Autour de la théorie homotopique de Morel-Voevodsky

Sam Zoghaib
Mémoire encadré par Denis-Charles Cisinski

Mon mémoire de M2 porte sur la théorie homotopique de Morel et Voevodsky et quelques applications montrant comment elle permet d'obtenir d'une part de manière quasi-formelle des résultats déjà connus pour des cas simples (typiquement dans les espaces topologiques) et d'autre part des résultats similaires dans un contexte plus large.

Une première motivation de la théorie homotopique de Morel et Voevodsky est de définir une théorie homotopique des schémas. Des résultats très importants de cette théorie ont trait à la possibilité de faire un certain nombre de constructions de la topologie algébrique dans le cadre des schémas, ce qui permet d'en déduire la représentabilité «à homotopie près» de théories cohomologiques.

Une deuxième motivation est d'avoir un cadre valable dans un contexte géométrique très général pour faire de la topologie algébrique, englobant la théorie homotopique usuelle des des variétés topologiques ou différentielles, mais permettant aussi d'étudier des objets géométriques plus compliqués ou abstraits. Si on se donne une notion abstraite de variété, on souhaite pouvoir définir, entre autres, la notion d'homotopie entre morphismes de variétés, et en déduire si possible de manière aussi proche de l'intuition et des définitions usuelles les équivalents des notions usuelles (par exemple de groupe fondamental). On souhaite aussi bien évidemment retrouver les résultats auxquels on s'attend (par exemple que le π_1 d'une variété contractile soit le groupe trivial). Enfin, on souhaite également pouvoir définir une notion d'*intervalle*, qui joue un rôle central en topologie algébrique classique.

De manière peut-être un peu surprenante, historiquement, le développement de la théorie abstraite de l'homotopie s'est faite essentiellement du plus général vers le plus particulier. Les travaux de Quillen ([1]) définissent un cadre extrêmement général où les notions usuelles d'homotopie ont un sens, à savoir celui des *catégories de modèles fermée*. Il s'agit essentiellement des catégories dans lesquelles les notions homotopiques fondamentales ont un sens. Ensuite viennent des exemples plus concrets, et surtout, *géométriques*, de telles catégories qui permettent de voir qu'il s'agit d'un cadre raisonnable pour s'atteler au problème de définir une théorie homotopique pour des variétés aussi genérales que possible.

Les travaux de Joyal et Jardine (voir par exemple [2]) vont dans ce sens, en montrant que l'on peut obtenir une telle catégorie de modèles fermée à partir d'objets géométriques très généraux déjà bien connus, les *topos* ([3])[1], munis d'une structure simpliciale permettant de mimer les constructions usuelles de la topologie algébrique. Il s'agit là de résultats d'importance capitale puisque qu'ils ramènent l'étude homotopique d'une variété V (qu'elle soit topologique, différentielle ou algébrique) à l'étude de la théorie homotopique du topos des faisceaux sur V ou des faisceaux sur les variétés aux dessus de V.

Ensuite viennent les résultats de Morel et Voevodsky (voir par exemple [5]) qui rajoutent une notion d'intervalle et établissent une théorie homotopique prenant en compte l'intervalle. Ceux-ci permettent de retrouver la théorie homotopique usuelle (des CW-complexes par exemple, en utilisant l'intervalle $[0;1]$, ou des espaces topologiques localement contractiles munies d'un intervalle contractile, voir [6]) mais surtout permettent de définir de manière plus satisfaisante une théorie homotopique en géométrie algébrique (l'application phare de l'article [5] est celui de la théorie homotopique des schémas lisses sur une base), où la droite affine $\mathbb{A}^1$ joue le rôle de l'intervalle.

Dans ce texte, nous donnons un apercu de la théorie de l'homotopie de Morel et Voevodsky au travers des deux motivations évoquées ; le fil conducteur sera le problème de la classification des G-torseurs sur une variété. En premier lieu nous le considèrerons dans le cas topologique, et nous en donnerons une interprétation homotopique à l'aide des outils de la théorie de Morel et Voevodsky, dont nous expliquerons les grandes lignes de la construction, ce qui nous permettra au passage de vérifier qu'elle coincide, sous de bonnes hypothèses, avec la théorie homotopique usuelle. Puis, à titre d'ouverture, nous citerons quelques résultats sur les espaces classifiants de schémas en groupes obtenus *via* la théorie homotopique des schémas.

