Variétés toriques et polytopes

S. Timsit - M. Zhykhovich

Table des matières

1 Polytopes simpliciaux

Définition 1. Un polytope est l'enveloppe convexe dans $\mathbf{R}^n$ d'un ensemble fini qui engendre l'espace affine $\mathbf{R}^n$. On note f_i le nombre de faces de dimension i et $f_{-1} = 1$. On a alors l'égalité d'Euler

$$f_0 - f_1 + f_2 - ... + (-1)^{n-1} f_{n-1} + (-1)^n = 1 \, .$$

Un polytope simplicial est un polytope dont les faces de dimension $n-1$ (les facettes) comportent toutes n sommets. On pose pour $0 \leq k \leq n$

$$h_k = \sum_{i=k}^{n} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} f_{n-1-i} \, . \tag{1}$$

Le but de cet exposé sera de montrer les relations de Dehn-Sommerville, c'est à dire,

$$h_k = h_{n-k}, \text{ pour } 0 \leq k \leq n \tag{2}$$

$$h_{k-1} \leq h_k, \text{ pour } 0 \leq k \leq n/2 \, . \tag{3}$$

En effet, en observant que $h_n = 1$, on obtient que la relation (2) est une généralisation de l'égalité d'Euler.

Pour cela, nous utiliserons du théorème de dualité de Poincaré et du théorème Lefschetz "difficile" qui sont des résultats de topologie et géométrie algébrique.

2 Variétés toriques affines

2.1 Cônes polyédraux convexes

Soit N un groupe abélien libre de type fini de base $e_1, \dots, e_n$:

$$N = \mathbf{Z}e_1 \oplus ... \oplus \mathbf{Z}e_n ,$$

et $M = \mathbf{Z}e_1^* \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}e_n^*$ son dual.

Définition 2. Un cône σ dans un espace vectoriel réel $N_{\mathbf{R}}$ de dimension n est polyédral convexe s'il s'écrit

$$\sigma = \{\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r |\ \lambda_1,...,\lambda_r \geq 0\}$$

avec $v_1,...,v_r \in N_{\mathbf{R}}$. On appelle dimension de σ la dimension de l'espace vectoriel $\sigma + (-\sigma)$ qu'il engendre.

Définition 3. On définit le cône dual dans $M_{\mathbf{R}}$ par

$$\sigma^\vee = \{u \in M_{\mathbf{R}} |\ \langle u,v \rangle \geq 0 \text{ pour tout } v \in \sigma\} .$$

Nous présentons maintenant quelques résultats sur les cônes que l'on utilisera par la suite.

(a) Si $v \in \sigma$, il existe $u \in \sigma^\vee$ tel que $\langle u,v \rangle < 0$. On a $(\sigma^\vee)^\vee = \sigma$.

On appelle face de σ toute intersection $\sigma \cap u^\perp$, pour $u \in \sigma^\vee$ (en particulier, σ est une face).
Une facette est une face de codimension 1.

(b) Toute face est un cône polyédral convexe et il n'y a qu'un nombre fini de faces.

(c) Toute intersection de faces est une face. Toute face d'une face est une face. Toute face autre que σ est l'intersection des facettes qui la contiennent.

(d) Si σ engendre $N_{\mathbf{R}}$, on a

$$\sigma = \bigcap_{\tau \text{ facette}} \{v \in N_{\mathbf{R}} |\ \langle u_\tau,v \rangle \geq 0\}$$

(e) Le cône $\sigma^\vee$ est aussi polyédral convexe.

Proposition 4. Les trois conditions suivintes sont équivalentes:

(i) $\{0\}$ est une face de σ;
(ii) σ ne contient pas de droite;
(iii) $\sigma^\vee$ engendre $M_{\mathbf{R}}$.

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) il existe $u \in \sigma^\vee$ tel que $\{0\} = \sigma \cap u^\perp$. Si σ contient une droite D, soit $x \in D$ non nul on a $u(x) \geq 0$ et $u(-x) \geq 0$ donc $u(x) = u(-x) = 0$. Ainsi $x \in \sigma \cap u^\perp$ donc $x = 0$, ce qui est absurde.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) supposons $\sigma^\vee$ n'engendre pas $M_{\mathbf{R}}$, il existe $v \in (\sigma^\vee)^\perp$ non nul. Par conséquent σ contient la droite engendrée par v.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Soit $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ n éléments de $\sigma^\vee$ qui engendre $M_{\mathbf{R}}$. On pose $u = e'_1 + \dots + e'_n$. Il est clair que $\sigma \cap u^\perp = \{0\}$ donc $\{0\}$ est une face de σ. $\square$

On demandera ensuite à nos cônes d'être saillants, c'est-'a-dire de vérifier l'une de ces conditions.

