] Martin R. Bridson and André Haefliger. *Metric Spaces of Non-positive Curvature.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer, 1999.

[10] C'est bien une application bilinéaire antisymétrique de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}$

[11] Il suffit de remplacer h par $t\delta$ et de remonter le calcul en sens inverse.

[BJ06] Armand Borel and Lizhen Ji. *Compactifications of symmetric and locally symmetric spaces.* Theory and Applications Series. Birkhäuser, 2006.

[Bru72] François. Bruhat. Groupes réductifs sur un corps local. *Publications Mathematiques De L Ihes*, 41 :5–251, 1972.

[BS87] Keith Burns and Ralf Spatzier. On topological tits buildings and their classification. *Publications Mathématiques de L'IHÉS*, 65 :5–34, 1987. 10.1007/BF02698933.

[CL] Antoine Chambert-Loir. Introduction aux groupes et algèbres de lie. Cours de master 2 à l'université de Rennes 1, juin 2005, disponible sur http ://perso.univ-rennes1.fr/antoine.chambert-loir/2004-05/lie/lie.pdf.

[Don09] Simon K. Donaldson. Lie algebra theory without algebra. In H. Bass, J. Oesterlé, A. Weinstein, Yuri Tschinkel, and Yuri Zarhin, editors, *Algebra, Arithmetic, and Geometry*, volume 269 of *Progress in Mathematics*, pages 549–566. Birkhäuser Boston, 2009.

[Ebe96] Patrick B. Eberlein. *Geometry of nonpositively curved manifolds.* Chicago lectures in mathematics. University of Chicago Press, 1996.

[eRWY05] Patrice Tauvel et Rupert W.T. Yu. *Lie Algebras And Algebraic Groups.* Springer, Janvier 2005.

[Hel78] Sigurdur Helgason. *Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces*, volume 80 of *Pure and applied mathematics.* New York : Academic Press, 1978.

[Ji06] Lizhen Ji. Buildings and their applications in geometry and topology. *ASIAN J. MATH*, 10 :11–80, 2006.

[Kaw91] Katsuo Kawakubo. *The Theory Of Transformation Groups.* Oxford University Press, 1991.

[Kna02] Anthony W. Knapp. *Lie Groups Beyond an Introduction.* Progress in mathematics. Birkhäuser, 2 edition, 2002.

[Mos55a] G. D. Mostow. On covariant fiberings of klein spaces. *American Journal of Mathematics*, 77(2) :pp. 247–278, 1955.

[Mos55b] G. D. Mostow. Some new decomposition theorems for semi-simple groups. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 14 :31–54, 1955.

[Oni04] Arkady L. Onishchik. *Lectures on real semisimple Lie algebras and their representations.* ESI lectures in mathematics and physics. European Mathematical Society, 2004.

[OV93] Arkady L. Onishchik and Ėrnest Borisovich Vinberg. *Lie groups and Lie algebras I : Foundations of Lie Theory and Lie Transformation Groups.* Encyclopaedia of mathematical sciences. Springer-Verlag, 1993.

[OV94] Arkady L. Onishchik and Ėrnest Borisovich Vinberg. *Lie groups and Lie algebras III : structure of Lie groups and Lie algebras*. Encyclopaedia of mathematical sciences. Springer-Verlag, 1994.

[Ron92a] Mark Ronan. Buildings : Main ideas and applications i. main ideas. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 24(1) :1–51, 1992.

[Ron92b] Mark Ronan. Buildings : Main ideas and applications ii. arithmetic groups, buildings and symmetric spaces. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 24(2) :97–126, 1992.