L'ensemble de la théorie repose sur des bases catégoriques assez lourdes, et le lien avec les objets géométriques découle de résultats usuels de théorie des topos (presque tous contenus dans [3]). Nous nous efforçons ici de donner une présentation nécessitant peu de formalisme, ce qui impose en contrepartie de ne décrire les constructions que dans les grandes lignes. Le lecteur intéressé par plus de détails pourra consulter [6], ou bien évidemment [5].

1 Classification des torseurs

Nous voulons définir une cohomologie non-abélienne en degré 1, de sorte que $H^1(X, G)$, où X est un espace topologique[2] et G un groupe non nécessairement abélien, classifie les G-torseurs sur X. Nous définirons ce H^1, puis nous en verrons une description plus concrète via la cohomologie de Čech.

Les constructions que nous présentons dans cette section peuvent être réalisées en se restreignant à des espaces topologiques. Toutefois, un des interêts de la théorie homotopique abstraite étant d'être valable dans un cadre beaucoup plus large, il est utile de donner des constructions qui restent valables dans le

[1] signalons toutefois la thèse d'Ilusie ([4]) qui prédate les travaux de Joyal et Jardine , mais où figurent de nombreux résultats de nature homotopique dans le cadre des topos, formulés dans un langage différent.

[2] pas trop pathologique.

cas général. Nous nous plaçons dans le cadre des *faisceaux* sur les espaces topologiques, ce qui permet d'exposer les idées de la construction générale tout en gardant une bonne intuition des objets que l'on considère.

Soit T la catégorie des espaces topologiques, dont les flèches sont évidemment les applications continues. On a une notion de recouvrement d'un objet de T, une famille d'applications continues $\{U_i \to U\}$ étant dite couvrante si l'application $\bigsqcup U_i \to U$ est surjective, ce qui permet de définir une notion de faisceau d'ensemble sur T, de manière similaire à la définition usuelle : on veut qu'une application continue $U \to V$ induise une application $F(V) \to F(U)$, et que l'on puisse recoller des sections coincidant sur un recouvrement en une unique section globale. On note $\widetilde{T}$ la categorie des faisceaux sur T. Une categorie de faisceaux est appelée un *topos*. Remarquons qu'on peut associer à un objet de T un faisceau par $U \mapsto \mathrm{Hom}(-, U)$. Enfin, étant donné un faisceau en groupes[3] G sur T, le terme de G-objet ou de G-faisceau désigne un faisceau sur lequel agit G.

Les actions de groupes considérées seront, sauf mention du contraire, des actions à droite. Il va de soi que le même travail peut être fait avec des actions à gauche. Un certain nombre d'exemples seront donnés dans le langage topologique pour plus de clarté, il va de soi qu'ils peuvent être traduits en langage «faisceautique».

Définition 1.1. Soit X un faisceau sur T. Un *G-torseur* ou *G-fibré principal homogène* sur X est la donnée d'un $Y \in \widetilde{T}$ muni d'un épimorphisme[4] $Y \to X$ sur lequel G agit librement, et tel que le quotient Y/G soit isomorphe à X.

Exemple 1.2.
- Le premier exemple de torseur est celui du *torseur trivial* G_d, obtenu en faisant agir G sur $G \times X$ par translations à droite.
- Si $V \to X$ est un fibré vectoriel de rang r, le *fibré des repères*[5] $F \to X$ est un GL_r-torseur sur X.

Définition 1.3. Soient $X \to S$ et $Y \to S$ deux G-torseurs sur S. Un morphisme de G-torseurs $X \to Y$ est un morphisme équivariant (i.e. commutant à l'action de G) de X vers Y au dessus de S, c'est à dire un morphisme $X \to Y$ commutant à l'action de G, et tel que le triangle évident soit commutatif.

Les propositions suivantes donnent des informations structurelles intéressantes sur les G-torseurs.

Proposition 1.4. Soit X un objet de $\widetilde{T}$ et G un groupe dans $\widetilde{T}$.
- Un G-torseur sur X est trivial si et seulement si il admet une section.
- Un objet $Y \in \widetilde{T}$ sur lequel G agit librement et muni d'un epimorphisme $Y \to X$ est un G-torseur si et seulement si il est localement trivial.