On s'intéressera aux cônes polyédraux convexes rationnels, c'est-à-dire aux cônes convexes σ de $N_{\mathbf{R}}$ engendrés par des vecteurs de N.

(h) Si σ est un cône polyédral convexe rationnel, le semi-groupe $\sigma^\vee \cap M$ est de type fini.

2.2 Construction de la variété associée à un cône polyédral convexe saillant rationnel

Soit $\sigma \in N_{\mathbf{R}}$ un cône polyédral convexe saillant rationnel (on dira désormais cône). On considère le semi-groupe $\sigma^\vee \cap M$ auquel nous allons associer l'algèbre

$$A_\sigma = \mathbf{C}[\sigma^\vee \cap M]$$

construite de la manière suivante: c'est un espace vectoriel de base $(\chi^u)_{u \in \sigma^\vee \cap M}$, la multiplication est définie par $\chi^u \cdot \chi^{u'} = \chi^{u+u'}$. Toute partie génératrice $(u_i)_{1 \leq i \leq s}$ du semi-groupe $\sigma^\vee \cap M$ détermine une partie génératrice $(\chi^{u_i})_{1 \leq i \leq s}$ de l'algèbre A_σ.

Comme $\sigma^\vee \cap M$ est de type fini, A_σ l'est aussi, elle s'écrit donc comme quotient d'un anneau de polynôme $\mathbf{C}[Y_1, \dots, Y_s]$ par un idéal. Comme $\mathbf{C}[Y_1, \dots, Y_s]$

est noétherien cet idéal est engendré par un nombre fini de polynômes $F_1, \ldots, F_m$. La variété algébrique affine X_σ associée au cône σ est par définition le sous-ensemble de $\mathbf{C}^s$ défini par les équations $F_1 = \cdots = F_m = 0$.

Pour un cône σ, on pose

$$U_\sigma = \{u : \sigma^\vee \cap M \to \mathbf{C};\ u(0) = 1,\, u(m+m') = u(m)u(m'),\, \forall\, m,m' \in \sigma^\vee \cap M\}.$$

On vas maintenent construire une bijection $\Phi : X_\sigma \longrightarrow U_\sigma$ et on notera $\varphi_x = \Phi(x)$.

Soit A_σ un quotient d'un anneau de polynôme $\mathbf{C}[Y_1, \ldots, Y_s]$ par un idéal. On peut considerer un point $(y_1, \ldots, y_s)$ de X_σ comme un idéal maximal $(Y_1 - y_1, \ldots, Y_s - y_s)$ de l'algèbre A_σ. D'après le Nullstellensatz cette correspondance est bijective. Par ailleurs à chaque idéal maximal on peut associer bijectivement un morphisme surjectif ψ de $\mathbf{C}$-algèbres de la manière suivante

$$I \longmapsto (\psi : A_\sigma \longrightarrow A_\sigma/I \simeq \mathbf{C})\,.$$

L'application inverse est de la forme

$$(\psi : A_\sigma \longrightarrow \mathbf{C}) \longmapsto Ker\psi.$$

On a donc associé a chaque point x de X_σ un morphisme surjectif de $\mathbf{C}$-algèbre ψ_x.

On peut alors construire un morphisme de semi-groupes $\varphi_x \in U$ comme composé de l'application suivante

$$\sigma^\vee \cap M \longrightarrow A_\sigma$$

$$u \longmapsto \chi^u$$

et de ψ_x. Un point $x \in X_\sigma$ correspond donc à un morphisme φ_x de semi-groupes

$$\sigma^\vee \cap M \longrightarrow (\mathbf{C},\times)$$

$$u \longmapsto \chi^u \longmapsto \psi_x(\chi^u)$$

et cette correspondance est bijective.

Remarque 5. Soit $\{u_1, \ldots, u_s\}$ une partie génératrice du semi-groupe $\sigma^\vee \cap M$. Dans ce cas, la variété X_σ est un sous-ensemble de $\mathbf{C}^s$. D'après la preuve de la proposition précédente, pour un point $x = (x_1, \ldots, x_s) \in X_\sigma$ on a un morphisme $\Phi(x) = \varphi_x$ de la forme suivante: $\varphi_x(u_i) = x_i$, $1 \le i \le s$. Et pour Φ^{-1} on a

$$\Phi^{-1} : U_\sigma \longrightarrow X_\sigma$$

$$\varphi \longmapsto (\varphi(u_1), \ldots, \varphi(u_s)) \ .$$

La variété X_σ contient un point distingué, que l'on notera x_σ. C'est le point associé à l'application

$$\begin{aligned} \varphi_{x_\sigma} : \quad & \sigma^\vee \cap M \longrightarrow (\mathbf{C},\times) \\ u \quad & \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } u \in \sigma^\perp \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

C'est bien un morphisme de semi-groupes, car la somme de deux éléments de $\sigma^\vee$ ne peut être dans $\sigma^\perp$ que s'ils y sont tous les deux.

On va donner quelques exemples de variétés toriques pour des cônes concrets. On fixe $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de N et $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ la base duale de $M_{\mathbf{R}}$.

Exemple 1 Pour le cône $\sigma = \{0\}$ on a $\sigma^\vee = M_{\mathbf{R}}$. Le semi-groupe $\sigma^\vee \cap M = M$ est engendré par $\pm e_1^*, \ldots, \pm e_n^*$ donc

$$A_\sigma = \mathbf{C}[X_1,X_1^-, \ldots, X_n,X_n^-]/(X_1X_1^- - 1, \ldots, X_nX_n^- - 1) \ ,$$

où $X_i = \chi^{e_i^*}$ et $X_i^- = \chi^{-e_i^*}$. Dans ce cas la variété X_σ est isomorphe à $(\mathbf{C}^*)^n$, qui s'appelle le tore $\mathbf{T}^n$ de dimension n. C'est un groupe.

Le point $t = (t_1, \ldots, t_n)$ de $\mathbf{T}^n$ correspond au morphisme de semi-groupes

$$\begin{aligned} M \quad & \longrightarrow (\mathbf{C},\times) \\ (m_1, \ldots, m_n) & \longmapsto t_1^{m_1} \ \ldots \ t_n^{m_n} \ , \end{aligned}$$

qui est en fait un morphisme de groupes $M \longrightarrow \mathbf{C}^*$. Cherchons le point distingué $x_{\{0\}}$. Comme $\sigma^\perp = M$, $\varphi_{x_{\{0\}}}(u) = 1$ pour tout $u \in M$. Ce morphisme correspond au point $(1, \ldots, 1)$ de $\mathbf{T}^n$. Donc $x_{\{0\}} = (1, \ldots, 1)$.

Exemple 2 Si le cône σ est $\mathbf{R}^+ e_1 + \cdots + \mathbf{R}^+ e_n$, on a

$$\sigma^\vee = \mathbf{R}^+ e_1^* + \cdots + \mathbf{R}^+ e_n^* \ .$$

Dans ce cas le semi-groupe $\sigma^\vee \cap M$ est engendré par $e_1^*, \ldots, e_n^*$ et on obtient

$$A_\sigma = \mathbf{C}[X_1, \ldots, X_n] \ .$$

La variété X_σ et $\mathbf{C}^n$. Le point distingué x_σ est $(0, \ldots, 0)$.

Exemple 3 Dans le cas général on considère $\sigma = \mathbf{R}^+ e_1 + \cdots + \mathbf{R}^+ e_m$, où $0 \leq m \leq n$. on a alors $\sigma^\vee = \mathbf{R}^+ e_1^* + \cdots + \mathbf{R}^+ e_m^* + \mathbf{R} e_{m+1}^* + \cdots + \mathbf{R} e_n^*$. Le semi-groupe $\sigma^\vee \cap M$ est engendré par $e_1^*, \ldots, e_m^*, \pm\, e_{m+1}^*, \ldots, \pm\, e_n^*$ et on a

$$A_\sigma = \mathbf{C}[X_1, \ldots, X_m, X_{m+1}, X_{m+1}^{-1}, \ldots, X_n, X_n^{-1}] \ .$$

Dans ce cas la variété $X_\sigma = \mathbf{C}^m \times (\mathbf{C}^*)^{n-m}$ et le point distingué est $x_\sigma = (0, \ldots, 0, 1, \ldots, 1)$.

On remarque les choses suivantes que l'on utilisera par la suite.