Démonstration. Pour la première assertion, il s'agit de remarquer que $\mathrm{Aut}_G(G_d)$, le groupe des automorphismes de G_d commutant à l'action de G, est isomorphe

[3] la définition d'un groupe et d'une action de groupe dans $\widetilde{T}$ consistant simplement à traduire en diagrammes commutatifs les définitions usuelles, comme bon nombre de définitions et propriétés usuelles habituellement données dans les ensembles mais valables dans un topos quelconque.

[4] un morphisme induisant des surjections au niveau des fibres, ou de manière équivalente un morphisme admettant localement une section.

[5] i.e., le fibré $\bigsqcup_{x \in X} E_x \to X$ où E_x est l'ensemble des bases ordonnées de V_x.

à G (on définit une application $\mathrm{Aut}_G(G_d) \to G$ en envoyant un automorphisme sur sa valeur en la section unité de G, et l'application dans l'autre sens est définie par les translations à gauche). Pour la deuxième, on utilise le fait qu'un épimorphisme dans $\widetilde{T}$ est un morphisme admettant localement une section. $\square$

Proposition 1.5. Tout morphisme $u : X \to Y$ de G-torseurs sur $S \in \widetilde{T}$ est un isomorphisme.

Démonstration. L'idée est de prendre un recouvrement de S qui trivialise X et Y. La restriction de u aux ouverts de ce recouvrement est alors un endomorphisme équivariant de G, donc est inversible. Il faut ensuite voir que l'on peut recoller ces restrictions en un isomorphisme, ce qui vient du fait que l'on travaille avec des faisceaux. $\square$

Définition 1.6. Si $G \to H$ est un morphismes de groupes dans $\widetilde{T}$, X et Y deux G-faisceaux, respectivement à droite et à gauche, on définit le *produit contracté* $X \wedge^G Y$ comme le quotient de $X \times Y$ par G opérant diagonalement, i.e. $X \times Y \times G \to X \times Y$, $(x, y, g) \mapsto (xg, g^{-1}y)$.

Le résultat suivant découle de propriétés élémentaires des morphismes de topos.

Proposition 1.7. Soit $f : X \to Y$ un morphisme de faisceaux sur T. Alors f induit une application de l'ensemble des torseurs sur Y vers l'ensemble des torseurs sur X.

Proposition 1.8. Soit $G \to H$ un morphisme de groupes dans $\widetilde{T}$ et $X \to Y$ un G-torseur. Alors $X \wedge^G H_d \to Y$ est un H-torseur.

Nous pouvons maintenant définir $H^0(U, G)$ et $H^1(U, G)$ pour $U \in T$ et G un faisceau en groupes (non nécessairement abélien).

Définition 1.9. Soit $G \in \widetilde{T}$. On pose $H^0(-, G) = \mathrm{Hom}(-, G)$. Pour $U \in T$, $H^0(U, -)$ est clairement un foncteur $\mathbf{Grp}_{\widetilde{T}} \to \mathcal{E}ns$.

Définition 1.10. Soit $U \in T$ et G un faisceau de groupes sur T. On définit $H^1(X, G)$ comme l'ensemble des classes d'isomorphismes de G-torseurs sur X pointé par la classe du torseur trivial G_d. La proposition précédente fait de $H^1(X, -)$ un foncteur de la catégorie des faisceaux en groupes sur T vers celle des ensembles pointés.

Nous aimerions avoir un moyen concret de calculer le H^1 d'une variété. Nous allons voir qu'on peut le calculer *via* des recouvrements de Čech.

Définition 1.11. Soit U un objet de T, $\mathbf{U} = \{U_i \to U\}_{i \in I}$ un recouvrement de U dans T et G un faisceau de groupes sur T. On note $U_{ij} = U_i \cap U_j$.