(1) Si τ une face de σ, on peut considérer la variété X_τ. Que peut-on dire de X_τ par rapport à X_σ? Par définition il existe $u \in \sigma^\vee \cap M$ tel que $\tau = \sigma \cap u^\perp$. On a en dualisant $\tau^\vee = \sigma^\vee + \mathbf{R}^+(-u)$ donc $\tau^\vee \cap M = (\sigma^\vee \cap M) + \mathbf{N}(-u)$ et $A_\tau = A_\sigma[\chi^{-u}]/(\chi^u \chi^{-u} - 1)$. La variété X_τ s'identifie donc au complémentaire dans X_σ de la sous-varété définie par $\chi^u = 0$.

En particulier, chaque X_σ contient $X_{\{0\}} = \mathbf{T}^n$ comme ouvert. On dira que X_σ est de dimension (complexe) n.

(2) Une propriété importante de variétés toriques est l'action du tore $\mathbf{T}^n$ ($\mathbf{T}^n$ est un groupe) sur ces variétés. On construit cette action de la manière suivante. Un point x de X_σ correspond à un morphisme de semi-groupes $\varphi_x : \sigma^\vee \cap M \longrightarrow \mathbf{C}$ et un point t de $\mathbf{T}^n$ correspond à un morphisme de groupes $\varphi_t : M \longrightarrow \mathbf{C}^*$ donc la restriction $\varphi_{t|\sigma^\vee \cap M} : \sigma^\vee \cap M \longrightarrow \mathbf{C}$ est un morphisme de semi-groupes. On definit $t.x$ comme le point de X_σ qui correspond au morphisme $\varphi_{t|\sigma^\vee \cap M} \cdot \varphi_x$. On peut écrire la loi de cette action comme

$$\varphi_{t.x} = \varphi_{t|\sigma^\vee \cap M} \cdot \varphi_x$$

Lorsque $\sigma = \{0\}$, c'est la loi de groupe de $\mathbf{T}^n$. Si τ est une face de σ, l'inclusion $X_\tau \subset X_\sigma$ définie ci-dessus est équivariante pour l'action de $\mathbf{T}^n$.

En effet avec les notations du point (1) un point x de X_σ appartient à X_τ si et seulement si lui correspond un morphisme $\varphi_x : \sigma^\vee \cap M \longrightarrow \mathbf{C}$, tel que $\varphi_x(u) \neq 0$. Si $\varphi_x(u) \neq 0$ alors $\varphi_{t.x}(u) = \varphi_{t|\sigma^\vee \cap M}(u)\varphi_x(u) \neq 0$ et donc $t.x$ appartient à X_τ.

Proposition 6. L'action de $\mathbf{T}^n$ sur X_σ a un point fixe si et seulement si σ engendre l'espace vectoriel $N_{\mathbf{R}}$. Dans ce cas le point fixe est le point distingué x_σ.

Démonstration. En effet, si x est un point fixe alors $\varphi_{t.x} = \varphi_x$ pour tout t dans $\mathbf{T}^n$, c'est-à-dire $\varphi_t(u)\varphi_x(u) = \varphi_x(u)$ pour tout $t \in \mathbf{T}^n$ et pour tout

$u \in \sigma^\vee \cap M$. Si $u \neq 0$ il existe $t \in \mathbf{T}^n$ tel que $\varphi_t(u) \neq 1$ donc on a $\varphi_x(u) = 0$ pour tout $u \neq 0$. Si σ engendre $N_{\mathbf{R}}$ alors $\sigma^\perp = \{0\}$ et donc x est le point distingué x_σ. Si σ n'engendre pas $N_{\mathbf{R}}$, le cône $\sigma^\vee$ contient une droite donc deux points opposés non nuls u et $-u$, pour lesquels $\varphi_x(u)\varphi_x(-u) = \varphi_x(0) = 1$, de sorte que x n'est pas fixe. □

Proposition 7. L'orbite O_σ de x_σ sous l'action de $\mathbf{T}^n$ est isomorphe à $\mathbf{T}^{n-\dim(\sigma)}$. Si on note X'_σ la variété torique associée au cône σ et au sous-réseau N_σ de N engendré par $\sigma \cap N$, on a une décomposition

$$X_\sigma \simeq X'_\sigma \times O_\sigma$$

Démonstration. On peut écrire $N = N_\sigma \oplus N''$ et donc pour le reseau dual on a $M = M' \oplus M''$, où M' est un réseau dual de N_σ et $M'' = \sigma^\perp \cap M$. On a donc $\sigma^\vee \cap M = (\sigma^\vee \cap M') \oplus M''$ et ainsi une décomposition $U_\sigma = U_{\sigma, N_\sigma} \times Hom(M'',\mathbf{C}^*)$.
Pour $t \in \mathbf{T}^n$ et $u \in M$ on a:

$$\varphi_{t.\,x_\sigma}(u) = \varphi_{t|\sigma^\vee \cap M}(u)\varphi_{x_\sigma}(u) = \begin{cases} \varphi_t(u) & \text{si } u \in M'' = \sigma^\perp \cap M \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc $\{\varphi_{t.\,x_\sigma}, t \in \mathbf{T}^n\} = \{0\} \times Hom(M'',\mathbf{C}^*)$. Si on pose $k = n - \dim(\sigma)$ alors on peut choisir une famille $(u'_1,...,u'_s,u_1, -u_1,...,u_k, -u_k)$ de générateurs du semi-groupe $\sigma^\vee \cap M$ tel que $u'_1,...,u'_s$ engendre $\sigma^\vee \cap M'$ tandis que $(u_1, ..., u_k)$ est une base de $\sigma^\perp \cap M$. On a

$$O_\sigma = \Phi^{-1}(\{\varphi_{t.\,x_\sigma}, t \in \mathbf{T}^n\}) = \{(0,...,0,\varphi_t(u_1),\varphi_t(u_1)^{-1},...,\varphi_t(u_k),\varphi_t(u_k)^{-1}); t \in \mathbf{T}^n\}.$$

Ce dernièr ensemble est evidement isomorphe à $\mathbf{T}^{n-\dim(\sigma)}$. Ainsi on a

$$X_\sigma = \Phi^{-1}(U_\sigma) = \Phi^{-1}(U_{\sigma, N_\sigma} \times Hom(M'',\mathbf{C}^*)) =$$

$$\{(\varphi_1(u'_1),...,\varphi_1(u'_s),\varphi_2(u_1),\varphi_2(u_1)^{-1},...,\varphi_2(u_k),\varphi_2(u_k)^{-1}); \varphi_1 \in U_{\sigma, N_\sigma}, \varphi_2 \in Hom(M'',\mathbf{C}^*))\}$$

qui est donc isomorphe à $X'_\sigma \times O_\sigma$. □

3 Variétés toriques générales

3.1 Éventails et variétés toriques

Définition 8. Un éventail est un ensemble fini de cônes dans $N_{\mathbf{R}}$ tel que:

- toute face d'un cône de Δ est dans Δ;
- l'intersection de deux cônes de Δ est une face de chacun de ces deux cônes

À tout éventail, on peut associer une variété torique plus générale X_Δ, pour cela, on lui associe l'ensemble des variétés affines $(X_\sigma)_{\sigma\in\Delta}$, puis on recolle les variétés le long de leur intersection. En effet, soit σ et τ deux cônes de Δ, on effectue le recollement, en considérant la sous-variété ouverte $X_{\sigma\cap\tau}$ puis l'application qui identifie les éléments de X_σ aux éléments de X_τ sur l'ouvert commun $X_{\sigma\cap\tau}$. Nous verrons l'identification plus en détail sur des exemples.
Par ailleurs, cette variété est séparée, connexe (deux variétés toriques affines ont toujours un ouvert non vide en commun) et de dimension n et comme $\mathbf{T}^n$ est contenu dans toutes les variétés toriques affines, il est aussi inclus dans X_Δ. Comme le tore $\mathbf{T}^n$ agit sur chaque X_σ, on peut prolonger cette action a X_Δ. D'après un résultat précédent, les points fixes de cette action sont les x_σ lorsque σ apartient á l'éventail et engendre $N_{\mathbf{R}}$.

Exemple 4 On considére l'éventail $\Delta_1 = \{\mathbf{R}^-,\{0\},\mathbf{R}^+\}$ dans $\mathbf{R}$. Les variétés $X_{\mathbf{R}^-}$,$X_{\{0\}}$ et $X_{\mathbf{R}^+}$ sont respectivement isomorphes $\mathbf{C}$, $\mathbf{C}^*$ et $\mathbf{C}$.

Plus précisément, on écrit $X_{\mathbf{R}^-} = \{(x,1)$ tels que $x \in \mathbf{C}\}$ et $X_{\mathbf{R}^+} = \{(1,y)$ tels que $y \in \mathbf{C}\}$, on va donc effectuer le recollement sur l'ouvert $X_{\{0\}} = \mathbf{C}^*$, autrement dit si $x \in \mathbf{C}^*$ $(1,x)$ on associe $(x^{-1},1)$ dans un sens et de même dans l'autre sens. On obtient ainsi la variété $\mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}$. Soit $x = (x_1,x_2) \in \mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}$ on peut supposer que $x_1 \neq 0$, il est clair que $x \in X_{\mathbf{R}^+}$, donc $\mathbf{P}^1_{\mathbf{C}} \subset X_{\Delta_1}$, l'autre inclusion étant claire, on l'égalité cherchée.