- on appelle 1-*cocycle de* $\mathbf{U}$ *à valeurs dans* G une famille $u_{ij} \in G(U_{ij})$ telle que l'on ait (dans $G(U_{ijk})$) ${u_i}^j{}_k = u^k_{ij}.u^i_{jk}$, où $u_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}}{}^{i_k}{}_{i_{k+1} \dots i_n}$ est l'image de $u_{i_1 \dots i_n}$ par l'application $G(U_{1 \dots n}) \to G(U_{1 \dots k-1, k+1, \dots n})$.
- on dit que deux cocycles u_{ij} et v_{ij} sont *cohomologues* s'il existe une famille $g_i \in G(U_i), i \in I$ telle que l'on ait (dans $G(U_{ij})$) $v_{ij} = {g_i}^j.u_{ij}({g^i}_j)^{-1}$
- on note $H^1(\mathbf{U}, G)$ l'ensemble des classes de 1-cocycles à cohomologie près, pointé par la classe du cocycle unité.

Théorème 1.12. Soit $U \in T$ et G un faisceau de groupes. On pose $\check{H}^1(U,G) = \varinjlim H^1(\mathbf{U},G)$, la limite inductive étant indexée par tous les recouvrements de U. On a alors un isomorphisme canonique :

$$H^1(U,G) \simeq \check{H}^1(U,G)$$

Démonstration. Notons $Z^1(\mathbf{U},G)$ l'ensembles des classes de 1-cocycles à valeur dans $\mathbf{U}$. L'idée essentielle est de considérer $C^0(\mathbf{U},G) = \prod_{i\in I} G(U_i)$. On définit une application $f : C^0(\mathbf{U},G) \to Z^1(U,G)$ en envoyant un élément de $C^0(\mathbf{U},G)$ sur le cocycle défini par $f(g)_{ij} = ({g_i}^j)^{-1}.{g^i}_j$. On faisceautise ensuite cette construction, ce qui donne un morphisme f, et l'isomorphisme cherché est induit par l'application qui envoie un cocycle sur la classe de son image inverse par f. $\square$

Le résultat suivant nous indique qu'il est raisonnable de voir $H^1(-,G)$ comme un foncteur de cohomologie.

Théorème 1.13. Soit $1 \to A \to B \to C \to 1$ une suite exacte de faisceaux de groupes. La suite d'ensembles pointés :

$$1 \to H^0(A) \to H^0(B) \to H^0(C) \to H^1(A) \to H^1(B) \to H^1(C)$$

est exacte (la flèche $H^0(C) \to H^1(C)$ étant obtenue en associant à une section de $C = B/A$ la classe de son image inverse par le morphisme $B \to B/A$).

2 L'aspect homotopique

Nous allons maintenant expliquer le lien entre ce H^1 et l'homotopie. La première étape est de définir la catégorie homotopique simpliciale de $\widetilde{T}$. L'idée fondamentale est de se donner une[6] classe de morphismes dans $\widetilde{T}$, les *équivalences faibles*, sachant que l'on veut qu'une équivalence faible $X \to Y$ dans $\widetilde{T}$ soit, dans la catégorie homotopique, un isomorphisme. Pour cela, nous ne considérons pas directement $\widetilde{T}$ mais $\mathbf{\Delta}^{op}\widetilde{T}$, la catégorie des *faisceaux simpliciaux sur* T. On peut voir un faisceau simplicial $\mathcal{X}$ soit comme un foncteur $\Delta^{\mathrm{op}} \to T$, Δ étant la catégorie simpliciale[7], mais aussi comme la donnée pour tout n d'un faisceau $\mathcal{X}_n$, munis de morphismes de faces et de dégénerescences vérifiant les égalités simpliciales usuelles (voir [6]). À partir d'un faisceau simplicial, on peut définir une *réalisation topologique*, et on définit les *équivalences faibles simpliciales* comme des morphismes induisant des équivalences d'homotopie au niveau des réalisations topologiques.

On a alors des outils techniques (*la localisation* permettant de définir une catégorie homotopique[8] $\mathrm{Ho}(T)$ et un foncteur $\mathbf{\Delta}^{op}\widetilde{T} \to \mathrm{Ho}(T)$ de sorte que les équivalences faibles de $\mathbf{\Delta}^{op}\widetilde{T}$ soient précisément les morphismes envoyés sur les isomorphismes dans $\mathrm{Ho}(T)$. On a alors une notion d'*équivalence d'homotopie* entre morphismes de $\mathbf{\Delta}^{op}\widetilde{T}$, et sous quelques hypothèses sur $\mathcal{X},\mathcal{Y} \in \mathbf{\Delta}^{op}\widetilde{T}$,

[6] en fait, il en faut deux autres ; voir [6] pour l'axiomatique des catégories de modèles fermées

[7] les objets de Δ sont les $\underline{n} = \{0 \dots n\}$ et $\mathrm{Hom}_\Delta(\underline{n},\underline{m})$ est l'ensemble des applications croissantes de $\underline{n}$ dans $\underline{m}$.