Exemple 5 Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base de N, on pose $e_0 = -(e_1+...+e_n)$ et on considère l'éventail Δ_n des cônes engendrés par les parties propres de $\{e_0,e_1,\dots,e_n\}$. Il y a $n+1$ cônes de dimension n, chacun définit une variété affine isomorphe à $\mathbf{C}^n$. On peut identifier ces variétés aux cartes affines de $\mathbf{P}^n$ avec un recollemant identique à celui de $\mathbf{P}^n$. La variété X_{Δ_n} est donc l'espace projectif $\mathbf{P}^n$., l'action du tore est alors définie par

$$(t_1,\dots,t_n).[x_0 : x_1 : \dots : x_n] = [x_0 : t_1x_1 : \dots : t_nx_n]$$

les point fixes de cette action sont les $n+1$ points de coordonnées

$$[1 : 0 : \dots : 0], [0 : 1 : 0 : \dots : 0], \dots, [0 : \dots : 0 : 1]$$

On admettra le résultat suivant

Proposition 9. Une varété X_Δ est compacte si et seulement si $\bigcup_{\sigma\in\Delta}\sigma = N_{\mathbf{R}}$. On dit dans ce cas que l'éventail Δ est complet.

3.2 Lissité des variétés toriques

D'après la définition de lissité, la variété algébrique X_σ est lisse au point x si et seulement si l'idéal maximal m_x de A_σ correspondant à x vérifie

$$\dim_C(m_x/m_x^2) = n\,.$$

Proposition 10. Une varété X_σ est lisse si et seulement si σ est engendré par une partie d'une base de N

Démonstration. Soit σ un cône engendré par une partie $\{e_1,\dots,e_m\}$ d'une base $\{e_1,\dots,e_n\}$, $0\le m\le n$. D'après l'exemple 2, dans ce cas $X_\sigma = \mathbf{C}^m \times (\mathbf{C}^*)^{n-m}$ et donc la variété est lisse.

Inversement, soit X_σ une variété lisse. Supposons d'abord que σ engendre $N_{\mathbf{R}}$. Soit m un idéal maximal de A_σ correspondant à x_σ. D'aprés la preuve de la proposition 5, on a $m = Ker\psi_{x_\sigma}$, où $\psi_{x_\sigma} : A_\sigma \to \mathbf{C}$ est un morphisme surjective de $\mathbf{C}-$algèbre qui est définit sur la base $(\chi^u)_{u\in\sigma^\vee\cap M}$ de la manière suivante $\psi_{x_\sigma}(\chi^u) = \varphi_{x_\sigma}(u)$. Par définition d'un point x_σ on a $\psi_{x_\sigma}(\chi^u) = \varphi_{x_\sigma}(u) = 0$, si $u\ne 0$ et $\psi_{x_\sigma}(\chi^o) = \psi_{x_\sigma}(1) = 1$. Donc $m = Ker\psi_{x_\sigma}$ est engendré par les χ^u, $u\in\sigma^\vee\cap M, u\ne 0$. Ainsi m^2 est engendré par tous les u qui sont somme de deux éléments de $\sigma^\vee\cap M$. Soit (u_1),...,(u_s) les côtes de $\sigma^\vee$, où u_1,...,u_s sont les prémieres points sur ces côtes qui appartiennent à M. On peut verifier qu'une famille $(\chi^{u_i}, 1\le i\le s)$ est linéairement indépendente dans un $\mathbf{C}$-espace vectoriel m/m^2. D'après le critère de lissité en x_σ on a $\dim_C(m_x/m_x^2) = n$. Alors $s = n$ et les $(\chi^{u_i}, 1\le i\le s)$ forment une base d'un $\mathbf{C}$-espace vectoriel m/m^2, ainsi u_1,...,u_{n-1} et u_n engendrent $\sigma^\vee\cap M$. Comme $\sigma^\vee\cap M$ engendre M comme groupe, $(u_1$,...,$u_n)$ une base de M.
Dans le cas générale, d'après un proposition 8 on a

$$X_\sigma \simeq X'_\sigma \times O_\sigma \simeq X'_\sigma \times \mathbf{T}^{n-\dim(\sigma)}$$

Donc si X_σ est lisse, X'_σ l'est aussi et d'aprés le cas précédent, σ est engendré par une base de $N_\sigma = \sigma\cap N + (-\sigma\cap N)$. □

Comme X_Δ est lisse si et seulement si pour chaque cône σ de Δ la varité X_σ est lisse, on a un proposition suivante.

Proposition 11. La variété X_Δ est lisse si et seulement si chaque cône de Δ est engendré par une partie d'une base de N.

Lorsque σ est simplicial, c'est-à-dire qu'il est engendré par $\dim(\sigma)$ éléments de N, la variété X_σ n'a que des singularités quotient. Si tous les cônes σ de Δ sont simpliciaux, on dit que Δ est un éventail simplicial, X_Δ n'admet alors que des singularités quotient.

3.3 Topologie des variétés toriques

Lemme 12. Pour tout éventail Δ, on a

$$X_\Delta = \bigsqcup_{\sigma\in\Delta} O_\sigma \, ,$$

où O_σ est l'orbite de $x_\sigma \in X_\sigma \subset X_\Delta$ sous l'action de $\mathbf{T}^n$.

Démonstration. Pour l'orbite $O_\sigma \subset X_\sigma$, on a

$$\Phi(O_\sigma) = \{\varphi \in U_\sigma \text{ tel que } \varphi(u) \neq 0, \text{ si } u \in \sigma^\perp \cap M \text{ et } \varphi(u) = 0 \text{ sinon}\} \, .$$

Soit $\tau = \sigma \cap u^\perp$ une face propre de σ et $x \in X_\tau \subset X_\Delta$. Alors $\varphi_x(u) \neq 0$ et comme u n'est pas dans $\sigma^\perp \cap M$, on a $x \notin O_\sigma$. Ainsi pour chaque face propre τ de σ l'intersection $O_\sigma \cap X_\tau$ est vide. Cela implique que pour deux cônes différents $\sigma_1 \in \Delta$ et $\sigma_2 \in \Delta$ les orbites O_{σ_1} et O_{σ_2} sont aussi différentes (sinon l'intersection $O_{\sigma_1} \cap X_{\sigma_1\cap\sigma_2}$ n'est pas vide).
Il reste á montrer que chaque $x \in X_\Delta$ appartient à une orbite O_σ pour un certain cône $\sigma \in \Delta$. On peut choisir un cône $\sigma \in \Delta$ de dimension minimale, tel que $x \in X_\sigma$. On a $\varphi_x(u) = 0$ pour $u \in \sigma^\vee \cap M, u \notin \sigma^\perp \cap M$, car sinon $x \in X_\tau$, où τ est une face propre de σ. Donc $\varphi_x \in \Phi(O_\sigma)$ c'est-à-dire $x \in O_\sigma$. $\square$

Soit Δ un éventail. On veut maintenant calculer les nombres de Betti de X_Δ, définis par $b_i(X_\Delta) = \dim(H^i(X_\Delta,\mathbf{R}))$. On notera d_j le nombre de cônes de dimension j dans Δ.

Théorème 13. Pour tout éventail Δ simplicial et complet, on a

$$b_{2k}(X_\Delta) = \sum_{i=k}^{n} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} d_{n-i} \tag{4}$$

les nombres de Betti impairs étant nuls.

Démonstration. On admet le fait qu'il existe, pour toute variété algébrique complexe X, un polynôme P_X qui vérifie:

– si X est compacte et n'a que des singularités quotient, $P_X(t) = \sum_i b_i(X)t^i$;

– si Y est une sous-variété fermée de X, on a $P_X(t) = P_Y(t) + P_{X-Y}(t)$;

– si X et Y sont des varétés, on a $P_{X\times Y}(t) = P_X(t)P_Y(t)$.

On a

$$P_{\mathbf{C}^*}(t) = P_{\mathbf{P}^1-\{0,\infty\}}(t) = P_{\mathbf{P}^1}(t) - P_{\{0,\infty\}}(t) = t^2 + 1 - 2 = t^2 - 1$$

En utilisant le lemme 11, on déduit

$$P_{X_\Delta}(t) = \sum_{\sigma\in\Delta} P_{O_\sigma}(t) = \sum_{\sigma\in\Delta} P_{\mathbf{T}^{n-\dim(\sigma)}}(t) = \sum_{\sigma\in\Delta}(t^2-1)^{n-\dim(\sigma)}\,.$$

En comparant les coefficients des polynômes P_X et $\sum_{\sigma\in\Delta}(t^2-1)^{n-\dim(\sigma)}$ on obtient (4). □