[8] c'est l'axiomatique des catégories de modèles qui intervient ici, et il faut en fait se donner également une classe de *cofibrations* qui sont en l'occurrence les monomorphismes de $\mathbf{\Delta}^{op}\widetilde{T}$.

on ait $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(T)}(\mathcal{X},\mathcal{Y}) = \pi(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, $\pi(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ désignant l'ensemble des classes d'homotopie de $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{\Delta}^{op}\widetilde{T}}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$

On peut maintenant énoncer un théorème de classification des G-torseurs.

Définition 2.1. Soit G un faisceau de groupes sur T. On définit un faisceau simplicial $\mathrm{E}G$ par $(\mathrm{E}G)_n = G^{n+1}$, avec pour morphismes de face les projections et pour dégénérescences les morphismes diagonaux. On définit alors l'*espace classifiant* de G, dénoté $\mathrm{B}G$, comme le quotient de $\mathrm{E}G$ par l'action diagonale de G.

Théorème 2.2. Soit G un faisceau de groupes sur T. Pour tout $X \in \widetilde{T}$, on a un isomorphisme canonique

$$H^1(X,G) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(T)}(X,\mathrm{B}G)$$

L'étape suivante est de rajouter une notion d'intervalle à la théorie homotopique déjà définie. On se fixe donc un objet I de T que l'on appelle *intervalle*, muni d'un morphisme $i_0 : \bullet \to I$.

Définition 2.3. Un faisceau simplicial $\mathcal{X}$ sur T est dit *I-local* si pour tout faisceau simplicial X, l'application naturelle $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(T)}(\mathcal{Y}\times I,\mathcal{X}) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(T)}(\mathcal{Y},\mathcal{X})$ induite par i_0 est bijective.

Un morphisme $\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ dans $\boldsymbol{\Delta}^{op}\widetilde{T}$ est une *I-équivalence faible* si pour tout faisceau $\mathcal{Z} \in \boldsymbol{\Delta}^{op}\widetilde{T}$ I-local, l'application naturelle $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(T)}(\mathcal{Y},\mathcal{Z}) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{X},\mathcal{Z})$ est bijective.

En inversant formellement les I-équivalences faibles[9], on obtient la *catégorie homotopique du site avec intervalle* (T,I), notée $\mathrm{Ho}(T,I)$.

La première question à se poser après avoir défini cette catégorie homotopique est de savoir si elle correspond bien à ce que l'on connait déjà dans les cas simples. Cela fait l'objet du théorème suivant :

Théorème 2.4. Soit S une sous catégorie des espaces topologiques vérifiant les conditions suivantes :

- tout $X \in S$ est localement I-contractile (i.e. recouvert par des X_i tel que le morphisme naturel $X_i \to \bullet$ soit une I-équivalence faible).
- I est contractile.
- l'inclusion $S \to T$ commute aux produits fibrés.
- pour tout $X \in S$ et tout ouvert U de X, l'inclusion $U \to X$ est dans S.

Alors on a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Ho}(T,I) \to H^{\mathrm{top}}$$

où H^{top} désigne la catégorie homotopique usuelle (celle des CW-complexes, par exemple).

On aimerait avoir un résultat de représentabilité du H^1 non abélien dans $\mathrm{Ho}(T,I)$. C'est le cas sous certaines hypothèses.

Théorème 2.5. Soit S une sous catégorie des espaces topologiques vérifiant les hypothèses du théorème 2.4. Alors pour tout espace topologique $X \in S$ et tout groupe topologique G, on a un isomorphisme canonique

$$H^1(X,G) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(T,I)}(X,\mathrm{B}G)$$

[9] en gardant pour cofibrations les monomorphismes.