3.4 Démonstration des relations de Dehn-Sommerville

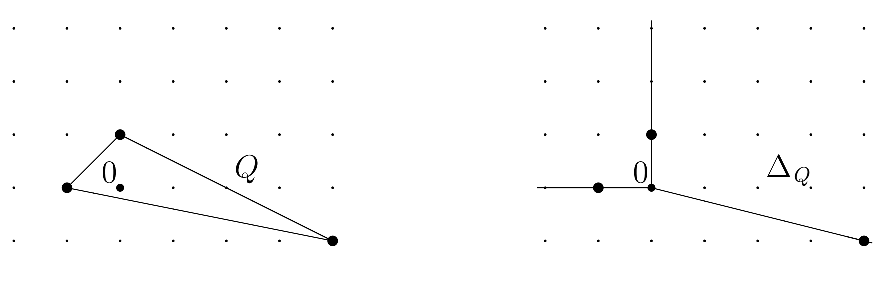
Soit Q un polytope dans $N_{\mathbf{R}}$. Une face (propre) de Q est un sous-ensemble de Q du type

$$\{v \in Q | \langle u,v\rangle = c\}$$

où $u \in M_{\mathbf{R}}$ et $c \in \mathbf{R}$ sont tel que $\langle u,v\rangle \geq c$ sur Q.

Tout polytope simplicial dans $N_{\mathbf{R}}$ peut être approximé sans changer sa combinatoire par un polytope simplicial Q à sommets dans $N_{\mathbf{Q}}$. On peut supposer que Q contient l'origine dans son intérieur (sinon on peut le deplacer). On associe à Q un éventail Δ_Q des cônes engendrés par les faces de Q.

Exemple Pour un polytope Q (à gauche) on associe l'éventail Δ_Q(à droite).



Pour l'évantail Δ_Q on peut considérer la variété torique X_{Δ_Q} (on notera plus simplement X_Q) de dimension complexe n. Comme Δ_Q est simplicial et complet, la variété X_Q est compacte à singularités quotient. Le nombre d_i de cônes de dimension i dans Δ est, avec les notations de la section 1, le nombre f_{i-1} de faces de dimension $i-1$ de Q (on a défini $f_{-1}=1$). Les nombres de Betti $b_{2k}=\dim(H^{2k}(X_Q,\mathbf{R}))$ sont donc, par le théorème 12, les nombres h_k définis en section 1.

Pour toute variété complexe compacte X, il existe pour chaque entier i et chaque entier j une opération

$$\smile_{i,j}:\ H^i(X,\mathbf{R})\times H^j(X,\mathbf{R})\longrightarrow H^{i+j}(X,\mathbf{R})\,,$$

dite cup-produit. On utilise maintenant deux théorèmes fondamentaux valables lorsque X est à singularités quotient.

1. La dualité de Poincaré dit que si n est la dimension complexe de X, pour tout entier i, $0\le i\le 2n$, le cup-produit

$$\smile_{i,2n-i}:\ H^i(X,\mathbf{R})\times H^{2n-i}(X,\mathbf{R})\longrightarrow H^{2n}(X,\mathbf{R})\simeq\mathbf{R}$$

est une forme bilinéaire non dégénérée. Cela implique que $\dim(H^i(X,\mathbf{R}))=\dim(H^{2n-i}(X,\mathbf{R}))$ et donc $b_i(X)=b_{2n-i}$. En particulier $b_2i(X)=b_{2n-2i}$ pour $0\le i\le n$. En appliquant ce résultat à la variètè X_Q, avec le théorème 12, on obtient les relations de Dehn-Sommerville (2) pour les polytopes simpliciaux.

2. Ensuite, le théorème de Lefschetz difficile dit qu'il existe une classe h dans $H^2(X,\mathbf{R})$ tel que les cup-produits par h

$$\smile_{i-2,2}\ h\ :\ H^{i-2}(X,\mathbf{R})\longrightarrow H^i(X,\mathbf{R})\,,$$

soient injectifs pour $2i\le n$. On en déduit, avec le théorème 12, les relations (3) pour les polytopes simpliciaux.

4 Bibliographie

[1] Olivier Debarre, *Variétés torique et polytopes*, note de cours donnée à l'École Normale Supérieure en Novembre 2002,
http://www-irma.u-strasbg.fr/ debarre/coursENS.pdf

[2] William Fulton, *Introduction to Toric Varieties*, Princeton University Press.

Nous tenons également à remercier ici David Madore pour ses conseils avisés au sujet de notre mémoire.