On prendra bien garde ici que X est un espace topologique et G un groupe topologique, et non des faisceaux quelconques. Le théorème reste toutefois intéressant, puisque ce qui nous intéresse est avant tout de classifier les torseurs sur des variétés, sous un groupe topologique.

La clé de la preuve est de montrer que sous ces hypothèses, l'espace classifiant $\mathrm{B}G$ est I-local, et que si X est contractile, alors $H^1(X, G) = H^1(\bullet, G) = 0$.

Ce théorème, combiné au théorème 2.4, permet d'obtenir des informations très intéressantes sur la classification des torseurs sur une variété. On en déduit par exemple de manière formelle que si G est un groupe de Lie, $H^1(V_{\mathrm{diff}}, G) = H^1(V_{\mathrm{top}}, G)$, c'est à dire que les G-torseurs sur une variété différentielle V correspondent à homotopie près aux G-torseurs sur V après oubli de la structure différentielle.

3 Quelques résultats en géométrie algébrique

Le but de cette section est de donner, sans démonstration, quelques résultats de la théorie homotopique des schémas concernant les espaces classifiants de schémas en groupes. On se fixe pour toute la section un schéma de base S noethérien et de dimension de Krull finie, et on se restreindra à l'étude des schémas lisses sur cette base. On note Sm/S la catégorie des schémas lisses, séparés et de type fini sur S.

Nous aurons besoin dans cette section d'un peu plus de notions concernant les topos ; nous renvoyons pour cela le lecteur à [3].

La topologie étale présente certains inconvénients qui nous amène à considérer la *topologie Nisnevich.*

Proposition 3.1. Soit $X \in Sm/S$, on note $C_{Nis}(X)$ la classe des familles de morphismes de la forme $\mathcal{U} = (f_i : U_i \to X)_{i \in I}$ tel que :
- le morphisme $\coprod_{i \in I} U_i \to X$ soit surjectif.
- pour tout i, f_i est étale.
- pour tout point $x \in X$, il existe un indice $i \in I$ et un point $u \in U_i$ tel que $f_i(u) = x$ et que f_i induise un isomorphisme entre les corps résiduels $k(x) \xrightarrow{\sim} k(u)$.

La donnée de $C_{Nis}(X)$ pour tout X de Sm/S est une prétopologie sur Sm/S. On note le site correspondant Sm/S_{Nis}, que l'on appelle *gros site Nisnevich de* S.

On considère le foncteur d'inclusion $\pi : Sm/S_{et} \to Sm/S_{Nis}$ du site des schémas lisses, séparés et de type fini sur S muni de la topologie étale, vers le gros site Nisnevich. Ce foncteur induit un foncteur entre les catégories homotopiques simpliciales correspondantes. Si G est un faisceau de groupes sur Sm/S_{Nis}, on définit $\mathrm{B}_{et}G = \mathrm{R}\pi_*\pi^*\mathrm{B}G$ (voir [6] pour la définition des foncteurs dérivés dans le cadre des catégories de modèles), et on a un morphisme canonique $\mathrm{B}G \to \mathrm{B}_{et}G$. On a le critère suivant pour savoir dans quel cas ces deux espaces coincident.

Théorème 3.2. Le morphisme canonique $\mathrm{B}G \to \mathrm{B}_{et}G$ est un isomorphisme dans $\mathrm{Ho}(Sm/S_{Nis})$ si et seulement si G est un faisceau étale et pour tout schéma lisse U sur S, on a $H^1_{et}(U, G) = H^1_{Nis}(U, G)$.

Références

[1] Daniel G. Quillen, *Homotopical algebra*, Springer-Verlag, 1967.

[2] J. F. Jardine, *Simplicial presheaves*, J. Pure Appl. Algebra, Vol. 47, 1987.

[3] M. Artin, A. Grothendieck, J. Verdier, *SGA 4* (1963-1964), Lectures Notes in Mathematics, Vols. 269, 270, 305, Springer, 1972.

[4] Luc Illusie, *Complexe cotangent et déformations*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 239 & 283, Springer-Verlag, 1971-1972.

[5] Fabien Morel, Vladimir Voevodsky, $\mathbf{A}^1$*-homotopy theory of schemes*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., Vol. 90, 1999.

[6] Sam Zoghaib, *Théorie homotopique de Morel-Voevodsky et applications*, mémoire de M2, 2007.